ASTRONOMIE

THÉORIQUE ET PRATIQUE.



ASTRONOMIE

THÉORIQUE ET PRATIQUE;

PAR M. DELAMBRE,

Trésorier de l'Université de France, Secrétaire perpétuel de l'Institut pour les Sciences Mathématiques, Professeur d'Astronomie au Collége Royal de France, Membre du Bureau des Longitudes, des Sociétés Royales de Londres, d'Upsal et de Copenhague, des Académies de Saint-Pétersbourg, de Berlin et de Suède, de la Société Italienne, de l'Académie de Philadelphie, etc. Chevalier de la Légion-d'Honneur.

TOME TROISIÈME.





PARIS,

Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1814.

ASTRONOMIE
THÉORIQUE ET PRATIQUE.

CHAPITRE VINGT-HUITIÈME.



Stations et rétrogradations des planètes, et comparaison des trois systèmes.

1. Nous avons déjà remarqué que dans la partie la plus considérable de leur cours, toutes les planètes vont dans le même sens, c'est-à-dire d'occident en orient; qu'elles avancent en longitude suivant l'ordre des signes, ce qui a lieu principalement quand elles sont dans leur plus grande distance à la terre; mais que dans la partie inférieure, quand leurs diamètres apparens sont les plus grands, que leur lumière est plus vive, et qu'enfin elles sont à leur plus grande proximité de la terre, elles ont une marche opposée, d'orient en occident; que leur longitude et leur ascension droite diminuent chaque jour, et qu'elles passent au méridien un peu plus tôt que la veille; tandis que dans la partie supérieure, le passage au méridien retarde plus ou moins chaque jour. On dit alors qu'elles sont rétrogrades; l'arc et le tems de la rétrogradation varient pour chaque planète. Cet arc est plus grand pour les planètes voisines de la terre; il est plus petit pour celles qui en sont le plus éloignées.

Ces phénomènes sont des corollaires mathématiques, des mouvemens inégaux des différentes planètes dans le système de Copernic et même dans celui de Tycho; on devait les remarquer comme des singularités annoncées par le calcul et confirmées par les observations, et jamais

on n'eût attaché aucune importance réelle à cette espèce de singularité, dont la cause était visible et le calcul facile.

Les planètes, dans l'hypothèse du mouvement de la terre, s'avancent toujours du même sens dans leurs révolutions autour du soleil; mais la combinaison de leurs mouvemens avec celui de la terre, fait que si le plus souvent elles doivent nous paraître avancer réellement en longitude, quelquefois aussi elles paraîtront diminuer de longitude, quoique dans le fait, et quand on les considère du centre de leurs mouvemens, elles suivent, sans jamais s'arrêter, leur course invariablement dirigée dans le même sens.

2. En effet, l'expression générale de la longitude géocentrique est

$$\Gamma = \odot - T; \quad \text{donc} \quad d\Gamma = d\odot - dT:$$

mais en supposant $V = 1$, nous aurons

$$\text{tang}\, T = \frac{\frac{v}{V}\sin S}{1 - \frac{v}{V}\cos S} = \frac{v \sin S}{1 - v\cos S}; \quad \text{tang}\, T - v\cos S\, \text{tang}\, T = v \sin S,$$

$$\frac{dT}{\cos^2 T} - v\cos S \frac{d\Gamma}{\cos^2 T} + v\sin S\, \text{tang}\, T dS = v \cos S dS,$$

$$dT(1 - v\cos S) + v \sin S \sin T \cos T dS = v\cos S \cos^2 T dS,$$

$$dT = \left(\frac{v\cos S\cos^2 T - v\sin S\sin T\cos T}{1 - v\cos S}\right) dS = (v\cos T)\left(\frac{\cos S\cos T - \sin S\sin T}{1 - v\cos S}\right) dS$$

$$= \frac{v\cos T\cos(S+T)\, dS}{1 - v\cos S},$$

$$d\Gamma = d\odot - \frac{v\cos T\cos(S+T)\,(d\Pi - d\odot)}{1 - v\cos S}$$

$$= d\odot - \frac{v\cos T\cos(S+T)}{1 - v\cos S}\left(\frac{d\odot}{v^{\frac{3}{2}}} - d\odot\right)$$

$$= d\odot - \frac{v\cos T\cos(S+T)\, d\odot\,(1 - v^{\frac{3}{2}})}{(1 - v\cos S)\,(v^{\frac{3}{2}})}$$

$$= d\odot - \frac{d\odot\cos T\cos(S+T)(1 - v^{\frac{3}{2}})}{(1 - v\cos S)\, v^{\frac{1}{2}}},$$

or à la conjonction inférieure $\cos T = 1$, $\cos(S+T) = 1$, $\cos S = 1$; donc

$$d\Gamma = d\odot - d\odot\left(\frac{1-\nu^{\frac{3}{2}}}{(1-\nu)\nu^{\frac{1}{2}}}\right) = \left(\frac{(1-\nu)\nu^{\frac{1}{2}} - (1-\nu^{\frac{3}{2}})}{(1-\nu^{\frac{1}{2}})}\right)d\odot$$

$$= \left(\frac{\nu^{\frac{1}{2}} - \nu^{\frac{3}{2}} - 1 + \nu^{\frac{3}{2}}}{(1-\nu)\nu^{\frac{1}{2}}}\right)d\odot = \left(\frac{\nu^{\frac{1}{2}} - 1}{(1-\nu)\nu^{\frac{1}{2}}}\right)d\odot = -d\odot\left(\frac{1-\nu^{\frac{1}{2}}}{(1-\nu)\nu^{\frac{1}{2}}}\right)$$

$$= -\frac{d\odot}{\nu^{\frac{1}{2}}+\nu}.$$

Ainsi $d\Gamma$ est négatif, et la planète est rétrograde en conjonction inférieure.

3. A la conjonction supérieure

$$\cos S = -1,\ \cos T = 1,\ \cos(S+T) = \cos(180° + 0) = -1,$$

l'expression devient

$$d\Gamma = d\odot + \frac{\nu(d♃ - d\odot)}{1+\nu} = d\odot + \frac{\nu}{1+\nu}\cdot\left(\frac{d\odot}{\nu^{\frac{3}{2}}} - d\odot\right)$$

$$= d\odot + \frac{\nu}{1+\nu}\left(\frac{d\odot - \nu^{\frac{3}{2}}d\odot}{\nu^{\frac{3}{2}}}\right) = d\odot + \frac{d\odot}{(1+\nu)\nu^{\frac{1}{2}}}(1-\nu^{\frac{3}{2}})$$

$$= d\odot\left(\frac{(1+\nu)\nu^{\frac{1}{2}} + 1 - \nu^{\frac{3}{2}}}{(1+\nu)\nu^{\frac{1}{2}}}\right) = d\odot\left(\frac{\nu^{\frac{1}{2}} + \nu^{\frac{3}{2}} + 1 - \nu^{\frac{3}{2}}}{\nu^{\frac{1}{2}} + \nu^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$= d\odot\left(\frac{\nu^{\frac{1}{2}}+1}{\nu^{\frac{1}{2}}+\nu^{\frac{3}{2}}}\right) = d\odot\left(\frac{1+\nu^{\frac{1}{2}}}{\nu^{\frac{1}{2}}+\nu^{\frac{3}{2}}}\right) \text{ quantité positive;}$$

donc en conjonction supérieure, la planète inférieure est directe.

Les mêmes formules appliquées à une planète supérieure, prouveront qu'elle est rétrograde en opposition et directe en conjonction; il n'y aura de changement que dans la valeur de ν qui sera > 1.

Entre le tems où la planète est directe, et celui où elle commence à rétrograder, on observe, ou plutôt on conçoit un tems pendant lequel elle ne paraît ni directe ni rétrograde, mais stationnaire et comme fixée au même point du ciel.

4. Ce que les modernes ont appelé *station*, les Grecs le nommaient στηριγμὸς, qui signifie la même chose. Ce que nous appelons *marche directe*, les Grecs le nomment ἐπόλειψις; ils disaient que la planète

était *hypoliptique*, c'est-à-dire *restant en arrière* quand elle avançait en longitude; parce qu'alors elle passait plus tard au méridien, et qu'elle restait en arrière de l'étoile avec laquelle elle avait passé la veille.

Ce que nous appelons *marche rétrograde*, les Grecs l'appelaient προήγησις, mouvement en avant; parce que la planète se meut de manière à passer plutôt au méridien, et à devancer l'étoile avec laquelle elle avait passé la veille.

Ils appelaient προηγούμενα, *antecedentia*, marchant à la tête, les points de l'écliptique qui avaient une longitude moindre; ἑπόμενα, *consequentia* les points qui étaient plus avancés en longitude, et suivaient les autres au méridien.

5. Les astronomes modernes se sont trompés souvent au sens de ces mots; ils ont cru que la planète était hypoliptique et qu'elle était en arrière quand elle avait une longitude moindre; c'est alors au contraire qu'elle est προηγουμένη, qu'elle devance au méridien.

Une planète est donc directe, quand elle se meut, εἰς τὰ ἑπόμενα, *in consequentia*, suivant l'ordre des signes; c'est alors qu'elle est hypoliptique. Elle est rétrograde quand elle se meut, εἰς τὰ προηγούμενα, contre l'ordre des signes, quand sa longitude diminue et qu'elle avance son passage au méridien.

Ainsi, quoique προήγησις et rétrogradation soient précisément l'opposé l'un de l'autre grammaticalement, ces deux mots signifient précisément la même chose; mais ces mots sont relatifs. Les Grecs considéraient le mouvement par rapport au méridien, et nous le considérons par rapport au premier point de l'équateur et de l'écliptique; et comme ces deux directions sont opposées, ce qui est direct par rapport au méridien est rétrograde par rapport aux divisions de l'écliptique.

6. Les anciens et les astronomes du moyen âge jusqu'à Copernic, faisaient une attention particulière aux stations et aux rétrogradations des planètes; et ces phénomènes étaient en effet inexplicables dans le système de ceux qui faisaient de la terre le centre de tous les mouvemens célestes. On ne voyait aucune raison qui pût déterminer la planète à s'arrêter d'abord, puis à se mouvoir en sens contraire, s'arrêter de nouveau, et puis reprendre sa première direction. *Il n'y a rien dans tout le système planétaire qui mérite mieux aux cinq petites planètes le nom d'astres errans qu'on leur a donné, que cette variété*

hétéroclite et anomale, ou plutôt cette inconstance et même cette absurdité ou cette contradiction. C'est ainsi que s'explique Riccioli, au ch. II, liv. VII, p. 645 du tome I de son Almageste; et cependant Riccioli était un des plus obstinés défenseurs de l'immobilité de la terre, qu'il regardait comme un article de foi. Mais il avait trop de connaissances pour ne pas sentir la difficulté dans toute sa force, et il l'expose en termes assez énergiques, quoiqu'il ne trouve ensuite pour l'expliquer et la résoudre que des défaites misérables, et qui ont dû coûter à sa bonne-foi.

7. Les anciens n'observaient pas les diamètres, et ne pouvaient juger des distances; ils ne connaissaient pas les phases de Vénus, qui prouvent que l'orbite de cette planète embrasse le soleil; ils n'avaient rien qui les mît à portée de bien sentir toute l'absurdité de leur hypothèse. Plusieurs modernes ont décrit, d'après Cassini, la route de chaque planète autour de la terre : cette route est une espèce d'épicycloïde (fig. 1), où l'on voit vers chaque conjonction inférieure, ou chaque opposition, une sorte de nœud, dont il est impossible d'assigner une cause tant soit peu vraisemblable ; au point que Riccioli se voit réduit à placer dans chaque planète un ange qui en conduit les mouvemens d'une manière tout-à-fait arbitraire, comme serait la marche d'un homme qui se promène. Il restait pourtant encore à montrer pourquoi ces mouvemens irréguliers et volontaires avaient lieu régulièrement chaque fois que la planète approchait de la terre.

8. Depuis que le système de Copernic est universellement adopté par tous ceux qui ont droit d'avoir une opinion en cette matière, les stations n'ont plus aucune importance réelle ; il est cependant curieux de les déterminer par le calcul, d'en fixer l'étendue et la durée.

Ce problème est extrêmement difficile, quand on veut avoir égard à toutes les inégalités ; en se bornant même au mouvement elliptique, on n'en a pu donner aucune solution réelle et directe. Cagnoli, qui l'a résolu plus exactement que personne, ne donne qu'une équation de condition qui doit avoir lieu au moment de la station. Il faut supposer une valeur quelconque aux variables, et alors on peut trouver la station en longitude; et il est à remarquer que jamais peut-être, planète n'a été complètement stationnaire : si la longitude reste la même, la latitude varie alors, et souvent assez sensiblement, car la planète se rapproche

on s'éloigne de la terre; il faudrait que le mouvement par rapport au nœud produisît un effet égal, mais de signe contraire à celui que produit le changement dans la distance de la terre. Ainsi la station en latitude ne coïncide jamais avec la station en longitude; mais les astronomes n'ont considéré que la dernière qui est en effet la plus sensible.

9. Nous supposerons les orbites circulaires, et nous n'aurons que des valeurs moyennes, mais qui seront plus que suffisantes pour l'usage que l'on fait de ces phénomènes qu'on n'observe plus, et qui sont cependant encore annoncés dans quelques Éphémérides, parce qu'il n'en coûte rien pour les calculer, et qu'il suffit de jeter les yeux sur la marche des longitudes géocentriques.

10. Nous avons vu (2) que la variation de longitude se compose de la variation de la longitude du soleil et du changement de l'élongation.

Si $d\Gamma$ est positif ou négatif, mais moindre que $d\odot$, la longitude augmentera, la planète sera directe.

Si $d\odot = d\mathrm{T}$, $d\Gamma = 0$, et la planète est stationnaire; mais si $d\mathrm{T}$ est à-la-fois négatif et $> d\odot$, alors $d\Gamma$ sera négatif et la planète rétrograde.

Mais P étant l'angle à la planète, on a $\mathrm{V}\sin\mathrm{T} = v\sin\mathrm{P}$, d'où

$$\mathrm{V}\cos\mathrm{T}\,d\mathrm{T} = v\cos\mathrm{P}\,d\mathrm{P}, \text{ et } d\mathrm{T} = \left(\frac{v\cos\mathrm{P}}{\mathrm{V}\cos\mathrm{T}}\right)d\mathrm{P} = d\odot,$$

dans le cas de la station.

11. On a de plus $\mathrm{T} + \mathrm{P} + \mathrm{S} = 180°$, d'où

$$d\mathrm{P} = -d\mathrm{T} - d\mathrm{S} = -d\mathrm{T} - d\pi + d\odot = -d\pi,$$

π étant la longitude héliocentrique de la planète; ainsi

$$d\odot = -d\pi\frac{v\cos\mathrm{P}}{\mathrm{V}\cos\mathrm{T}}, \quad -\frac{d\odot}{d\pi} = \left(\frac{v}{\mathrm{V}}\right)\frac{\cos\mathrm{P}}{\cos\mathrm{T}},$$

Mais par la loi de Képler on a

$$\frac{d\odot}{d\pi} = \left(\frac{v}{\mathrm{V}}\right)^{\frac{3}{2}} = -\left(\frac{v}{\mathrm{V}}\right)\frac{\cos\mathrm{P}}{\cos\mathrm{T}},$$

et $$\left(\frac{v}{\mathrm{V}}\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{\cos\mathrm{P}}{\cos\mathrm{T}}\cdot\frac{\mathrm{V}}{v}\frac{\sin\mathrm{T}}{\sin\mathrm{P}} = -\frac{\mathrm{V}}{v}\,\mathrm{tang\,T\,cotang\,P},$$

d'où $$-\frac{\mathrm{tang\,P}}{\mathrm{tang\,T}} = \left(\frac{\mathrm{V}}{v}\right)^{\frac{3}{2}} \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

Cette formule donne une relation fort simple entre la tangente de l'élongation et celle de l'angle à la planète, mais elle n'est pas commode pour connaître la station.

12. Avant d'aller plus loin, on peut tirer de la formule $\left(\frac{v}{V}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\cos P}{\cos T}$, la démonstration des théorèmes d'Apollonius sur les stations.

Soit P (fig. 2) le lieu de la station ; menez TPQ qui traverse le cercle décrit par la planète ; abaissez la perpendiculaire Sm, et vous aurez, en prenant P extérieurement au triangle,

$$Pm = v\cos P,\quad Tm = V\cos T,\quad \text{d'où}\quad TP = V\cos T - v\cos P,$$

et par conséquent

$$Pm : PT :: v\cos P : V\cos T - v\cos P :: v\frac{\cos P}{\cos T} : V - v\frac{\cos P}{\cos T} :: v\left(\frac{v}{V}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$: V - v\left(\frac{v}{V}\right)^{\frac{1}{2}} :: v^{\frac{3}{2}} : V^{\frac{3}{2}} - v^{\frac{3}{2}} :: \left(\frac{v}{V}\right)^{\frac{3}{2}} : 1 - \left(\frac{v}{V}\right)^{\frac{3}{2}} :: \frac{d\odot}{d\pi} : 1 - \frac{d\odot}{d\pi} :: d\odot$$

$: d\pi - d\odot$, ou enfin :: mouvement du centre de l'épicycle : mouv. sur l'épicycle.

Nous ignorons comment Apollonius démontrait ces théorèmes, et la démonstration que Ptolémée donne en place de celle d'Apollonius, comme plus facile, est encore bien longue et bien pénible.

13. La même équation (1) donne

$$\frac{v}{V} = \frac{\cos^2 P}{\cos^2 T} = \frac{1 - \sin^2 P}{\cos^2 T} = \frac{1 - \left(\frac{V}{v}\right)^2 \sin^2 T}{\cos^2 T} = 1 + \text{tang}^2 T - \left(\frac{V}{v}\right)^2 \text{tang}^2 T$$

$$= 1 + \left[1 - \frac{V^2}{v^2}\right] \text{tang}^2 T = 1 - \frac{(V+v)(V-v)}{v^2}\,\text{tang}^2 T,$$

et par conséquent

$$\text{tang}^2 T = \frac{\left(1 - \frac{v}{V}\right)v^2}{(V+v)(V-v)} = \frac{v^2\left(\frac{V-v}{V}\right)}{(V+v)(V-v)} = \frac{\left(\frac{v}{V}\right)^2}{1 + \frac{v}{V}};\ \text{donc}$$

$$\text{tang}\, T = \frac{\frac{v}{V}}{\sqrt{\left(1 + \frac{v}{V}\right)}}.$$ Cet angle est toujours aigu pour une planète inférieure, d'où il suit que P est obtus (A).

C'est la formule de Keill, mais soit $\frac{v}{V} = \text{tang}^2 x$, on aura

$$\text{tang}\, T = \frac{\text{tang}^2 x}{(1 + \text{tang}^2 x)^{\frac{1}{2}}} = \cos x\, \text{tang}^2 x = \sin x\, \text{tang}\, x;$$

et

$$-\text{tang}\, P = \frac{\text{tang} T}{\left(\frac{v}{V}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{v}{V}}{\left(\frac{v}{V}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\left(1+\frac{v}{V}\right)}} = \frac{1}{\left(\frac{v}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(1+\frac{v}{V}\right)}}$$
$$= \frac{\cos x}{\text{tang}\, x} = \cos x \cot x,$$

formule aussi simple que la précédente; l'angle P est toujours obtus pour une planète inférieure.

14. T et P étant ainsi déterminés, on aura $S = 180° - T - P$, et l'on connaîtra les trois angles du triangle; S sera la distance à la conjonction, qui se réduira en tems au moyen du mouvement relatif de la planète, ce qui donnera la demi-durée de la rétrogradation. L'arc de rétrogradation sera $2T$ — mouvement du soleil dans l'intervalle des deux stations; car la longitude à la première station sera $\odot + T$, à la seconde $\odot + \Delta\odot - T$, dont la différence est $2T - \Delta\odot$,

$$\text{tang}\, S = \text{tang}\,(180° - P - T) = -\frac{\text{tang} P + \text{tang} T}{1 - \text{tang} P\, \text{tang} T}$$
$$= -\frac{-\cot x \cos x + \text{tang}\, x \sin x}{1 + \cot x \cos x\, \text{tang}\, x \sin x} = +\frac{\cot x \cos x - \text{tang}\, x \sin x}{1 + \sin x \cos x};$$

mais il est plus commode de calculer séparément les angles T, P et d'en conclure leur supplément S.

15. Pour trouver la durée de la rétrogradation, on dira

$$d\pi - d\odot : 2S :: 1^{\text{i}} : \text{durée de la rétrogradation}$$
$$= \frac{2S.1^{\text{i}}}{d\pi - d\odot} = \frac{2S.1^{\text{i}}}{\left(\frac{d\pi}{d\odot} - 1\right) d\odot} = \frac{2S.1^{\text{i}}}{\left[\left(\frac{V}{v}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] d\odot} = \frac{2S.1^{\text{i}}}{(\text{cotang}^3 x - 1)\, d\odot}$$
$$= \frac{S \text{ en minutes.}}{29'.34''{,}166\,(\cot^3 x - 1)} = \frac{\frac{1}{60} S \text{ en degrés}}{29{,}56944\,(\cot^3 x - 1)}$$
$$= \frac{\frac{1}{60}\left(\frac{S \text{ en degrés}}{29{,}56944}\right) \text{tang}^3 x}{1 - \text{tang}^3 x}.$$

Ainsi

Ainsi, tout le problème se réduit à ces formules bien simples

$$\text{tang}\, x = \left(\frac{v}{V}\right)^{\frac{1}{3}},\ \text{tang}\,T = \sin x\, \text{tang}\, x,\ \text{tang}\,P = \cos x \cot x,\ S = 180° - P - T,$$

arc = 2T — mouvement du ☉ pendant la durée de la rétrogradation,
$$\text{durée} = \frac{\frac{1}{60} S}{29{,}56944(\cot^2 x - 1)},\ \text{distance à la terre} = \frac{v \sin S}{\sin T}.$$

Mais, comme nous avons dit, on n'aura ainsi que des valeurs moyennes.

16. En appliquant ces formules aux planètes de notre système, on aura les quantités suivantes. On remarquera que l'angle T est aigu pour les planètes inférieures, et P obtus; c'est le contraire pour les planètes supérieures.

Par ces formules, on trouvera très-aisément les quantités suivantes pour toutes les planètes.

	☿	♀	♂	⚳	♃	♄	♅
T	18° 12′	28° 51′	136° 12′	126° 7′	115° 35′	108° 47′	103° 15′
P	126.14	138. 9	27. 1	18. 6	9.59	5.42	2.55
S	35.34	13. 0	16.47	35.47	54.26	65.31	73.52
Arc........	13° 24′	15° 22′	14.41	10.30	9.55	6.47	3.45
Limites.....	9°—16°	14°—17°	10°—20′		9°8—10°	6°7—6°9	3° ½—4°
Durée......	22ʲ 9	42ʲ 16	72ʲ 76	97ʲ 45	120ʲ 7	137ʲ 61	151ʲ 7
Limites.....	21 ½. 23 ½	41. 43 ½	61. 81 ½		117. 122½	135. 139	150. 153

Ptolémée, Magin et Lansberge ont donné des tables étendues, mais peu exactes, des stations et rétrogradations (Voyez Riccioli, *Almageste*, Tom. I, p. 646.

La table de Carouge, Astronomie de Lalande (1192), me paraît mal conçue; il fallait mettre la planète aphélie et périhélie à la syzygie.

17. Les formules précédentes serviront à calculer les nœuds des épicycloïdes. En effet, l'angle ATB (fig. 3) entre les deux stations sera mesuré par l'arc de rétrogradation, le milieu *m* sera le lieu de la conjonction ou de l'opposition; les sommets D et E seront les conjonctions

supérieures : on aura autant de points qu'on voudra de la courbe, en calculant le lieu du soleil de distance en distance, l'angle T pour une valeur quelconque de S, et la distance TP de la planète à la terre.

18. Les anciens ne paraissent pas avoir cherché à se rendre raison de la figure de ces courbes. Cassini les a fait graver dans les Mémoires de 1709, pour Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne. Doppel-Mayer les a portées dans son Atlas céleste, et Long, dans son Traité d'Astronomie en anglais.

19. Nous avons vu (XXVII) comment un astronome, en faisant usage de toutes les observations qu'on sait faire aujourd'hui, serait conduit au système de Copernic ou à celui de Tycho.

Le premier fournit des courbes régulières et liées entre elles par des rapports constans. Les planètes avancent toujours dans le même sens sur leurs ellipses sans aucune station, ni rétrogradation réelle. Ces phénomènes ne sont que des apparences optiques, résultats nécessaires de la combinaison des mouvemens des diverses planètes.

Dans le système de Tycho, la terre étant immobile, les planètes décrivent des épicycloïdes par un mouvement composé de leurs mouvemens propres autour du soleil et du mouvement commun de tout le système solaire autour de la terre. Ces mouvemens sont possibles ; et dans le système de Copernic, ils ont lieu pour la lune et les satellites qui, circulant autour de leur planète principale, tournent en outre avec elle autour du soleil.

20. Mais l'hypothèse de Tycho n'offre aucune loi qui soit démontrée et qui lie entre elles les différentes parties du système, et il fait circuler autour de la terre des masses qui, réunies ensemble, sont près de 1,400,000 fois plus grosses qu'elle.

Un respect mal-entendu pour les livres saints a pu seul soutenir pendant long-temps ce système, que quelques astronomes ont voulu modifier sans lui acquérir plus de faveur : les uns ont donné à la terre le mouvement de rotation sur son axe ; mais ce point accordé, on ne voit pas pourquoi l'on refuserait d'admettre le mouvement de translation.

Ptolémée voulait que la terre fût le centre commun de tous les mouvemens. Cette idée, assez naturelle de son tems, ne pourrait plus être défendue aujourd'hui que par préjugé ; et quand on aurait pris d'avance

son parti sans avoir consulté les phénomènes ; mais puisque les observations et les calculs ne donnent aucune idée de cette hypothèse, voyons comment nous pourrons y arriver.

21. D'abord il n'y a pas grande difficulté pour les planètes inférieures ; regardons l'orbite de Mercure ou celle de Vénus comme des épicycles, et le soleil comme le lieu moyen de la planète inférieure ou le centre de l'épicycle (fig. 2). La planète se mouvra sur son épicycle avec son mouvement relatif, c'est-à-dire son excès de mouvement sur le soleil ou la terre ; nous aurons, comme dans le système de Copernic, la

longitude géocentrique $\odot + \text{arc tang}\left(= \frac{v \sin S}{V + v \cos S}\right) = \frac{\frac{v}{V} \sin S}{1 + \frac{v}{V} \sin S}$, en

partant de l'apogée ; le signe + se changerait en —, si l'on partait du périgée

Sous cette forme, on voit même qu'il n'était nul besoin de connaître les valeurs vraies et absolues de v et V ; il suffisait d'en avoir le rapport. Ainsi, il était indifférent à quelle distance on plaçait le centre de l'épicycle, dans le soleil en S (fig. 4), ou en a au-dessous du soleil, ou enfin en b au-dessus, pourvu que le rapport $\frac{v}{V}$ fût celui qu'indiquaient les observations : le rayon visuel TPPP aurait embrassé toutes les orbites, ou les aurait coupées toutes semblablement ; mais il paraît plus naturel de mettre au centre du soleil le centre des épicycles, on y trouverait l'avantage de faire circuler les deux planètes autour d'un corps un million de fois plus gros qu'elles, et qui pouvait les entraîner dans sa course, comme la Terre, Jupiter et Saturne entraînent les satellites dans le système de Copernic : mais c'est peut-être cette raison même qui l'en a empêché. Il ne pouvait pas en faire autant pour les planètes supérieures, et il n'a pas voulu établir une différence qui aurait peut-être inspiré quelques doutes sur son hypothèse.

Ptolémée, qui ne connaissait aucun moyen pour déterminer les distances absolues, plaçait Vénus au-dessous du soleil, et Mercure au-dessous de Vénus et au-dessus de la lune ; il avait adopté cet arrangement, parce que les conjonctions de Mercure revenaient plus souvent que celles de Vénus. Tout allait assez bien quand on ne connaissait pas les phases des deux planètes qui prouvent que leurs orbites embrassent celle du soleil : ainsi même, en adoptant aujourd'hui le système de

Ptolémée, nous n'aurions plus, comme lui, la liberté d'intervertir l'ordre de ces planètes. En effet, si l'orbite de Vénus était toute inférieure au soleil, cette planète passerait sur le soleil, dans les conjonctions supérieures comme dans les inférieures; et elle serait noire dans les deux cas : au contraire, elle est toute éclairée dans les conjonctions supérieures; la marche des phases serait toute autre. Il en serait de même de Mercure; si l'orbite était toute supérieure, la planète ne passerait jamais sur le soleil où elle a pourtant été observée; et si elle était inférieure, on observerait les passages dans les deux conjonctions.

22. Il n'était pas si facile d'expliquer le mouvement des planètes supérieures autour de la terre. En voici pourtant le moyen; mais pour le mieux comprendre, rappelons-nous d'abord ce que donne le système de Copernic.

Soit S (fig. 5) le soleil, T la terre, O une planète supérieure quelconque en opposition : quelques tems après, la terre est arrivée de T en t et la planète qui se meut plus lentement est arrivée en P.

La terre voit la planète sur le rayon tP, à la distance angulaire StP du soleil; on a cet angle par la formule $\tang StP = \frac{PS \sin S}{SP \cos S - St}$.
On a encore longit. géocent. de la planète = long. hélioc. — parallaxe annuelle, et $\tang P = \frac{\frac{v}{V} \sin S}{1 - \frac{v}{V} \cos S} = \frac{\left(\frac{St}{SP}\right) \sin S}{1 - \left(\frac{St}{SP}\right) \cos S}$.

23. Ptolémée suppose qu'à l'opposition, la terre étant en T, le soleil en S, la planète était en O sur son épicycle, le centre C de l'épicycle serait le lieu moyen de la planète, O le lieu vrai; mais ils sont sur la même ligne, la seconde inégalité est nulle; la planète est jugée plus près, à cause de son diamètre et de son éclat, lorsqu'elle est acronyque. Quelques temps après, le centre de l'épicycle est arrivé de C en B; BTC est donc le moyen mouvement de la planète depuis l'opposition. Le point O par ce mouvement se trouve transporté en O'; mais la planète n'occupe plus le point O', elle est quelque part en P'.

Pour connaître le point P', je raisonne ainsi : quand la planète aura parcouru les 360°, elle se retrouvera en O et en opposition; car on avait remarqué que la seconde inégalité disparaissait dans les oppositions, et de plus, que le mouvement de la planète était alors le plus grand;

on en concluait qu'elle était alors périgée, ce qui se voyait aussi par l'éclat extraordinaire dont elle brille alors.

Ainsi la planète décrit son épicycle par son mouvement relatif, mais ce mouvement relatif est rétrograde; car toute planète supérieure se meut plus lentement que le soleil, et c'est à force de rester toujours en arrière qu'elle se rejoint avec le soleil; ainsi le point P′ sera dans l'angle BTC, et l'arc O′P′ sera le mouvement relatif depuis l'opposition, et l'angle O′BP′ sera égal à l'angle *t*SP du système de Copernic.

24. Le tems d'une opposition à l'autre donne la révolution synodique. La révolution synodique : 360° :: 1 jour : mouv. relatif diurne, mouvem. relat. diurne = mouvem. diurne ⊙ — mouvem. diurne Mars, mouvem. diurne Mars = mouv. diurne ⊙ — mouv. relatif diurne Mars, ou bien mouvement propre de Mars pendant la révolution synodique

= 360° + mouv. ⊙ pendant la révolution synodique,

ou mouvement propre de Mars moins le mouvement du soleil pendant la révolution synodique = — 360°; ce qui prouve que le mouvement est rétrograde, et donne la valeur avec le sens de ce mouvement.

25. L'angle BTP′ est la seconde inégalité de Mars, on aura cet angle par la formule

$$\text{tang}\,BTP' = \frac{BP'\sin B}{TB - BP'\cos B} = \frac{\frac{BP'}{BT}\sin B}{1 - \frac{BP'}{BT}\cos B} = \frac{\frac{v}{V}\sin S}{1 - \frac{v}{V}\cos S}.$$

L'inégalité de la planète ne dépend donc nullement de la valeur absolue des distances BP′, TB ou TC, mais seulement du rapport de BP′ à BT, ou à CT, qui est la distance moyenne de la planète à la terre.

26. Ptolémée ne connaissait ni BP′, ni TB; mais il enseigne à trouver leur rapport par les observations vers les quadratures, et le rapport qu'il trouve pour chaque planète est toujours le rapport des distances moyennes de la terre au soleil dans le système de Copernic; c'est-à-dire, que $\frac{BP'}{TB} = \frac{St}{SP}$ de la figure qui représente le système de Copernic.

Et comme les valeurs absolues de BP et de TB sont indifférentes, faisons d'abord BP′ = TS et TB = SP pour plus de simplicité; alors dans les triangles *t*SP et BP′T, nous aurons les angles égaux B et S,

compris entre les côtés tS et SP respectivement égaux aux côtés BP′ et BT; les deux triangles sont parfaitement égaux, ou plutôt ne sont que le même triangle renversé. Ptolémée ayant fait de l'orbite de la terre l'épicycle de la planète pour rendre la terre immobile, il a transporté son mouvement à Mars en sens contraire. Ainsi, l'angle BTP′ de Ptolémée (fig. 6), est l'angle tPS de Copernic; et l'angle TP′B de Ptolémée est l'angle StP de Copernic; on les aura donc par les mêmes formules.

27. Mais selon Tycho qui suivait en cela Ptolémée, le soleil aura été de S en S′; la planète aura décrit par son mouvement relatif l'angle $TS'P' = tSP$; la distance $S'P' = SP$: donc les triangles TS′P′ et tSP sont parfaitement égaux; S′T′P′ sera l'élongation, et P′ le lieu géocentrique de la planète dans le système de Tycho. Ainsi dans les trois systèmes, on a pour trouver l'élongation ou la différence entre le lieu du soleil et celui de la planète, et par conséquent la longitude géocentrique, à résoudre le même triangle; les trois systèmes représenteraient donc également bien les longitudes, si Ptolémée eût fait le mouvement relatif sur l'épicycle égal à la différence des mouvemens vrais; mais il la faisait égale à la différence des mouvemens moyens.

Prolongeons BT en TB′ indéfiniment (fig. 6), nous aurons $STB' = CTB =$ mouvement propre de la planète; mais STS′ est le mouvement du soleil; donc $B'TS' =$ mouvement ⊙ — mouv. planète = mouvement relatif $= O'BP'$; donc $B'TS' = O'BP'$, donc TS′ est parallèle à BP, et les triangles TS′P′, TBP′ forment un parallélogramme divisé en deux triangles égaux par la diagonale TP′ distance de la planète à la terre immobile.

Ptolémée prescrivait pour trouver le lieu du soleil, de mener TS′ parallèle au rayon BP′ de l'épicycle, précepte dont il ne donne aucune raison bien claire. Comme nous avons fait $BP' = TS = TS'$, si nous menons S′P′, elle sera égale et parallèle à BT; le triangle P′TS′ sera parfaitement égal et semblable au triangle B′P′T′; S′TP sera l'élongation; donc BP′T sera aussi l'élongation dont la tangente sera $= \frac{BT \sin B}{BT \cos B - BP}$, comme dans le système de Copernic : avec cette différence cependant que, dans tous ces calculs, Ptolémée employait le lieu moyen du soleil, au lieu que nous y employons le lieu vrai, autre imperfection de son système.

28. Ce n'est pas tout-à-fait ce qu'a imaginé Ptolémée. Comme rien ne lui donnait les valeurs absolues de BP', ni de BT, il a porté le point B beaucoup plus loin en B', sur le prolongement TB; il a de même prolongé TP' en P'', ensorte que B'P'' est parallèle à BP', et le rayon de l'épicycle augmenté en raison de la plus grande distance, ce qui ne change en rien les angles T, B', P''; B'P'' est toujours parallèle TS', mais ne lui est plus égal.

29. Nous avons déjà vu (22) qu'il avait rapproché de la terre les épicycles de Vénus et de Mercure (fig. 6) pour que ces deux épicycles ne se coupassent en aucun point; il a voulu de même que l'orbite de Mars fût éloignée de manière à ne jamais couper l'orbite du soleil.

Les épicycles de Mercure et de Vénus (fig. 6) étaient donc traversés par le rayon de l'orbite solaire, et placés l'un au-dessous de l'autre; ils étaient donc contenus dans l'orbite du soleil, ce qui pourrait être nécessaire, si les sphères des planètes étaient solides.

Au contraire, il avait placé l'épicycle de Mars extérieurement à l'orbite du soleil, sans dire précisément où était le centre C; mais avec cette attention que le rayon CB de l'épicycle fût les deux tiers de la distance CT, rayon de l'excentrique ou du déférent.

Ainsi pour Mars, $\frac{CT}{CB} = 1.52$, $CT = 1.52CB$; la distance périgée $CT - CB = 1.52CB - CB = 0.52CB > 0.52$; car en éloignant un peu Mars, il lui donnait un épicycle dont le rayon était un peu plus grand que celui de l'orbite terrestre.

La distance apogée était $CT + CB = 1{,}52CB + CB = 2{,}52CB$ plus grande par conséquent que la distance véritable 2,52.

30. S'il eût connu la planète Cérès, il eût été forcé de lui donner un épicycle $\frac{1}{2{,}7}$, il aurait fait la distance périgée un peu plus grande que

$$2{,}7 - \frac{1}{2{,}7} = \frac{2{,}7 \times 2{,}7 - 1}{2{,}7} = \frac{7{,}29 - 1}{2{,}7} = \frac{6{,}29}{2{,}7} = 2{,}39.$$

Il aurait fait la distance apogée plus grande que

$$2{,}7 + \frac{1}{2{,}7} = \frac{2{,}7 \times 2{,}7 + 1}{2{,}7} = \frac{7{,}29 + 1}{2{,}7} = \frac{8{,}29}{2{,}7} = 3{,}06.$$

Ainsi le périgée de Cérès eût pénétré dans l'orbite de Mars, qui s'étend au-delà de 2,52.

Il aurait pu mettre Cérès à la distance 3 de la terre, et vers 3,5 dans l'apogée.

Le rayon de l'épicycle est toujours $\frac{1}{a}$, a étant la distance moyenne; la différence entre la distance apogée et périgée est toujours $\frac{2}{a}$. Ainsi pour Pallas, Junon et Vesta, il aurait fallu des épicycles de $\frac{2}{2,7}$ environ $= \frac{1}{1,35} = 0,75$ environ. Ainsi Pallas eût passé 4,1, Junon 4,8, Vesta 5,8, ce qui eût forcé à reculer Jupiter dont la distance est 5,2, et dont l'épicycle devrait avoir 0,2 de rayon; Ptolémée aurait pu porter Jupiter à 6 au lieu de 5,2.

Il aurait pu rapprocher Saturne dont la distance est 9,5 et l'épicycle 0,11, et surtout Uranus dont la distance est 19,9, et l'épicycle serait 0,05. Il est vrai qu'à toutes ces distances il faut ajouter les excentricités des cercles déférens auxquelles est due la première inégalité de chaque planète.

31. Mais Ptolémée ne dit nulle part, et il n'avait aucun besoin de dire où étaient les centres des épicycles. Il supposait, sans en avoir aucune preuve, qu'ils étaient tous les uns au-dessus des autres, sans se toucher; et l'on peut mettre entre ces épicycles un espace arbitraire : il reste à voir ce qui résulterait pour les diamètres des altérations qu'auraient subies les distances.

En général, soit V la distance moyenne de la planète, v la distance moyenne de la terre; les diamètres doivent varier dans le rapport de

$$\frac{V+v}{V-v} = \frac{1+\frac{v}{V}}{1-\frac{v}{V}}.$$

Or Ptolémée a fort bien déterminé $\frac{v}{V}$ = rayon de l'épicycle, donc il connaissait bien le rapport $\frac{1+\frac{v}{V}}{1-\frac{v}{V}}$, et il aurait toujours trouvé les diamètres apparens conformes à sa théorie, s'il avait eu les moyens de mesurer ces diamètres. Cette démonstration n'est bonne, à la vérité, que

que pour les distances extrêmes. Mais soit δ le diamètre à la distance moyenne, le diamètre apparent sera

$$\frac{\delta}{TP} = \frac{\delta}{V\cos T + v\cos P} = \frac{\frac{\delta}{V}}{\cos T + \frac{v}{V}\cos P} = \frac{\frac{\delta}{V\cos T}}{1 + \frac{v}{V}\frac{\cos P}{\cos T}}.$$

On n'aura aucune idée du diamètre absolu, car on n'en aura aucune de la distance V, mais $\frac{\delta}{V}$ sera une constante, les rapports entre les angles ne changeront pas, $\frac{v}{V}$ étant bien connue.

32. Il suit de tout cela qu'en supposant les orbites circulaires, Ptolémée n'a fait que renverser en apparence le triangle entre les trois planètes; mais qu'en effet, il résout à sa manière le même triangle; que son opération est identique à la nôtre, qu'elle n'en diffère que parce que les procédés de la Trigonométrie des Grecs sont plus compliqués que ceux de la Trigonométrie moderne, et que les trois systèmes conduisent exactement aux mêmes résultats : de sorte que si l'on fait tourner le soleil autour de la terre, comme Tycho, la planète décrira l'épicycle qui lui est donnée par Ptolémée; que le lieu géocentrique sera toujours le même, pourvu qu'on laisse aux planètes leurs distances réelles, et qu'on fasse tous les épicycles égaux au rayon vecteur elliptique de celle des deux planètes qui est inférieure par rapport à l'autre. Ainsi pour Vénus et Mercure, le rayon de l'épicycle est le rayon vecteur de la planète; pour les autres, il est égal au rayon de l'orbite terrestre; mais on avouera qu'il est bien plus simple de tout laisser, comme Copernic et quelques anciens l'ont voulu.

33. Ainsi la même figure représente les trois systèmes. A l'opposition, les trois astres sont sur le rayon STO.

Copernic fait tout tourner autour du soleil, et quelque tems après l'opposition, ces astres forment le triangle StP, suivant Copernic; le triangle S'TP', suivant Tycho, et le triangle TBP', suivant Ptolémée: les deux premiers triangles ont leurs côtés égaux et parallèles; le troisième est le renversement du second, ou la seconde moitié du parallélogramme.

Suivant Copernic, la terre va de T en t, la planète de O en P,

l'angle tSP = mouv. terre — mouv. planète = S, la distance TO devient tP, l'angle STO, qui était 180°, devient StP.

Suivant Tycho, le soleil va de S en S', la terre demeurant immobile, et SS' = Tt, TS' est parallèle et égale à tS. La planète va de O en P'; parce que la distance S'P' étant égale à SO et le soleil ayant baissé, il faut que la planète baisse, et S'P' est égale et parallèle à SP; TP' est égale et parallèle à tP, les côtés étant égaux et parallèles dans les deux triangles, l'élongation S'TP' est égale à l'élongation StP.

Ptolémée suppose la planète P' sur un épicycle dont le centre est B, le rayon BP' devrait être = TS, CTB est le mouvement propre de la planète, ainsi TB est parallèle à SP, car l'angle PST est le mouvement propre de la planète, ainsi que CTB'. Ces deux angles sont donc égaux; le point O est porté en O'; mais la planète, par un mouvement rétrograde, a été sur son épicycle de O en P' avec son mouvement relatif; ainsi OBP' = tSP = S; BP' est égale et parallèle à tS; les triangles StP, BTP' ont donc deux angles égaux, donc aussi le troisième; tous les côtés des deux triangles sont parallèles chacun à chacun, et égaux chacun à chacun.

L'extrémité de P' et de SP', par le mouvement simultané du soleil et de la planète, selon Tycho, décrit réellement l'épicycle autour du centre mobile B.

54. Cette figure suppose le rayon de l'épicycle égal à la distance de la terre au soleil, ce que ne supposait pas Ptolémée; mais son système avait en cela besoin de correction pour satisfaire à l'observation des phases des planètes inférieures, et cette égalité est possible dans le système de Ptolémée, où les distances des planètes à la terre sont arbitraires.

Cette figure convient à toutes les planètes comparées deux à deux; on donne à la planète supérieure pour épicycle un cercle ou plutôt une ellipse qui est l'orbite de la planète inférieure, où l'on suppose l'observateur.

Cette figure représenterait les mouvemens de toutes les planètes vues de Mercure; de toutes les planètes, depuis la Terre jusqu'à Uranus, vues de Vénus; des planètes, depuis Mars jusqu'à Uranus, vues de la terre, etc.

Pour les planètes inférieures, vues d'une planète supérieure, on laisse à la planète son orbite elliptique, qui devient épicycle.

CHAPITRE XXIX.

Rotation des Planètes.

1. Il paraît infiniment problable que toutes les planètes tournent sur leur axe, en même tems qu'elles sont emportées autour du soleil dans leurs ellipses. Cette idée a été mise hors de doute d'abord pour le soleil, ensuite pour Vénus, Mars et Jupiter. On a depuis mesuré la rotation de Mercure et celle de Saturne; l'analogie porte à croire que la même chose a lieu pour les planètes, telles qu'Uranus, Cérès, Pallas, Junon et Vesta, que leur éloignement ou leur petitesse empêche de nous donner des preuves bien sensibles de ce mouvement; et cette loi générale de tous les corps qui composent le système solaire, ajoute encore à la probabilité qui nous fait donner à la terre un mouvement tout semblable.

2. Le moyen le plus général pour observer la rotation d'une planète est de chercher sur son disque un point bien remarquable. Si ce point est stationnaire, c'est-à-dire s'il occupe toujours la même place sur le disque, la même distance au centre ou aux bords, ou si cette distance ne change que lentement, et par l'aspect différent sous lequel la planète se montre à nous, par la combinaison de son mouvement avec celui de la terre, la planète ne tourne pas sur elle-même, ou du moins elle ne fait sa révolution qu'en un tems fort long. Mais si le point remarquable change rapidement de position par rapport au centre apparent, alors pour expliquer les phénomènes, il n'y a d'autres moyens que de supposer une rotation à la planète; la manière dont on calcule la rotation d'après le mouvement observé des taches, sera le sujet de ce chapitre.

3. Le soleil lui-même tourne sur son axe, et cette rotation, bien que l'une des plus lentes, est cependant la plus facile à déterminer, quoique ses taches ne soient pas constantes, et que leur forme irré-

gulière et variable, nuise beaucoup à l'exactitude des observations. Il est rare que le soleil soit sans taches, mais elles ne se voient guères qu'à l'aide de lunettes; on dut les apercevoir dès qu'on eut trouvé le moyen d'affaiblir l'éclat trop vif du soleil. La première découverte des taches a été réclamée par plusieurs astronomes; elle pouvait avoir alors quelque mérite; aujourd'hui il est impossible qu'elles ne frappent pas aussitôt l'observateur le plus novice et le plus inattentif.

Galilée vit les taches du soleil dans le mois d'avril 1611; Scheiner les observait au mois d'octobre de la même année; Fabricius les avait aperçues à peu près dans le même tems, et peut-être avant Scheiner.

On a dit qu'Harriot les avait vues plus anciennement encore; mais Scheiner est de tous les astronomes celui qui paraît les avoir observées le plus constamment; il en a fait la matière d'un volume de près de 800 pages. M. Messier les a suivies assidument pendant plusieurs années; aujourd'hui elles paraissent un peu négligées par les astronomes qui ont senti la difficulté d'ajouter aux connaissances acquises, quoique ces connaissances soient assez imparfaites; il est vrai qu'elles sont plus curieuses que vraiment utiles.

4. Les taches du soleil sont des parties noires et irrégulières qu'on aperçoit de tems en tems sur la surface du soleil. Y sont-elles adhérentes, ou flottent-elles sur l'Océan lumineux qu'on suppose recouvrir la sphère solide du soleil? Sont-elles des scories rejetées à la surface du liquide? sont-elles des rochers, des parties proéminentes du noyau? sont-elles élevées au-dessus ou abaissées au-dessous du niveau? enfin quelle est leur nature, c'est ce dont il est bien difficile de s'assurer. Si elles sont fixes, pourquoi ne les voit-on pas à toutes les révolutions du soleil et pendant toute la demi-durée? Sont-elles mobiles, alors pourquoi donnent-elles à peu près la même quantité pour les élémens de la rotation du soleil; c'est-à-dire la même position à l'axe autour duquel se fait cette révolution, la même distance de ces pôles à ceux de l'écliptique, la même inclinaison de l'équateur, les mêmes nœuds? Wilson en fait des espèces de cratères de volcans qui, lorsqu'ils sont en éruption, écartent le fluide lumineux, et laissent voir la partie solide et obscure. Voyez *Philosophical Transactions*, 1774.

Mais sans chercher la réponse à tant de questions insolubles jusqu'ici, voyons de quelle manière on observe les taches, et comment on en

déduit la position de l'équateur solaire, le tems de la rotation vraie et celui de la rotation apparente, pour un observateur placé sur la terre.

5. Une tache placée au milieu du disque solaire se voit dans sa forme naturelle, parce qu'elle est dans un plan ou une surface peu courbe et qui est perpendiculaire au rayon visuel. La même tache, arrivée par la rotation à l'un des bords du disque visible, est vue très-obliquement; elle perd beaucoup de sa largeur, sans rien perdre de sa hauteur. C'est ainsi que sur une mappe-monde, les méridiens voisins des bords paraissent plus rapprochés que ceux qui sont au milieu.

Ainsi, pour bien observer une tache pendant sa demi-révolution visible, il faudrait en observer les bords supérieurs et inférieurs, les bords précédens et suivans; mais la forme est non-seulement irrégulière, elle est de plus très-variable. Les taches sont plus ou moins noires, plus ou moins entre-mêlées de parties moins obscures, les bords sont mal terminés et changeans; on est réduit souvent à observer le centre de figure, et ce centre n'est pas toujours le même.

6. Outre les taches proprement dites, on remarquera aussi sur le soleil des points plus lumineux que le reste du disque; on les appelle *facules, faculæ, luculi;* au reste, ce que nous disons des taches, s'applique de même aux facules; la couleur ne change rien ni aux observations, ni aux calculs. On a remarqué plusieurs fois que l'apparition de ces facules précédait ordinairement celle des taches obscures.

7. Pour déterminer le lieu d'une tache, on prend la différence en ascension droite et en déclinaison avec l'un des bords ou tous deux; on en conclut la distance du centre de la tache au centre du soleil, et par suite la position de la tache par rapport à l'écliptique, sa longitude et sa latitude.

Ces taches s'observent ainsi de toutes les manières que nous avons exposées pour Vénus et Mercure dans leurs passages sur le soleil. Une tache est pour nous comme une planète près de sa conjonction inférieure; à moins que d'être fort voisines des pôles, elles seront toujours rétrogrades, parce que le soleil tourne dans le même sens que les planètes, d'occident en orient, ou selon l'ordre des signes : comme les planètes, elles ne paraissent se mouvoir que de leur mouvement relatif.

8. Soit S (fig. 7) le centre du soleil, T la terre, M une tache à la surface du soleil et dans l'écliptique ou tont près de ce cercle. Pendant que la terre va de T en t, la tache avance d'un mouvement plus rapide de M en m : si la terre fût restée immobile, la tache arrivée en m eût paru en conjonction ; mais la terre s'étant avancée en t, l'angle au soleil qui était MST, est devenu mSt; il a diminué de l'arc Mm et augmenté de me, ou diminué de $(Mm - me)$.

Nous n'observerons d'une conjonction à l'autre, que la révolution synodique, tonjours plus longue que la révolution ; mais l'usage n'est pas d'observer les conjonctions ; on détermine directement la rotation, comme nous le verrons bientôt.

9. Le cercle Mme que décrit la tache, peut être regardé comme l'orbite d'une planète inférieure ; mais si les taches sont adhérentes à la surface, le mouvement n'est pas propre à la tache; il appartient au corps entier du soleil, et c'est ce qne nous supposerons dans tout ce qui va suivre ; si les taches n'étaient pas adhérentes au moins sensiblement et pour un tems, leurs révolutions seraient inégales ; elles seraient de petites planètes qui circuleraient tont près du soleil, et dont les révolutions seraient entre elles comme les puissances $\frac{3}{2}$ de leurs distances. Il faudrait donc supposer toutes ces distances égales, ou à très-peu près : toutes ces orbites auraient même inclinaison et mêmes nœuds ; mais ces taches décrivent des cercles plus ou moins grands ; tous ces cercles sont des parallèles également inclinés à l'écliptique, que plusieurs n'atteignent pas ; ainsi il n'est guères possible de douter qu'elles tiennent au soleil.

10. Soit OEL (fig. 8) le disque visible du soleil, EQ l'équateur ou le parallèle qui marque la déclinaison du soleil, OL le cercle de déclinaison qui passe par le centre S, t une tache. Vons observerez l'instant où la tache est sous le fil de la lunette, vous observez de même l'instant où le bord précédent et suivant du soleil est sous le fil ; la différence des tems vous donne l'angle au pôle P entre la tache et le bord voisin du soleil ou l'angle aPb, et cet angle est exprimé en tems. Vous connaissez chaque jour le tems que le demi-diamètre emploie à traverser le méridien, c'est-à-dire l'angle SPb; vous connaissez donc l'angle SPa.

La différence des distances au zénit entre le bord ☉ et la tache t, vous donne OC, et par suite $SC = OS - OC$, ou $at = Pt - Pa = Pt - PS$;

vous aurez alors

$$Sa = SPa \sin PS = 15\,(\text{tems de } SPa) \cos \text{déclin.} \odot,$$
$$\tang x = \tang tSa = \frac{at}{Sa}, \qquad St = \frac{Sa}{\cos tSa} = \frac{d\mathrm{AR} \cos D}{\cos tSa}.$$

11. Soit SC′ l'écliptique, on aura

$$\tang y = \tang C'SQ = \cos \odot \tang \omega; \quad tSC' = x - y.$$

Soit S′ (fig. 9) le centre vrai du soleil, S le milieu de son disque visible de la terre en T; il s'agit de déterminer l'angle TS′t. Or on a

$$S't : \sin T :: S'T : \sin S'tu = \sin(S'+T) = \frac{S'T}{S't} \sin T = \frac{R \sin T}{R \sin \delta} = \frac{\sin T}{\sin \delta},$$

δ étant le demi-diamètre apparent et R la distance du soleil; ensuite on a

$$S' = (S'+T) - T.$$

L'arc St peut valoir jusqu'à près de 90°, et de la terre, ces 90° ne soutendent qu'un angle de 16′ = 960″; les angles héliocentriques peuvent donc être aux angles géocentriques :: 324000 : 960 :: 337,5 : 1. Ainsi une seconde dont il est si difficile de s'assurer, vaut au moins 5′ 37″,5; il ne faut donc pas espérer de connaître avec précision les angles héliocentriques; on peut très-bien s'y tromper de 10′ et souvent davantage; et c'est ce qui explique le peu d'accord des observations.

12. L'irradiation, si elle existe, ce dont on commence à douter, pourrait produire une erreur de près de 18′ pour une tache qui serait près du bord, environ une minute pour chaque minute de l'arc St.

Personne que je sache n'a parlé de cet effet de l'irradiation : il est vrai qu'on ne doit pas s'en embarrasser dans le calcul du lieu géocentrique; mais pour en conclure le lieu héliocentrique, il faut employer le demi-diamètre réel du soleil, et non pas le demi-diamètre, tel qu'il paraît dans nos yeux par l'effet de l'irradiation.

Nous connaissons l'arc St (10), c'est la distance héliocentrique angulaire de la tache et de la terre; et nous avons la longitude héliocentrique de la terre = longit. S.

Nous connaissons l'angle $x = tSa$, dont la tangente $= \frac{dD}{d\mathrm{AR} \cos D}$; nous

connaissons l'angle $dSa = y$, car $\tang y = \tang \omega \cos \odot$ (11); nous aurons $\tang Sd = \cos(x - y) \tang St$, longit. hélioc. de la terre $= ♉ - Sd$, $\sin td = \sin St \sin(x - y) = $ sin latitude. On observera la règle des signes pour tous ces arcs, Sd s'ajouterait à $180° + \odot$, si la tache passait au méridien avant le centre du soleil.

Il est aisé de voir que les angles tSd, dSa et tSa sont les mêmes pour le soleil et la terre, car ils sont formés par les tangentes au point d'intersection S, et ces tangentes sont perpendiculaires au rayon visuel qui va du centre de la terre au centre du soleil.

13. La parallaxe du soleil n'altère pas sensiblement l'exactitude des calculs, car la parallaxe du soleil ne pouvant varier que de 0″,04 pour 16′ de différence dans la hauteur, si la parallaxe change pour nous le point milieu du disque, si ce point est réellement quelques secondes au-dessus de l'écliptique, la tache sera élevée de la même quantité, et la position relative n'en sera point affectée. Il en est de même pour la réfraction, quand le soleil n'est pas trop voisin de l'horizon.

14. Nous aurons donc par ce moyen autant de longitudes et de latitudes héliocentriques que nous aurons d'observations. Nous allons nous en servir pour calculer la position du pôle de rotation, la distance de ce pôle à l'écliptique, ou l'inclinaison de l'équateur solaire, les nœuds de cet équateur, la déclinaison de la tache, et la durée de la révolution absolue et relative ou synodique.

Méthode trigonométrique.

15. Soit P le pôle de rotation (fig. 10); A, B et C les trois positions de la tache; menez PA, PB, PC. Ces trois distances au pôle sont égales; nommez-les Δ.

Du pôle E de l'écliptique, menez les cercles de latitude EA, EB, EC; nommez-les Δ', Δ'' et Δ'''. Vous aurez de plus $AEB = L'' - L'$; $BEC = L''' - L''$, $AEC = L''' - L'$, les L indiquent les longitudes héliocentriques.

Les trois triangles EAB, EBC et EAC sont entièrement connus, car on a les trois angles en E et les côtés qui les comprennent; on peut calculer tout le reste par diverses méthodes; mais on n'obtiendra encore que les bases des trois triangles isoscèles, ce qui ne suffit pas.

16.

16. Sur le milieu de ces bases, abaissez les perpendiculaires Pm et Pn, et menez l'arc mn. Alors dans ce triangle, nous aurons

$$mB = \tfrac{1}{2}\,AB,\quad nB = \tfrac{1}{2}\,BC,\quad mBn = EBA + EBC;$$

nous calculerons les angles Bmn, Bnm, et le côté mn.

Daus le triangle mPn, nous connaîtrons

$$Pmn = 90° - Bmn,\quad Pnm = 90° - Bnm,$$

et la base mn; nous pourrous calculer Pm et Pn, ainsi que l'angle mP$n = \frac{1}{2}$ APC.

17. Nous aurons le mouvement diurne de rotation $= M = \frac{APC}{T''-T'}$, APC : 360° :: (T'''—T') : R = révolution; T', T'' et T''' étant les instans des observations; alors $\frac{360°}{M} = R =$ révolution. De M retranchez le mouvement diurne de la terre, ou $59'\,8'',33 = 59',139 = 0°,98567$,

$$\frac{360°}{M - 0°,9857} = R',$$

R' sera la révolution synodique. M doit être exprimé en degrés et décimales de degré.

Nous aurons

$$\cos PB = \cos \Delta = \cos Pm \cos Bm = \cos Pn \cos Bn;$$

$90° - \Delta$ sera la déclinaison de la tache.

$$\text{tang PAB} = \text{tang PBA} = \frac{\text{tang } Pm}{\sin Bm};$$

$$\text{tang PBC} = \text{tang PCB} = \frac{\text{tang } Pn}{\sin Bn};$$

$$PAE = p' = PAB - EAB;$$

$$p'' = PBE = PBC - EBC;$$

$$p''' = PCE = ECB - PCB = ECB - PBC.$$

Nous aurons le choix entre les trois triangles APE, BPE, CPE pour calculer l'inclinaison PE, et l'angle en E entre le pôle et l'une quelconque des trois longitudes. Par là nous obtiendrons

$$\Omega = 90° + L' - PEA = 90° + L'' - PEB = 90° + L''' - PEC,$$

et le problème sera entièrement résolu.

18. Cette méthode n'emploie que la trigonométrie sphérique; elle est la plus claire et la plus facile à imaginer. Je m'étonnais qu'elle n'eût été indiquée nulle part, mais je l'ai trouvée depuis dans le tome V des Œuvres de Boscovich; il n'en fait aucune application, sans doute parce qu'elle est fort longue. Pour l'abréger autant qu'il est possible, et la rendre plus uniforme, nous changerons les formules de Boscovich; nous n'emploierons pour tous les triangles obliquangles, que les formules de Néper. Pour les triangles rectangles, nous nous servirons des formules les plus ordinaires; par ce moyen, nous réduirons sa solution aux formules suivantes,

19. Soit

$$\text{tang } x' = \frac{\cot \frac{1}{2} (L'' - L') \cos \frac{1}{2} (\Delta' - \Delta'')}{\cos \frac{1}{2} (\Delta' + \Delta'')};$$

$$\text{tang } y' = \frac{\cot \frac{1}{2} (L'' - L') \sin \frac{1}{2} (\Delta' - \Delta'')}{\sin \frac{1}{2} (\Delta' + \Delta'')};$$

$$A' = x' - y'; \quad B' = x' + y';$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} K' = \frac{\text{tang } \frac{1}{2} (\Delta' + \Delta'') \cos x'}{\cos y'};$$

A' sera l'angle à la première position de la tache; B' l'angle à la seconde position; K' l'arc AB qui joint ces deux points.

$$\text{tang } x'' = \frac{\cot \frac{1}{2} (L''' - L'') \cos \frac{1}{2} (\Delta'' - \Delta''')}{\cos \frac{1}{2} (\Delta'' + \Delta''')},$$

$$\text{tang } y'' = \frac{\cot \frac{1}{2} (L''' - L'') \sin \frac{1}{2} (\Delta'' - \Delta''')}{\sin \frac{1}{2} (\Delta'' + \Delta''')},$$

$$B'' = x'' - y'', \quad C' = x'' + y'',$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} K'' = \frac{\text{tang } \frac{1}{2} (\Delta'' + \Delta''') \cos x''}{\cos y''};$$

B'' sera le second angle à la seconde position, et C' l'angle à la troisième; K'' sera l'arc BC qui joint ces deux positions.

$$\text{tang } x''' = \frac{\cot \frac{1}{2} (B' + B'') \cos \frac{1}{2} (K' - K'')}{\cos \frac{1}{2} (K' + K'')},$$

$$\text{tang } y''' = \frac{\cot \frac{1}{2} (B' + B'') \sin \frac{1}{2} (K' - K'')}{\sin \frac{1}{2} (K' + K'')},$$

$$m = x''' - y''', \quad n = x''' + y'',$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} K''' = \frac{\text{tang } \frac{1}{2} (K' + K'') \cos x''}{\cos y''}.$$

K''' sera l'arc *mn* qui joint les pieds des deux perpendiculaires.

$$\tang x^{\text{iv}} = \frac{\tang \frac{1}{2} \text{K}'' \cos y''}{\sin x''},$$

$$\tang y^{\text{iv}} = \frac{\tang \frac{1}{2} \text{K}'' \sin y''}{\cos x''},$$

$$\text{P}m = x^{\text{iv}} - y^{\text{iv}}, \quad \text{P}n = x^{\text{iv}} + y^{\text{iv}},$$

$$\cot \tfrac{1}{2} \text{P}' = \frac{\cot x'' \cos x^{\text{iv}}}{\cos y^{\text{iv}}};$$

P' sera l'angle $m\text{P}n$; $2\text{P}' = \text{APC}$,

T', T'', T''' sont les temps moyens des trois observations.

Soit M le mouvement diurne de rotation,

$$\text{M} = \frac{2\text{P}'}{\text{T}''' - \text{T}'}, \quad \text{R} = \frac{360°}{\text{M}}, \quad \text{R}' = \frac{360°}{\text{M} - 0.9857},$$

$$\cos \Delta = \sin \text{D} = \cos \tfrac{1}{2} \text{K}' \cos (x^{\text{iv}} - y^{\text{iv}}) = \cos \tfrac{1}{2} \text{K}'' \cos (x^{\text{iv}} + y^{\text{iv}}),$$

$$\tang \text{A}'' = \frac{\tang (x^{\text{iv}} - y^{\text{iv}})}{\sin \frac{1}{2} \text{K}'}, \quad \tang \text{C}'' = \frac{\tang (x^{\text{iv}} + y^{\text{iv}})}{\sin \frac{1}{2} \text{K}''}:$$

Il suffit de l'une de ces deux formules.

$$p' = \text{A}'' - \text{A}', \quad p'' = \text{C}'' - \text{B}'', \quad p''' = \text{C}' - \text{C}'',$$

$$\tang x^{\text{v}} = \frac{\cot \frac{1}{2} p' \cos \frac{1}{2} (\Delta' - \Delta)}{\cos \frac{1}{2} (\Delta' + \Delta)}, \quad \tang y^{\text{v}} = \frac{\cot \frac{1}{2} p' \sin \frac{1}{2} (\Delta' - \Delta)}{\sin \frac{1}{2} (\Delta' + \Delta)},$$

$$\tang \tfrac{1}{2} \text{I} = \frac{\tang \frac{1}{2} (\Delta' + \Delta) \cos x^{\text{v}}}{\cos y^{\text{v}}}, \qquad \Omega = 90° + \text{L}' - (x^{\text{v}} - y^{\text{v}}).$$

Au lieu de p' et Δ', on peut mettre p'', Δ'' et L'', ou p''', Δ''' et L'''; on arrivera aux mêmes résultats. Cette solution exige la recherche de 62 logarithmes en tout; mais elle est très-exacte, et sa marche très-uniforme.

20. On peut se passer du petit triangle $m\text{B}n$ de la manière suivante.

Méthode trigonométrique abrégée.

21. Calculez comme ci-dessus x', y', $\frac{1}{2}$K', A', B'; x'', y'', $\frac{1}{2}$K'', B'' et C', ou bien x''', y''', $\frac{1}{2}$K''', A'' et C'' du triangle EAC. Cela posé, il est aisé de remarquer que chacune des trois distances de la tache à son pôle, est

le côté commun de deux triangles isoscèles ; on aura donc

$$\text{tang PA} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{AB}}{\cos \text{PAB}} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{AC}}{\cos \text{PAC}},$$

d'où

$$\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{AB}}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{AC}} = \frac{\cos \text{PAB}}{\cos \text{PAC}} = \frac{\cos(\text{PAE}+\text{EAB})}{\cos(\text{PAE}+\text{EAC})};$$

$$\text{tang PB} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{AB}}{\cos \text{PBA}} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{BC}}{\cos \text{PBC}},$$

d'où

$$\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{AB}}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{BC}} = \frac{\cos \text{PBA}}{\cos \text{PBC}} = \frac{\cos(\text{EBA}-\text{PBE})}{\cos(\text{EBC}+\text{PBE})};$$

$$\text{tang PC} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{BC}}{\cos \text{PCB}} = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{AC}}{\cos \text{PCA}},$$

d'où

$$\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{BC}}{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{AC}} = \frac{\cos \text{PCB}}{\cos \text{PCA}} = \frac{\cos(\text{ECB}-\text{PCE})}{\cos(\text{ECA}-\text{PCE})}.$$

Chacune de ces dernières formules ne renferme plus qu'une inconnue facile à dégager. Ainsi

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\text{AB}\cot\tfrac{1}{2}\,\text{AC} = \frac{\cos \text{PAE} \cos \text{EAB} - \sin \text{PAE} \sin \text{EAB}}{\cos \text{PAE} \cos \text{EAC} - \sin \text{PAE} \sin \text{EAC}}$$

$$= \frac{\cos \text{EAB} - \sin \text{EAB}\,\text{tang PAE}}{\cos \text{EAC} - \sin \text{EAC}\,\text{tang PAE}},$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\text{AB}\cot\tfrac{1}{2}\,\text{AC}\cos \text{EAC} - \sin \text{EAC}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\text{AB}\cot\tfrac{1}{2}\,\text{AC}\,\text{tang PAE}$$
$$= \cos \text{EAB} - \sin \text{EAB}\,\text{tang PAE},$$

$$\sin \text{EAB}\,\text{tang PAE} - \sin \text{EAC}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\text{AB}\cot\tfrac{1}{2}\,\text{AC}\,\text{tang PAE}$$
$$= \cos \text{EAB} - \cos \text{EAC}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\text{AB}\cot\tfrac{1}{2}\,\text{AC},$$

$$\text{tang PAE} = \frac{\cos \text{EAB} - \cos \text{EAC}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{AB}\cot\frac{1}{2}\,\text{AC}}{\sin \text{EAB} - \sin \text{EAC}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{AB}\cot\frac{1}{2}\,\text{AC}}$$

$$= \frac{\cos \text{EAB}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{AC} - \cos \text{EAC}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{AB}}{\sin \text{EAB}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{AC} - \sin \text{EAC}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{AB}}$$

$$= \frac{\cot \text{EAB} - \dfrac{\cos \text{EAC}}{\sin \text{EAB}}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{AB}\cot\frac{1}{2}\,\text{AC}}{1 - \dfrac{\cos \text{EAC}}{\sin \text{EAB}}\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\text{AB}\cot\frac{1}{2}\,\text{AC}\,\text{tang EAC}} = \frac{\cot \text{EAB} - \cot \omega'}{1 - \cot \omega'\,\text{tang EAC}}$$

$$= \frac{\sin(\omega' - \text{EAB})}{\sin \omega' \sin \text{EAB}\,(1 - \cot \omega'\,\text{tang EAC})}$$

$$= \frac{\sin(\omega' - \text{EAB}) \sin \omega' \cos \text{EAC}}{\sin \omega' \sin \text{EAB}\,(\sin \omega' \cos \text{EAC} - \cos \omega' \sin \text{EAC})}$$

$$= \frac{\cos \text{EAC} \sin(\omega' - \text{EAB})}{\sin \text{EAB} \sin(\omega' - \text{EAC})}.$$

Si $\cos \mathrm{EAB} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{AC} = \cos \mathrm{EAC} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{AB}$, on aura $p' = 0$. Longit. pôle = longit. A.

Si la valeur de $\operatorname{tang} p'$ était négative, p' serait négatif.

Ainsi en faisant

$$\operatorname{tang} x''' = \frac{\cot \frac{1}{2} (\mathrm{L}'' - \mathrm{L}') \cos \frac{1}{2} (\Delta' - \Delta'')}{\cos \frac{1}{2} (\Delta' + \Delta'')},$$

$$\operatorname{tang} y''' = \frac{\cot \frac{1}{2} (\mathrm{L}'' - \mathrm{L}') \sin \frac{1}{2} (\Delta' - \Delta'')}{\sin \frac{1}{2} (\Delta' + \Delta'')},$$

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \mathrm{K}''' = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} (\Delta' + \Delta'') \cos x''}{\cos y''},$$

et

$$\cot \omega' = \frac{\cos (x'' - y'') \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{K}' \cot \frac{1}{2} \mathrm{K}''}{\sin (x' - y')},$$

$$\operatorname{tang} p' = \frac{\cos (x'' - y'') \sin (\omega' - x' + y')}{\sin (x' - y') \sin (\omega' - x'' + y'')}.$$

22. Par des développemens semblables, nous aurons

$$\operatorname{tang} \mathrm{PBE} = \frac{\cos \mathrm{EBC} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{AB} - \cos \mathrm{EBA} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{BC}}{\sin \mathrm{EBC} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{AB} + \sin \mathrm{EBA} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{BC}},$$

ou

$$\operatorname{tang} \mathrm{PBE} = \frac{\cot \mathrm{EBC} - \frac{\cos \mathrm{EBA}}{\sin \mathrm{EBC}} \cot \frac{1}{2} \mathrm{AB} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{BC}}{1 + \frac{\cos \mathrm{EBA}}{\sin \mathrm{EBC}} \cot \frac{1}{2} \mathrm{AB} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{BC} \operatorname{tang} \mathrm{EBA}}$$

$$= \frac{\cot \mathrm{EBC} - \cot \omega''}{1 + \cot \omega'' \operatorname{tang} \mathrm{EBA}} = \frac{\cos \mathrm{EBA} \sin (\omega'' - \mathrm{EBC})}{\sin \mathrm{EBC} \sin (\omega'' + \mathrm{EBA})},$$

$$\operatorname{tang} p'' = \frac{\cos (x' + y') \sin (\omega'' - x'' + y'')}{\sin (x'' - y'') \sin (\omega'' + x' + y')}.$$

En faisant

$$\cot \omega'' = \frac{\cos (x' + y') \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{K}'' \cot \frac{1}{2} \mathrm{K}'}{\sin (x'' - y'')}.$$

Enfin,

$$\operatorname{tang} \mathrm{PCE} = \frac{\cos \mathrm{ECA} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{BC} - \cos \mathrm{ECB} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{AC}}{-\sin \mathrm{ECA} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{BC} + \sin \mathrm{ECB} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{AC}}$$

$$= \frac{\cot \mathrm{ECA} - \frac{\cos \mathrm{ECB}}{\sin \mathrm{ECA}} \cot \frac{1}{2} \mathrm{BC} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{AC}}{-1 + \frac{\sin \mathrm{ECB}}{\sin \mathrm{ECA}} \cot \frac{1}{2} \mathrm{BC} \operatorname{tang} \frac{1}{2} \mathrm{AC}}$$

$$= \frac{\cos \mathrm{ECB} \sin (\omega'' - \mathrm{ECA})}{\sin \mathrm{ECA} \sin (\mathrm{ECB} - \omega'')},$$

ou

$$\operatorname{tang} p''' = \frac{\cos (x'' + y'') \sin (\omega'' - x'' - y'')}{\sin (x'' + y'') \sin (x'' + y'' - \omega'')},$$

en faisant

$$\cot \omega''' = \frac{\cos(x'' + y'') \cot \frac{1}{2} K'' \tang \frac{1}{2} K''}{\sin(x'' + y'')}.$$

Connaissant ainsi les angles de position, nous aurions

$$PAB = PBA, \quad PBC = PCB, \quad PAC = PCA.$$

23. Nous aurions pour déterminer Δ, les six équations suivantes :

$$\tang \Delta = \frac{\tang \frac{1}{2} AB}{\cos(p' + EAB)} = \frac{\tang \frac{1}{2} AC}{\cos(p' + EAC)}$$
$$\tang \Delta = \frac{\tang \frac{1}{2} AB}{\cos(EBA - p'')} = \frac{\tang \frac{1}{2} BC}{\cos(p'' + EBC)},$$
$$\tang \Delta = \frac{\tang \frac{1}{2} BC}{\cos(ECB - p''')} = \frac{\tang \frac{1}{2} AC}{\cos(ECA - p''')},$$

$$\cos \tfrac{1}{2} BPA = \cos \tfrac{1}{2} AB \sin(p' + EAB) = \cos \tfrac{1}{2} AB \sin(EBA - p''),$$
$$\cos \tfrac{1}{2} BPC = \cos \tfrac{1}{2} BC \sin(p'' + EBC) = \cos \tfrac{1}{2} BC \sin(ECB - p'''),$$
$$\cos \tfrac{1}{2} APC = \cos \tfrac{1}{2} AC \sin(p' + EAC) = \cos \tfrac{1}{2} AC \sin(ECA - p''');$$

l'une de ces équations nous met en état de calculer la rotation.

24. On peut encore trouver les trois p d'une manière plus courte, et sans calcul.

$$\tang \tfrac{1}{2} AC : \tang \tfrac{1}{2} AB :: \cos(PAE + EAC) : \cos(PAE + EAB) \; (21),$$
$$\tang \tfrac{1}{2} AC + \tang \tfrac{1}{2} AB : \tang \tfrac{1}{2} AC - \tang \tfrac{1}{2} AB :: \cos(PAE + EAC)$$
$$+ \cos(PAE + EAB) : \cos(PAE + EAC) - \cos(PAE + EAB),$$
$$\sin \tfrac{1}{2}(AC + AB) : \sin \tfrac{1}{2}(AC - AB)$$
$$:: 2\cos \tfrac{1}{2}(PAE + EAB + PAE + EAC) \cos \tfrac{1}{2}(PAE + EAB - PAE - EAC)$$
$$: 2 \sin \tfrac{1}{2}(PAE + EAB - PAE - EAC) \sin \tfrac{1}{2}(PAE + EAC + PAE + EAB)$$
$$:: \cos\left(\frac{EAB + EAC}{2} + PAE\right) \cos \tfrac{1}{2}(EAB - EAC)$$
$$: \sin \tfrac{1}{2}(EAB - EAC) \sin\left(\frac{EAB + EAC}{2} + PAE\right)$$
$$:: 1 : \tang \tfrac{1}{2}(EAB - EAC) \tang\left(\frac{EAB + EAC}{2} + PAE\right),$$

$$\tang\left(\frac{EAB + EAC}{2} + PAE\right) = \frac{\sin \frac{1}{2}(AC - AB) \cot \frac{1}{2}(EAB - EAC)}{\sin \frac{1}{2}(AC + AB)}.$$

Or $$\frac{\sin\frac{1}{2}(AC-AB)\cot\frac{1}{2}(EAB-EAC)}{\sin\frac{1}{2}(AC+AB)}=\frac{\sin\frac{1}{2}(AC-AB)\cot\frac{1}{2}BAC}{\sin\frac{1}{2}(AC+AB)}$$
$$=\tang\tfrac{1}{2}(ABC-ACB);$$

donc

$$\frac{EAB+EAC}{2}+PAE=\tfrac{1}{2}(ABC-ACB)=\tfrac{1}{2}EBA+\tfrac{1}{2}EBC-\tfrac{1}{2}ECB+\tfrac{1}{2}ECA,$$

donc $PAE=\frac{1}{2}EBA-\frac{1}{2}EAB+\frac{1}{2}ECA-\frac{1}{2}EAC-\frac{1}{2}ECB+EBC$

$$p'=\tfrac{1}{2}(EBA-EAB)+\tfrac{1}{2}(ECA-EAC)-\tfrac{1}{2}(ECB-EBC).$$

La seconde équation (21) donnera, par des développemens semblables,

$$p''=PBE=\tfrac{1}{2}(ECB-EBC)+\tfrac{1}{2}(EBA-EAB)-\tfrac{1}{2}(ECA-EAC).$$

La troisième équation (21) donnera de même

$$p'''=PCE=\tfrac{1}{2}(ECB-EBC)+\tfrac{1}{2}(ECA-EAC)-\tfrac{1}{2}(EBA-EAB).$$

Ces trois valeurs sont celles auxquelles Cagnoli est parvenu par une voie différente (32); alors

$$\tang\Delta=\frac{\tang\frac{1}{2}K'}{\cos(A'+p')}=\frac{\tang\frac{1}{2}K'''}{\cos(A''+p')}=\frac{\tang\frac{1}{2}K'}{\cos(B'-p'')}=\frac{\tang\frac{1}{2}K''}{\cos(B''+p'')}$$
$$=\frac{\tang\frac{1}{2}K'''}{\cos(C''-p''')}=\frac{\tang\frac{1}{2}K''}{\cos(C'-p''')}.$$

Faites ensuite

$$\sin\tfrac{1}{2}APC=\frac{\sin\frac{1}{2}K'''}{\sin\Delta},$$
$$\sin\tfrac{1}{2}APB=\frac{\sin\frac{1}{2}K'}{\sin\Delta},$$
$$\sin\tfrac{1}{2}PBC=\frac{\sin\frac{1}{2}K''}{\sin\Delta},$$

et vous aurez la rotation.

Ces deux méthodes ne diffèrent que par la manière dont on y calcule les angles p et les angles au pôle de rotation. Suivant la première, il faut chercher 52 logarithmes; suivant l'autre, il n'en faut que 41. L'une et l'autre fournit de nombreux moyens de vérification.

Méthode de Pézénas.

25. $\cos AB=\cos AEB\sin EA\sin EB+\cos EA\cos EB$ (*fig.* 10)

$$=\cos(EA-EB)-2\sin\tfrac{1}{2}AEB\sin EA\sin EB,$$
$$1-2\sin^2\tfrac{1}{2}AB=1-2\sin^2\tfrac{1}{2}(EA-EB)-2\sin^2\tfrac{1}{2}AEB\sin EA\sin EB,$$
$$\sin^2\tfrac{1}{2}AB=\sin^2\tfrac{1}{2}(EA-EB)+\sin^2\tfrac{1}{2}AEB\sin E\sin EB$$
$$=\sin^2\tfrac{1}{2}(EA-EB)\left(1+\frac{\sin^2\frac{1}{2}AEB\sin E\sin EB}{\sin^2\frac{1}{2}(EA-EB)}\right).$$

Ainsi soit

$$\text{tang}\, x' = \frac{\sin\frac{1}{2}(L''-L')}{\sin\frac{1}{2}(\Delta'-\Delta'')}\sqrt{\sin\Delta'\sin\Delta''}, \quad \sin\tfrac{1}{2}K' = \frac{\sin\frac{1}{2}(\Delta'-\Delta'')}{\cos x'},$$

$$\text{tang}\, x'' = \frac{\sin\frac{1}{2}(L'''-L'')}{\sin\frac{1}{2}(\Delta''-\Delta''')}\sqrt{\sin\Delta''\sin\Delta'''}, \quad \sin\tfrac{1}{2}K'' = \frac{\sin\frac{1}{2}(\Delta''-\Delta''')}{\cos x''},$$

$$\text{tang}\, x''' = \frac{\sin\frac{1}{2}(L'''-L')}{\sin\frac{1}{2}(\Delta'-\Delta''')}\sqrt{\sin\Delta'\sin\Delta'''}, \quad \sin\tfrac{1}{2}K''' = \frac{\sin\frac{1}{2}(\Delta'-\Delta''')}{\cos x'''},$$

18 log différens pour avoir les trois sinus naturels.

$$\sin^2\tfrac{1}{2}y = \frac{\left(\frac{\sin\frac{1}{2}K'+\sin\frac{1}{2}K''+\sin\frac{1}{2}K'''}{2}-\sin\frac{1}{2}K'\right)\left(\frac{\sin\frac{1}{2}K'+\sin\frac{1}{2}K''+\sin\frac{1}{2}K'''}{2}-\sin\frac{1}{2}K''\right)}{\sin\frac{1}{2}K'\sin\frac{1}{2}K''};$$

3 log pour arriver à y; 1 pour

$$\sin\Delta = r = \frac{\sin\frac{1}{2}AC}{\sin\frac{1}{2}AKC} = \frac{\sin\frac{1}{2}AC}{\sin\frac{1}{2}AEC} = \frac{\sin\frac{1}{2}K'''}{\sin y} \text{ (fig. 11).}$$

Dans le triangle APC, vous aurez

$$APC = 360° - 2y;$$

vous aurez R et R′ comme ci-dessus par 7 logarithmes. Dans l'un des triangles isoscèles, vous calculerez l'angle à la base par l'une des formules

$$\cos PAB = \text{tang}\tfrac{1}{2}K'\cot\Delta, \quad \cos PBC = \text{tang}\tfrac{1}{2}K''\cot\Delta,$$
$$\cos PAC = \text{tang}\tfrac{1}{2}K'''\cot\Delta \text{............. 3log.}$$

$$\sin EAC = \frac{\sin(L'''-L')\sin\Delta'''}{\sin K'''}, \quad \sin EAB = \frac{\sin(L''-L)\sin\Delta''}{\sin K'},$$

$$\sin ECA = \frac{\sin(L'''-L')\sin\Delta'}{\sin K'''}; \quad \sin EBA = \frac{\sin(L''-L')\sin\Delta'}{\sin K'},$$

$$\sin EBC = \frac{\sin(L'''-L'')\sin\Delta'''}{\sin K''}, \quad \sin ECB = \frac{\sin(L'''-L'')\sin\Delta''}{\sin K''},$$

vous en conclurez l'un des p, comme ci-dessus............. 3 log.

Alors dans un des triangles PAE, PBE, PCE, vous calculerez PE et PAE, PEB ou PEC.............................. 11 log

et le problème sera résolu entièrement par la recherche de..... 46 log.

26. Le seul défaut de cette méthode, c'est qu'elle ne donne pas Δ assez exactement par son sinus, quand Δ approche de 90°. On pourrait changer cette

cette partie de la solution, en faisant

$$\cos \tfrac{1}{2} K''' \sin PAC = \cos \tfrac{1}{2} APC ,$$

ou $$\sin PAC = \frac{\cos \frac{1}{2} APC}{\cos \frac{1}{2} K''} \quad \text{et} \quad \tang \Delta = \frac{\tang \frac{1}{2} K''}{\cos PAC} ;$$

mais PAC pourrait fort bien être un peu incertain, car il doit différer peu d'un angle droit.

Voici une solution qui est encore plus courte, mais qui a le même défaut; au reste, la déclinaison est de tous les élémens le moins important, et quand on s'y tromperait de quelques minutes, le mal ne serait pas grand.

Méthode de Boscovich.

27. Cette méthode peut se ramener tout entière à la trigonométrie plane, en changeant les formules de l'auteur, et en y ajoutant même celles qui déterminent la déclinaison dont il n'a point parlé, quoiqu'elle soit indispensable pour démontrer l'identité d'une tache dans ses divers retours (fig. 12).

28. Soit S le centre du soleil et de l'écliptique, L', L'' et L''' les points de l'écliptique auxquels répondent les trois positions héliocentriques de la tache; menez à ces points les rayons SL', SL'' et SL''', sur ces rayons prenez $SM = \cos \lambda'$, $SE = \cos \lambda''$ et $SR = \cos \lambda'''$, les λ sont les latitudes. Joignez ME et ER, prolongez indéfiniment ces lignes, l'une vers N si $\lambda'' > \lambda'$, et l'autre vers Q si $\lambda'' > \lambda'''$, et en général en allant de la plus grande des deux latitudes à la plus petite.

Sur EN, élevez perpendiculairement $MA = \sin \lambda'$, $EB = \sin \lambda''$.

Sur ER, élevez de même $EB = \sin \lambda''$, $RC = \sin \lambda'''$.

Menez BA prolongé jusqu'en N; menez pareillement BCQ;

les points N et Q seront à la fois dans le plan de l'écliptique et dans le plan du parallèle que décrit la tache. En effet, si vous imaginez les triangles BEN et BEQ, relevés perpendiculairement sur le plan de la figure qui est celui de l'écliptique, les deux points B se réuniront en un seul; les points A, B, C seront les trois lieux héliocentriques de la tache; AB et BC deux cordes du parallèle.

Menez NQ qui sera l'intersection commune de l'écliptique et du parallèle. Par le centre S, imaginez la ligne ☊S☋ parallèle à NQ, vous aurez

la ligne des nœuds ou l'intersection des nœuds de l'écliptique et de l'équateur solaire.

Abaissez EOP perpendiculairement à la ligne des nœuds, elle sera perpendiculaire à NQ; abaissez MP', RP'' perpendiculairement à NQ, vous aurez

$$\text{tang I} = \text{tang inclinaison de l'équateur} = \frac{EB}{EP} = \frac{MA}{MP'} = \frac{RC}{RP''};$$

et $EP = \sin\lambda'' \cot I$, $MP' = \sin\lambda' \cot I$, $RP'' = \sin\lambda''' \cot I$.

$Sp = OP$ sera la distance des deux intersections; en effet, soit CL le plan de l'écliptique (fig. 13), EQ celui de l'équateur, *rbap* le parallèle de la tache; *Sb* sera le sinus de la déclinaison, *rb* le sinus de la distance polaire.

Or

$$Sp = \frac{Sb}{\cos bSP} = \frac{Sb}{\sin LSQ} = \frac{\sin D}{\sin I},$$

donc

$$\sin D = Sp \sin I = (EP - EO)\sin I.$$

Menez AG parallèle à ME (fig. 12),

$$\text{tang ABG} = \frac{AG}{BG} = \frac{ME}{\sin\lambda'' - \sin\lambda'} = \frac{ME}{2\sin\frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda')\cos\frac{1}{2}(\lambda'' + \lambda')},$$

$$EN = BE \text{ tang ABG} = \sin\lambda'' \text{ tang ABG}$$

$$AB = \frac{ME}{\sin ABG}.$$

Menez HC parallèle à ER;

$$\text{tang CBE} = \frac{HC}{BH} = \frac{ER}{\sin\lambda'' - \sin\lambda'''} = \frac{ER}{2\sin\frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda''')\cos\frac{1}{2}(\lambda'' + \lambda''')},$$

$$BC = \frac{ER}{\sin CBE}.$$

Nous aurons donc les deux cordes du parallèle, nous en connaissons déjà le rayon $= \cos D$; nous aurons les deux arcs; ces arcs sont la mesure des angles au pôle; ces angles et les arcs sont proportionnels aux tems écoulés dans l'intervalle des observations; nous aurons donc le tems de la révolution.

29. Cette construction donne déjà une solution graphique du problème : pour le résoudre numériquement, il suffit d'évaluer les lignes qui entrent dans la construction. Et d'abord le triangle SME donne

$$\begin{aligned}
\text{tang}\, y' &= \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\text{E}-\text{M}) = \left(\frac{\text{SM}-\text{SE}}{\text{SM}+\text{SE}}\right) \text{tang}\left[90^\circ - \tfrac{1}{2}(\text{L}''-\text{L}')\right] \\
&= \left(\frac{\cos\lambda' - \cos\lambda''}{\cos\lambda' + \cos\lambda''}\right) \text{tang}\left[90^\circ - \tfrac{1}{2}(\text{L}''-\text{L}')\right] \\
&= \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\lambda''-\lambda')\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\lambda''+\lambda')\,\text{tang}\left[90^\circ - \tfrac{1}{2}(\text{L}''-\text{L}')\right], \\
\text{SEM} = \text{E}' &= 90^\circ - \tfrac{1}{2}(\text{L}''-\text{L}') + y', \\
\text{M} &= 90^\circ - \tfrac{1}{2}(\text{L}''-\text{L}') - y', \\
\text{ME} &= \frac{\sin(\text{L}''-\text{L}')\cos\lambda''}{\sin \text{M}} = \frac{\sin(\text{L}''-\text{L}')\cos\lambda'}{\sin \text{E}'} = a'.
\end{aligned}$$

Le triangle SRE donnera de même

$$\begin{aligned}
\text{tang}\, y'' &= \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\text{E}''-\text{R}) = \left(\frac{\text{SR}-\text{SE}}{\text{SR}+\text{SE}}\right) \text{tang}\left[90^\circ - \tfrac{1}{2}(\text{L}'''-\text{L}'')\right] \\
&= \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\lambda''-\lambda''')\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\lambda''+\lambda''')\,\text{tang}\left[90^\circ - \tfrac{1}{2}(\text{L}'''-\text{L}'')\right) \\
\text{SER} = \text{E}'' &= 90^\circ - \tfrac{1}{2}(\text{L}'''-\text{L}'') + y'', \\
\text{SRE} = \text{R} &= 90^\circ - \tfrac{1}{2}(\text{L}'''-\text{L}'') - y'', \\
\text{ER} &= \frac{\sin(\text{L}'''-\text{L}'')\cos\lambda''}{\sin \text{R}} = \frac{\sin(\text{L}'''-\text{L}'')\cos\lambda'''}{\sin \text{E}''} = a''.
\end{aligned}$$

Nous aurons

$$\begin{aligned}
\text{NEQ} = \text{MER} &= \text{MES} + \text{SER} = \text{E}' + \text{E}'' \\
&= 90^\circ - \tfrac{1}{2}\text{L}'' + \tfrac{1}{2}\text{L}' + y' + 90^\circ - \tfrac{1}{2}\text{L}''' + \tfrac{1}{2}\text{L}'' + y'' \\
&= 180^\circ - \tfrac{1}{2}(\text{L}'''-\text{L}') + y' + y''.
\end{aligned}$$

Nous aurons

$$\begin{aligned}
\text{tang}\, x' &= \frac{\text{ME}}{\text{BG}} = \frac{a'}{2\sin\tfrac{1}{2}(\lambda''-\lambda')\cos\tfrac{1}{2}(\lambda''+\lambda')}, \\
\text{EN} &= \sin\lambda''\,\text{tang}\, x' = b', \\
\text{tang}\, x'' &= \frac{\text{RE}}{\text{BH}} = \frac{a''}{2\sin\tfrac{1}{2}(\lambda''-\lambda''')\cos\tfrac{1}{2}(\lambda''+\lambda''')}, \\
\text{EQ} &= \sin\lambda''\,\text{tang}\, x'' = b'',
\end{aligned}$$

$$\tang y''' = \tang \tfrac{1}{2}(N-Q) = \left(\frac{EQ-EN}{EQ+EN}\right) \tang (90^\circ - \tfrac{1}{2} MER)$$

$$= \left(\frac{\sin \lambda'' \tang x'' - \sin \lambda'' \tang x'}{\sin \lambda'' \tang x'' + \sin \lambda'' \tang x'}\right) \tang (90^\circ - \tfrac{1}{2} MER)$$

$$= \left(\frac{\tang x'' - \tang x'}{\tang x'' + \tang x'}\right) \tang [90^\circ - 90^\circ + \tfrac{1}{4}(L''' - L')] - \tfrac{1}{2}(y' + y'')$$

$$= \left(\frac{1 - \tang x' \cot x''}{1 + \tang x' \cot x''}\right) \tang \left(\frac{L''' - L'}{4} - \frac{y' + y''}{2}\right)$$

$$= \tang (45^\circ - x''') \tang \left(\frac{L''' - L'}{4} - \frac{y' + y''}{2}\right).$$

En faisant

$$\tang x''' = \tang x' \cot x'',$$

$$N = 90^\circ - \tfrac{1}{2} MER + y''' = 90^\circ - 90^\circ + \tfrac{1}{4}(L''' - L') - \tfrac{1}{2}(y' + y'') + y'''$$

$$= \tfrac{1}{4}(L''' - L') - \tfrac{1}{2}(y' + y'') + y'''.$$

$$Q = \tfrac{1}{4}(L''' - L') - \tfrac{1}{2}(y' + y'') - y''',$$

$$EP = EN \sin N = EQ \sin Q,$$

$$\tang I = \frac{\sin \lambda''}{EP},$$

$$SEP = E' - NEP = E' - 90^\circ + N,$$

$$ES☊ = 90^\circ - SEP = 90^\circ - E' + 90^\circ - N = 180^\circ - E' - N;$$

$$☊ = L'' - ES☊ = L'' + E' + N - 180^\circ,$$

$$EO = \cos \lambda'' \sin ES☊ = \cos \lambda'' \sin (180^\circ - E' - N)$$

$$= + \cos \lambda'' \sin (E' + N),$$

$$\sin D = (EP - EO) \sin I,$$

$$\sin \tfrac{1}{2} APB = \sin \tfrac{1}{2} P' = \frac{\tfrac{1}{2} a'}{\sin x' \cos D},$$

$$\sin \tfrac{1}{2} PBC = \sin \tfrac{1}{2} P'' = \frac{\tfrac{1}{2} a''}{\sin x'' \cos D},$$

$$R = \left(\frac{360^\circ}{P'}\right)(T'' - T') = \left(\frac{360^\circ}{P''}\right)(T''' - T'') = \left(\frac{360^\circ}{P' + P''}\right)(T''' - T'),$$

$$m = \frac{P'}{T'' - T'} = \frac{P''}{T''' - T''} = \frac{P' + P''}{T''' - T'},$$

$$R' = \frac{R.m}{m - 59'.8''.33} = \frac{\left(\frac{360}{\frac{1}{2}P'}\right) T'' - T' \frac{(\frac{1}{2}P')}{T'' - T'}}{m - 0^\circ.9857} = \frac{360^\circ}{m - 0^\circ.9857}.$$

Cette solution n'exige que la recherche de 40 logarithmes. La ligne NQ peut prendre diverses positions, selon que λ est plus grand ou

plus petit que λ' et λ'''; mais en s'attachant à la règle des signes, on n'aura aucun embarras.

Méthode nouvelle.

50. La méthode de Boscovich est de toute manière préférable aux précédentes; en voici une autre qui est aussi courte, et que va nous fournir l'analyse trigonométrique. En comparant la fig. (110) à la fig. (166) du chapitre XVIII, on voit dans l'une comme dans l'autre trois distances égales à un pôle, et trois distances inégales des mêmes points à un autre pôle. Les triangles des deux figures ont même disposition, et les formules qui servent à calculer la première, peuvent également s'appliquer à la seconde, et c'est une remarque faite par Pézénas, il y y a 60 ans. Transportons au problème de la rotation, les formules (XVIII. 75); elles deviendront, en nommant E l'angle PEA, et *m* le mouvement diurne de la tache autour de son pôle,

$$\text{tang}\, M' = \text{tang}\, \tfrac{1}{2}(L''-L')\cot\tfrac{1}{2}(\lambda''-\lambda')\cot\tfrac{1}{2}(\lambda''+\lambda');$$

$$\text{tang}\, M'' = \text{tang}\, \tfrac{1}{2}(L'''-L')\cot\tfrac{1}{2}(\lambda'''-\lambda')\cot\tfrac{1}{2}(\lambda'''+\lambda'),$$

$$R' = \tfrac{1}{2}(L''-L') - M'$$

$$R'' = \tfrac{1}{2}(L'''-L') - M'',$$

$$\text{tang}\, \varphi = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\lambda''+\lambda')}{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\lambda'''+\lambda')}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(L''-L')}{\cos\frac{1}{2}(L'''-L')}\cdot\frac{\cos M''}{\cos M'},$$

$$\text{tang}\left(E+\frac{R''+R'}{2}\right) = \text{tang}\,(45^\circ-\varphi)\cot\tfrac{1}{2}(R''-R'),$$

$$E = \left(E+\frac{R''+R'}{2}\right) - \left(\frac{R''+R'}{2}\right),$$

$$\Omega = L' + 90^\circ - E,$$

$$\cot I = \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\lambda''+\lambda')\cos\frac{1}{2}(L''-L')\cos(E+R')}{\cos M'}$$

$$= \frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(\lambda'''+\lambda')\cos\frac{1}{2}(L'''-L')\cos(E+R'')}{\cos M''},$$

$$\sin D = \cos I \sin\lambda' \{1 + \text{tang}\, I \cot\lambda' \cos E\}$$

$$= \cos I \sin\lambda'' \{1 + \text{tang}\, I\cot\lambda'' \cos[E+\tfrac{1}{2}(L''-L')]\}$$

$$= \cos I \sin\lambda''' \{1 + \text{tang}\, I\cot\lambda''' \cos[E+\tfrac{1}{2}(L'''-L')]\},$$

$$\text{tang}\, x = \cot\lambda' \cos(L'''-L'),$$

$$\cos K''' = \frac{\sin \lambda' \sin(\lambda'' + x)}{\cos x},$$

$$\sin \tfrac{1}{2} P = \frac{\sin \frac{1}{2} K''}{\cos D},$$

$$m = \frac{P}{T'' - T'},$$

$$\text{révol. R} = \frac{360^\circ}{m}.$$

$$\text{révol. synod.} = \frac{360^\circ}{m - 0^\circ.9857}.$$

Cette solution qui n'exige que 40 logarithmes comme la précédente, est encore plus commode en ce qu'elle est renfermée en beaucoup moins de formules. Si M' et M'' sont de grands angles, au lieu de $\frac{\cos M''}{\cos M'}$, on mettra $\frac{\cot M'' \sin M''}{\cot M' \sin M'}$ dans la formule qui donne φ; log cot M', et log cot M'' seront donnés par les premiers calculs; sin M' et sin M'' se prendront commodément dans les tables, parce qu'ils varieront peu.

Passons à une méthode ingénieuse, et qui nous épargnera encore trois logarithmes.

Méthode de Cagnoli complettée.

31. Le calcul des triangles EAB, EBC, EAC par les formules de Néper, nous a déjà donné

$$x' = \tfrac{1}{2}\,\text{EBA} + \tfrac{1}{2}\,\text{EAB}, \quad y' = \tfrac{1}{2}\,\text{EBA} - \tfrac{1}{2}\,\text{EAB},$$
$$x'' = \tfrac{1}{2}\,\text{ECB} + \tfrac{1}{2}\,\text{EBC}, \quad y'' = \tfrac{1}{2}\,\text{ECB} - \tfrac{1}{2}\,\text{EBC},$$
$$x''' = \tfrac{1}{2}\,\text{ECA} + \tfrac{1}{2}\,\text{EAC}, \quad y''' = \tfrac{1}{2}\,\text{ECA} - \tfrac{1}{2}\,\text{EAC}.$$

Mais

$$\text{EBA} = \text{EBP} + \text{PBA} = p'' + \text{PBA},$$
$$\text{EAB} = \text{PAB} - \text{PAE} = \text{PBA} - p';$$

donc

$$\text{EBA} - \text{EAB} = p' + p'' = 2y'.$$

$$\text{ECB} = \text{ECP} + \text{PCB} = p''' + \text{PCB},$$
$$\text{EBC} = \text{PBC} - \text{PBE} = \text{PCB} - p'';$$

donc

$$\text{ECB} - \text{EBC} = p'' + p''' = 2y''.$$

$$\text{ECA} = \text{ECP} + \text{PCA} = p''' + \text{PCA},$$
$$\text{EAC} = \text{PAC} - \text{PAE} = \text{PCA} - p';$$

donc

$$ECA - EAC = p' + p''' = 2y'''.$$

32. C'est-à-dire que les sommes des angles de position, pris deux à deux, sont les différences des angles à la base dans les triangles primitifs.

La différence des deux premières équations est... $p' - p''' = 2y' - 2y''$
La différence des deux dernières est............ $p'' - p' = 2y'' - 2y'''$
La différence de la 3ème à la première est....... $p''' - p'' = 2y''' - 2y'$

Les différences des angles de position sont les différences des différences des angles primitifs.

33. De......... $p' + p'' = 2y'$
Et............. $p'' - p' = 2y'' - 2y'''$
On tire......... $2p'' = 2y' + 2y'' - 2y'''$ ou $p'' = y' + y'' - y'''$
$2p' = 2y' - 2y'' + 2y'''$ ou $p' = y' - y'' + y'''$
De............. $p'' + p''' = 2y''$
Et............. $p''' - p'' = 2y''' - 2y'$
On tire......... $2p''' = 2y'' + 2y''' - 2y'$ ou $p''' = y'' + y''' - y'$

Ainsi les trois y' donnent les trois angles de position; c'est ce que M. Cagnoli a remarqué le premier: voyons ce qu'on peut tirer des trois x' ou des trois demi-sommes.

34. $2x' = EBA + EAB = EBP + PBA + PAB - PAE$
$= 2PBA + p'' - p' = 2PBA + 2(y'' - y''')$
$2x'' = ECB + EBC = ECB + PCB + PBC - PBE$
$= 2PBC + p''' - p'' = 2PBC + 2(y''' - y')$
$2x''' = ECA + EAC = ECP + PCA + PAC - PAE$
$= 2PCA + p''' - p' = 2PCA + 2(y'' - y')$:

d'où résulte

$$PBA = PAB = x' - y'' + y'''$$
$$PBC = PCB = x'' - y''' + y'$$
$$PCA = PAC = x''' + y' - y''.$$

Cagnoli n'a pas donné ces valeurs des angles à la base dans les triangles isoscèles, cependant une de ces valeurs au moins étoit nécessaire pour

déterminer le tems de la rotation, dont il n'a point parlé, quoique cet élément ne soit pas moins important que les trois autres.

35. Les triangles PAE, PBE donnent

$$\sin p' : \sin PE :: \sin PEA : \sin PA$$
$$\sin PE : \sin p'' :: \sin PB : \sin PEB$$
$$\sin p' : \sin p'' :: \sin PEA : \sin PEB$$

$$\tan g \tfrac{1}{2}(p''+p) : \tan g \tfrac{1}{2}(p''-p') :: \tan g \tfrac{1}{2}(PEB+PEA) : \tan g \tfrac{1}{2}(PEB-PEA)$$
$$:: \tan g \tfrac{1}{2}(PEB+PEA) : \tan g \tfrac{1}{2}(L''-L')$$

$$\tan g \tfrac{1}{2}(PEB+PEA) = \tan g \tfrac{1}{2}[PEA+PEA+(L''-L')] = \tan g\left(PEA+\frac{L''-L'}{2}\right)$$
$$= \tan g \tfrac{1}{2}(L''-L') \tan g \tfrac{1}{2}(p''+p') \cot \tfrac{1}{2}(p''-p') = \tan g\left(PEB-\frac{L''-L'}{2}\right).$$

ou

$$\tan g\left(E'+\frac{L''-L'}{2}\right) = \tan g\, Z' = \tan g \tfrac{1}{2}(L''-L') \tan g\, y' \cot(y''-y''');$$

d'où

$$E = Z' - \tfrac{1}{2}(L''-L').$$

Les triangles PBE et PCE donneront de même

$$\tan g\, Z'' = \tan g \tfrac{1}{2}(L'''-L'') \tan g\, y'' \cot(y'''-y');$$
$$E'' = Z'' - \tfrac{1}{2}(L'''-L'').$$

Enfin les triangles PAE et PCE donneront

$$\tan g\, Z''' = \tan g \tfrac{1}{2}(L'''-L') \tan g\, y''' \cot(y''-y');$$
$$E''' = Z''' - \tfrac{1}{2}(L'''-L'):$$

d'où

$$\text{long. pôle} = L' - E' = L'' - E'' = L''' - E'''$$
$$☊ = 90° + L' - E' = 90° + L'' - E'' = 90° + L''' - E'''$$
$$= 90° + L' - Z' + \tfrac{1}{2}L'' - \tfrac{1}{2}L' = 90° + \tfrac{1}{2}(L''+L') - Z'$$
$$= 90° + \tfrac{1}{2}(L'''+L'') - Z'' = 90° + \tfrac{1}{2}(L'''+L') - Z''';$$

on aura donc le ☊ sans avoir besoin des angles E, mais ils sont nécessaires pour la suite.

36. Dans chacun des triangles PAE, PBE, PCE, nous connaissons deux côtés et l'angle compris p.

Nous

Nous aurons

$$\tang\tfrac{1}{2}(PA+PE)=\frac{\tang\frac{1}{2}EA\cos\frac{1}{2}(PEA-p')}{\cos\frac{1}{2}(PEA+p')};$$

$$\tang(PA-PE)=\frac{\tang\frac{1}{2}EA\sin\frac{1}{2}(PEA-p')}{\sin\frac{1}{2}(PEA+p')},$$

ou

$$\tang\tfrac{1}{2}(\Delta+I)=\frac{\tang\frac{1}{2}\Delta'\cos\frac{1}{2}(E'-p')}{\cos\frac{1}{2}(E'+p')},$$

et

$$\tang\tfrac{1}{2}(\Delta-I)=\frac{\tang\frac{1}{2}\Delta'\sin\frac{1}{2}(E'-p')}{\sin\frac{1}{2}(E'+p')}.$$

Nous aurons encore

$$\tang\tfrac{1}{2}(\Delta+I)=\frac{\tang\frac{1}{2}\Delta''\cos\frac{1}{2}(E''-p'')}{\cos\frac{1}{2}(E''+p'')}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(\Delta-I)=\frac{\tang\frac{1}{2}\Delta''\sin\frac{1}{2}(E''-p'')}{\sin\frac{1}{2}(E''+p'')}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(\Delta+I)=\frac{\tang\frac{1}{2}\Delta'''\cos\frac{1}{2}(E'''-p''')}{\cos\frac{1}{2}(E'''+p''')}$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(\Delta-I)=\frac{\tang\frac{1}{2}\Delta'''\sin\frac{1}{2}(E'''-p''')}{\sin\frac{1}{2}(E'''+p''')}.$$

37. Enfin pour avoir la rotation, on a dans chacun des triangles isoscèles

$$\cot\tfrac{1}{2}P' = \cot\tfrac{1}{2}APB = \cos PA\ \tang PAB = \sin D\ \tang(x'+y'''-y'')$$

$$\cot\tfrac{1}{2}P'' = \cot\tfrac{1}{2}BPC = \cos PB\ \tang PBC = \sin D\ \tang(x''+y'-y''')$$

$$\cot\tfrac{1}{2}P''' = \cot\tfrac{1}{2}APC = \cos PA\ \tang PAC = \sin D\ \tang(x'''+y'-y'')$$

$$m=\frac{P'}{T''-T'}=\frac{P''}{T'''-T''}=\frac{P'''}{T'''-T'}$$

$$R=\frac{360}{m}\qquad R'=\frac{360^\circ}{m-59'8''33}.$$

Cette méthode, en ne calculant que ce qui est indispensable, emploie 37 logarithmes : elle est donc plus courte qu'aucune des précédentes, et elle mérite la préférence quand on n'a que trois observations d'une même tache, mais quand on en a un plus grand nombre, je préfère la méthode suivante, qui pour sa simplicité, sa généralité et sa brièveté pourrait bien encore être la meilleure de toutes, dans tous les cas sans exception.

Méthode analytique.

38. Soit T la tache, N la longitude du nœud N, P le pôle de rotation (fig. 15)

$$
\begin{aligned}
\cos PT &= \cos ET \cos PE + \sin ET \sin PE \cos PET \\
&= \sin\lambda \cos I + \cos\lambda \sin I \cos(90^\circ + NET) \\
&= \sin\lambda \cos I - \cos\lambda \sin I \sin NET \\
&= \sin\lambda \cos I - \cos\lambda \sin I \sin(L - N) \\
&= \sin\lambda \cos I - \cos\lambda \sin I \sin L \cos N + \cos\lambda \sin I \cos L \sin N
\end{aligned}
$$

$$\frac{\sin D}{\cos I} = \sin\lambda - \cos\lambda \sin L\,(\operatorname{tang} I \cos N) + \cos\lambda \cos L (\operatorname{tang} I \sin N).$$

Cette équation renferme trois inconnues $\left(\frac{\sin D}{\cos I}\right)$, $(\operatorname{tang} I \cos N)$ et $(\operatorname{tang} I \sin N)$, il faudra donc trois équations pareilles, c'est-à-dire trois observations.

Pour chacune des observations vous calculerez $\sin\lambda$, $\cos\lambda \sin L$ et $\cos\lambda \cos L$, l'équation prendra la forme

$$x = A - By + Cz.$$

Supposons que vous ayez neuf observations différentes, vous réunissez les équations trois à trois, vous avez trois résultats, vous déterminez par les méthodes ordinaires vos trois inconnues, alors vous aurez

$$\frac{z}{y} = \frac{\operatorname{tang} I \sin N}{\operatorname{tang} I \cos N} = \operatorname{tang} N; \quad \operatorname{tang} I = \frac{z}{\sin N} = \frac{y}{\cos N};$$

quant à D vous pourrez le déterminer par la résultante de toutes les équations particulières, multipliée par cos I.

39. Il reste à déterminer la rotation : pour cela prenez deux longitudes L^a, L^e avec les latitudes correspondantes λ^a et λ^e, calculez ....

$$\frac{\cos\lambda^a \cos(L^a - N)}{\cos D} = \cos A^a \quad \text{et} \quad \frac{\cos\lambda^e \cos(L^e - N)}{\cos D} = \cos A^e.$$

Il est évident que $A^e - A^a$ est l'angle au pôle, $\frac{A^e - A^a}{T^e - T^a} =$ mouvement diurne $= m$; d'où $R = \frac{360^\circ}{m}$, $R' = \frac{360^\circ}{m - 59'8''33'''}$, $\frac{A^a - N}{m}$ sera le tems

écoulé depuis le passage de la tache par le cercle de déclinaison PN, et $\frac{A^a}{m}$ le tems écoulé depuis l'instant on la tache avait o d'ascension droite. On pourra faire une table des moyens mouvemens de la tache, pour avoir sa position en tout tems.

40. Pour exemple de cette méthode je choisis onze observations d'une même tache par MM. Messier, Dagelet et Lalande, et rapportées dans les Mémoires de l'Académie 1776, pag. 464. Les observations sont du mois de juin 1775. Je suppose qu'elles ont été faites à midi : Lalande qui les a publiées n'en a rien dit; mais par les lieux héliocentriques de la terre qu'il a pris dans la Connaissance des tems, on voit que tout se rapporte à midi.

En adoptant les longitudes et les latitudes héliocentriques de Lalande, j'avais trouvé par cette méthode $N = 2^s\ 18^\circ\ 7'\ 58''$; $I = 7^\circ\ 25'\ 53''$; $D = 5^\circ\ 12'\ 17''$ et $R = 24^j \cdot 84$; mais il y avait une erreur capitale dans le calcul de Lalande qui employait $(S'+T)$ au lieu de $S'(11)$, il faisait donc les distances héliocentriques de la tache à la terre trop grandes d'un arc qui allait jusqu'à $13'\frac{1}{2}$. J'ai donc refait tous les calculs; et diminuant de 3″ le demi-diamètre du soleil pour l'irradiation, j'ai formé le tableau suivant. Au reste, je n'assure en aucune manière que l'irradiation soit réelle, je dis seulement que si elle existe, il faut en tenir compte dans ces calculs. Au surplus les résultats ne seront pas très-différens, excepté pour le nœud; mais l'inclinaison étant petite, le nœud n'est pas aisé à bien déterminer.

Calculs préparatoires.

Jours. Juin.	dÆ	dD	♁	Angles de position.	L	λ
13	+13′ 35″	+1′ 2″	8s 22° 10′ 1″	+3° 23′ 11″	6s 22° 18′ 48″	+ 0° 50′ 52″
14	+11. 3,5	+0.24	8.23. 7.16	+2.58.37	7. 8.33.18	− 0.38. 7
15	+ 8.16.0	−0.10	8.24. 4.31	+2.33.58	7.22.31.32	− 1.56.56,5
16	+ 4. 5	−0 48,5	8.25. 1.46	+2. 9.16	8. 7.13.43	− 3.35.46
17	+ 1. 5	−1.26	8.25.59.10	+1.44.34	8.21.35. 2	− 5.20.42
18	− 2.22	−2. 7	8.26.56.15	+1.19.44	9. 5.48.49	− 7.30. 7
19	− 5.36	−2.39	8.27.53.29	+0.54.55	9.19. 7.47	− 9.20. 7
20	− 9. 4	−3. 0	8.28.50.43	+0.30. 5	10. 4.45.33	−10.40.11
21	−11.41	−3.11	8.29.47.57	+0. 5.14	10.18.59.36	−11.35. 7
22	−13.42	−3.18	9. 0.45.11	−0.19.37	11. 3.33. 6	−12.23.10
23	−14.57	−3.17	9. 1.42.25	−0.44.28	11.17.59. 4	−12.45.55

Jours. Juin.	Équations $\frac{\sin D}{\cos I} = x =$	D	D	D	D
13	$+0.014799 + 0.379630y - 0.925020z$	−5° 23′ 9″	−5° 11′ 58″	−5° 20′ 23″	−5° 27′ 37″
14	$-0.011088 + 0.623227y - 0.781962z$	−5.32.28	−5.20.16	−5.29.33	−5.33.30
15	$-0.034010 + 0.793165y - 0.608055z$	−5.23.27	−5.11. 5	−5.20.53	−5.21.28
16	$-0.062722 + 0.920241y - 0.386293z$	−5.16.17	−5. 4.49	−5.15. 6	−5.12.10
17	$-0.093151 + 0.984930y - 0.145725z$	−5.11.43	−5. 1.25	−5.10.39	−5. 4. 0
18	$-0.130559 + 0.987331y + 0.100526z$	−5.32.45	−5.24.29	−5.32.46	−5.22.52
19	$-0.162213 + 0.932267y + 0.323368z$	−5.48.25	−5.42.24	−5.49. 0	−5.37. 0
20	$-0.185148 + 0.807352y + 0.560013z$	−5.32.55	−5.30.10	−5.34.22	−5.20.42
21	$-0.200826 + 0.642856y + 0.739347z$	−5.20.23	−5.17.12	−5.18.59	−5. 8. 6
22	$-0.214499 + 0.435028y + 0.874506z$	−5.23.13	−5.26.33	−5.25.45	−5.11.38
23	$-0.220961 + 0.203032y + 0.953916z$	−5.27.16	−5.33.26	−5.32.36	−5.17. 7
	Par un milieu D = ...	−5.26.33	−5.20.20	−5.26.13	−5.19.39
	Par la somme des équations	....	....	−5.26.32	−5.19.34

41. Pour réduire ces onze équations aux trois qui donneront la valeur des inconnues, je réunis en une somme les équations des 16, 17, 18 et 19 juin, dans lesquelles les coefficiens de y sont très-forts et ceux de z se reduiront presque à rien. Je prends le quart de la somme, et je trouve

$$\frac{\sin D}{\cos I} = -0.1121615 + 0.95619225y - 0.0270317z \qquad (1)$$

Je change le signe de l'équation du 13 et la réunissant à celles des 22 et 23 je trouve

$$\frac{\sin D}{\cos I} = -0.450259 + 0.258430y + 2.753442z \qquad (2)$$

Enfin le quart des équations 14, 15, 20 et 21 me donne

$$\frac{\sin D}{\cos I} = -0.107768 + 0.716650y - 0.02266425z \qquad (3)$$

De l'équation (2) je retranche successivement l'équation (1) et l'équation (3), j'ai les deux restes

$$0 = -0.3380975 - 0.69776225y + 2.780473z$$
$$0 = -0.342491 - 0.458220y + 2.77610625z$$

Je divise chacune de ces équations par le coefficient de z, il me

vient

$$o = -0.121598 - 0.25095092\,y + z$$
$$o = -0.123371 - 0.16505852\,y + z$$

D'où
$$o = -0.001773 + 0.08589240\,y + z$$

$$y = +\frac{0.001773}{0.0858924} = \text{tang}\,I\ \cos N,$$

je porte cette valeur de y dans les deux équations précédentes et j'obtiens

$$z = 0.12677444 = \text{tang}\,I\ \sin N$$
$$\text{tang}\,N = \frac{z}{y} = \text{tang}\ 2^s\ 20°\ 45'\ 7''$$
$$\text{tang}\,I = \frac{z}{\sin N} = \frac{y}{\cos N} = \text{tang}\ 7°\ 19'\ 9''$$

Je porte les valeurs de y et de z dans les onze équations premières et j'obtiens les déclinaisons que j'ai placées dans la troisième colonne à la suite de chaque équation.

Le milieu entre toutes est	— 5° 26′ 53″
J'en retranche	I = — 7.19.19
Le reste	— 12.46. 2
La plus grande latitude observée	= — 12.45.55
La dernière longitude est	11.17.59. 4
Le lieu du nœud	2.20.45. 7
Distance au nœud	3. 2.46. 3

Ainsi la dernière observation était bien près de la limite.

Les différentes valeurs de la déclinaison offrent des écarts de près de 15′ en moins, et de 22′ bien près en plus.

42. Soient L^{a} et λ^{a} les quantités prises dans la première observation. L^{ω} et λ^{ω} les quantités prises dans la dernière

$$\cos A^{a} = \frac{\cos\lambda^{a}\cos(L^{a} - \Omega)}{\cos D} = 4^s\ 1°49'49''$$

$$\cos A^{\omega} = \frac{\cos\lambda^{\omega}\cos(L^{\omega} - \Omega)}{\cos D} = 8.27.15.44$$

Le mouvem. d'asc. droite en 10 jours $= 4.25.25.55 = 145°433$

Le mouv. diurne $= M = 14.5433$; $R = \frac{360°}{14.5433} = 24^j.753$

$M - 0.9857 = 13.5577$; $R' = \frac{360°}{13.5577} = 26^j.553$.

Les ascensions droites A^a, A'' converties en tems de la révolution R, serviraient à trouver le passage de la tache par le cercle de déclinaison PN, un seul de ces passages ainsi déterminé servirait à trouver tous les passages subséquens par l'addition des multiples de R : on en conclurait le retour des taches si la révolution était bien connue.

Par une autre combinaison, je réunis les onze équations en une somme unique, et la divisant par onze, j'en tire

$$\frac{\sin D}{\cos I} = -0.1182163 + 0.7008235\,y + 0.0640564\,z \qquad (1)$$

Les équations des 13, 14, 15, 21, 22 et 23 réunies donnent par un milieu

$$\frac{\sin D}{\cos I} = -0.1110975 + 0.512823\,y + 0.0421222\,z \qquad (2)$$

Les équations des 16, 17, 18, 19, 20 et 21 réunies donnent de même

$$\frac{\sin D}{\cos I} = -0.1391033 + 0.8791628\,y + 0.1985393 \qquad (3)$$

$$(1)-(2) \qquad 0 = -0.0071188 + 0.1880005\,y + 0.0219344\,z$$
$$(3)-(2) \qquad 0 = -0.0280058 + 0.3663398\,y + 0.1564173\,z$$

ou

$$0 = -0.324550 + 8.571059\,y + z$$
$$0 = -0.179046 + 2.342080\,y + z$$

et

$$0 = -0.145504 + 6.22897\,y$$
$$y = +\frac{0.145504}{6.22897} = \text{tang I} \cos N$$
$$z = 0.124337 = \text{tang I} \sin N$$
$$\text{tang N} = \frac{z}{y} = \text{tang } 2^s\ 19°\ 21'\ 35''$$
$$\text{tang I} = \frac{z}{\sin N} = \frac{y}{\cos N} = 7°\ 12'\ 37''$$
$$D = 5.20.20$$

plus grande latitude $\quad D + I = 12.33.57$
observée $\quad 12.45.55$

Les écarts de D ne sont plus les mêmes, mais ils ne sont pas diminués. Voyez la seconde colonne des D, page 44.

43. Quant à la rotation

13 et 23	donnent	M = 14°5542	et	R = 24j·7352
14 et 22		14.3774		25.0393
15 et 21		14.4293		24.9492
16 et 20		14.4025		24.9957
17 et 19		14.2077		25.5382

milieu = 25.01152 = 25j 0h 16′ 36″

M = 14°394

Soit Æ une ascension droite quelconque $\frac{Æ}{M}$ donnera le tems écoulé depuis le moment ou l'ascension droite de la tache était zéro.

Soit ensuite n le nombre de jours écoulés depuis ce moment n; $M = n.14°394$ l'ascension droite de la tache pour un jour quelconque. On en pourra conclure la longitude et la latitude héliocentriques pour un jour donné, et sa position géocentrique pour le même instant.

Le total de l'opération, quand une fois les latitudes, les longitudes héliocentriques sont déterminées, ce qui est commun à toutes les méthodes, n'exige que 98 logarithmes pour onze observations; les opérations partielles sont de la plus grande simplicité. Aucune méthode n'aurait ni cette facilité, ni cette briéveté.

44. Ces calculs sont faits depuis plus de vingt-cinq ans; M. Legendre a depuis proposé une méthode nouvelle de grouper les équations dans tous les problèmes de ce genre, de manière à obtenir le résultat le plus probable: nous allons exposer la méthode.

Nous avons ici onze équations de la forme

$$x = a + by + cz.$$

La somme sera

$$11x = (a + a' + a'' + \text{etc.}) + (b + b' + b'' + \text{etc.})y + (c + c' + c'' + \text{etc.})z$$

et la moyenne

$$x = \frac{a + a' + a'' + \text{etc.}}{n} + \left(\frac{b + b' + b'' + \text{etc.}}{n}\right)y + \left(\frac{c + c' + c'' + \text{etc.}}{n}\right)z.$$

Il nous faut encore deux équations de ce genre puisque nous avons trois inconnues.

Multipliez chacune des équations en particulier par le coefficient b de y, chaque équation alors sera de la forme

$$bx = ab + b^2y + bcy$$

la somme de toutes

$$(b + b' + b'' + \text{etc.})\, x = (ab + a'b' + a''b'' + \text{etc.}) + (b^2 + b'^2 + b''^2 + \text{etc.})\, y$$
$$+ (bc + b'c' + b''c'' + \text{etc.})\, z$$

et la moyenne

$$x = \frac{ab + a'b' + a''b'' + \text{etc.}}{b + b' + b'' + \text{etc.}} + \left(\frac{b^2 + b'^2 + b''^2 + \text{etc.}}{b + b' + b'' + \text{etc.}}\right) y + \left(\frac{bc + b'c' + b''c'' + \text{etc.}}{b + b' + b'' + \text{etc.}}\right) z.$$

45. Cette équation est comme la première le résultat de toutes les observations, et tout-à-fait dans le même genre; car si vous faites pour x ce que vous avez fait pour y, c'est-à-dire que vous multipliez tout par le coefficient 1 de x, vous aurez la première équation ci-dessus.

Faites la même chose encore pour le coefficient de c de z vous aurez

$$x = \frac{ac + a'c' + a''c'' + \text{etc.}}{c + c' + c'' + \text{etc.}} + \left(\frac{bc + b'c' + b''c'' + \text{etc.}}{c + c' + c'' + \text{etc.}}\right) y + \left(\frac{c^2 + c'^2 + c''^2 + \text{etc.}}{c + c' + c'' + \text{etc.}}\right) z.$$

Vous aurez ainsi toujours autant d'équations que vous aurez d'inconnues.

Exécutez les calculs numériques, en prenant les a, b, c dans nos onze équations, vous aurez

$$\begin{array}{rl}
(1) & x = -\ 0.118213 + 0.700824\, y + 0.064056\, z \\
(2) & x = -\ 0.113454 + 0.793621\, y + 0.010695\, z \\
(3) & x = -\ 0.940419 + 0.117060\, y + 6.691674\, z \\
\hline
(3) - (1) & 0 = -\ 0.822206 - 0.583764\, y + 6.627618\, z \\
(3) - (2) & 0 = -\ 0.826965 - 0.676561\, y + 6.680979\, z \\
\hline
 & 0 = -\ 0.124055 - 0.0880805\, y + z \\
 & 0 = -\ 0.123779 - 0.1012670\, y + z \\
\hline
 & 0 = -\ 0.000276 + 0.0131865\, y
\end{array}$$

$$y = \frac{0.000276}{0.013865} = 0.0209305; \qquad z = 0.1258985$$

$$\text{tang N} = \frac{z}{y} = \text{tang } 80^\circ\, 33'\, 40'';$$

$$\text{tang I} = \frac{z}{\sin N} = \frac{y}{\cos N} = \text{tang } 7^\circ\, 16'\, 23''.$$

46.

46. Portez ces valeurs de y et de z avec celle de cos I dans chacune des équations particulières, vous trouverez les valeurs portées dans la troisième colonne D du tableau. Les écarts autour de la moyenne vont à $+ 22' 47''$ et $- 15' 54''$; plus grande différence $38' 21''$; c'est plus que par les premiers élémens et moins que par les seconds. A n'en juger que par l'accord plus ou moins grand, les premiers élémens sont les meilleurs, mais on avait lieu de croire les troisièmes plus probables.

La première méthode se présentait plus naturellement, elle consistait à grouper les équations de manière à donner aux inconnues y et z alternativement le plus fort coefficient possible, quant à x, par la nature de l'équation il a toujours l'unité pour coefficient. Dans l'équation (1) le coefficient de y est presque l'unité; dans la deuxième, le coefficient de z est $2\frac{3}{4}$; ainsi les trois inconnues paraissent devoir être bien déterminées.

Dans la seconde méthode, y pourrait être assez bien déterminé par la troisième, x par l'une des deux autres, mais z a partout des coefficiens bien petits, il n'est pas étonnant qu'elle ait mal réussi.

Dans la troisième, au contraire, z paraît bien avantageusement dans la troisième équation; y passablement dans la seconde; x bien dans la première; on devait en attendre mieux que de la seconde combinaison, elle a moins réussi que la première, quoiqu'elle parût mériter au moins autant de confiance.

La déclinaison par la somme des équations est.....	5° 26′ 32″
l'inclinaison.....	7.16.23
plus grande latitude possible.....	12.42.55
observée.....	12.45.55
plus grande de 3′.....	3. 0

Et cependant la tache n'était pas tout-à-fait dans ses limites; en effet

la dernière longitude observée était.....	11.17.59. 4
nœud......	2.20.33.40
distance à la limite......	3. 2.54.36

Il y a donc une erreur de 3 à 4′ sur cette observation ou sur nos élémens, ce qui au reste n'est pas étonnant, puisque $5'\frac{1}{2}$ de latitude héliocentrique ne font que 1″ de latitude géocentrique.

Nos troisièmes élémens tiennent à peu près le milieu entre les deux autres systèmes : en se rapprochant un peu des premiers, on peut en

conclure, sans en faire de nouveau le calcul, que la rotation sera de $25^j\ 0^h\frac{3}{4}$ à fort peu près.

Notre troisième élimination, plus pénible de beaucoup à elle seule que les deux autres réunies, n'a donc pas amélioré la solution, elle paraîtrait plutôt avoir fait l'effet contraire.

47. Nous avions trois inconnues

$$x = \frac{\sin D}{\cos I}, \qquad y = \tang I \cos N, \qquad z = \tang I \sin N.$$

Cos I varie fort peu et diffère peu de l'unité, x diffère donc peu de sin D et l'un sera aussi bien déterminé que l'autre, sin N diffère aussi fort peu de l'unité et varie peu, z et I seront également bien connus. Tang I et cos N sont deux petites fractions sur lesquelles les erreurs dI et dN auront des effets sensibles. Si y n'est pas bien déterminé, $\tang N = \frac{z}{y}$ aura une erreur sensible; mais tang N est fort variable dans notre problème, ainsi N pourra être passablement connu; dans la vérification des élémens par le calcul de $\sin D = a \cos I + by \cos I + cz \cos I$, les erreurs de z et de y se porteront sur sin D; le plus ou le moins d'accord des valeurs de D peut donc nous faire juger de la bonté de nos élémens.

La première de nos onze équations est

$$-0.014799 = -x + 0.37963\,y - 0.92502\,z.$$

Si nous connaissions y et z, nous ferions passer ces deux termes dans le premier membre et nous aurions la valeur de x. Si nous connaissions x et z, nous aurions la valeur de $0.37963\,y$ environ $\frac{1}{3}y$, pour avoir y il faudrait multiplier par 3 la valeur trouvée, ce qui n'aurait aucun inconvénient si la valeur était exacte. Mais si elle n'est qu'approximative l'erreur du premier membre sera triplée, et par conséquent aussi l'erreur de y; ainsi, tout égal d'ailleurs, cette équation donnera x trois fois moins que y; elle donnerait z presque aussi bien que x, parce que le coefficient de z est presque égal à l'unité.

On voit donc que les coefficiens 1.037963 et 0.92502 expriment les degrés d'exactitude avec lesquels on peut espérer connaître chacune des inconnues par chacune des équations, en multipliant nos onze équations par le coefficient de x et en prenant la somme, cette somme est proportionnelle à la probabilité que nous avons pour x.

En les multipliant ensuite par le coefficient de y, nous formons une seconde équation proportionnelle aux probabilités de y; nous en faisons autant pour z et les autres inconnues s'il y en avait; nous avons donc autant d'équations que d'inconnues, et ces équations nous serviront à évaluer les inconnues de la manière la plus probable.

Dans ces multiplications nous laissons aux divers coefficiens leur signe algébrique; il en résulte que chacune des inconnues a successivement pour coefficient un nombre carré, et que dans la somme qui fournit l'équation finale, l'inconnue a pour coefficient une somme de carrés, tous positifs par conséquent, et toujours un nombre plus grand que les autres inconnues où la combinaison des signes + et — a fait que plusieurs termes se sont ou détruits ou en partie compensés.

48. Ainsi chacune des inconnues dans l'équation qui lui est consacrée, a un coefficient beaucoup plus fort que les autres; l'équation ainsi préparée devient donc beaucoup plus propre à déterminer cette inconnue avec précision; ainsi dans l'équation (3)

$$x = -0.940419 + 0.167067 + 6.691674\, z;$$

le coefficient de z est près de sept fois plus fort que celui de x, il est près de quarante fois plus fort que celui de y. Le terme 6.691674 est la somme des carrés qui est plus grande que celle des produits divers, et cette somme de carrés est encore divisée par la somme des racines qui étant de signes divers se réduisent à un nombre petit ou médiocre; ainsi on donne à chaque inconnue pour coefficient une somme de carrés divisés réellement par la différence des racines, ces deux moyens concourent à grossir le coefficient que l'on veut rendre dominant. Ces préparations n'altèrent en rien les équations, elles fournissent simplement une manière plus avantageuse de les combiner. On pourrait nommer cette méthode celle des plus grands coefficiens; M. Legendre qui l'a établie par des considérations purement analytiques, l'a nommée Méthode des moindres carrés. M. Laplace en a donné une démonstration directe et rigoureuse, et lui a laissé cette dernière dénomination, adoptée aussi par M. Gauss qui s'est aussi occupé de cette méthode. On voit que la pratique en est fort simple, mais les calculs sont un peu longs. MM. Legendre et Gauss conseillent aux calculateurs de ne pas mettre dans l'évaluation des divers produits ou carrés une précision fatigante et qui serait inutile; mais si l'on opère par logarithmes, la précision ne coûte rien et elle

peut devenir nécessaire : ici, par exemple, en calculant tout à six décimales, nous avons eu $y = \frac{0.000276}{0.013865}$; avec moins de décimales nous aurions pu avoir un numérateur double ou sous-double et des valeurs fort différentes pour les inconnues.

49. Il est démontré que les résultats de cette méthode sont les plus probables, on ne peut pas dire cependant qu'ils soient sûrs, ni même les meilleurs qu'on puisse tirer des observations. Nous avons déjà vu que par une méthode beaucoup plus simple, et qui tendait à grossir successivement les coefficiens des inconnues, nous avions trouvé des élémens qui représentaient mieux les observations.

50. Dans toutes les recherches astronomiques auxquelles je m'étais livré avant la découverte du principe de M. Legendre, j'avais toujours eu pour objet de donner à mes équations finales les coefficiens les plus différens. Je donnais le signe + à tous les termes dont je voulais grossir le coefficient: on peut appliquer cette règle à toutes les inconnues et faire ainsi autant de sommes qu'il est nécessaire. Chaque inconnue a pour coefficient une fraction dont le numérateur est une somme toute positive, et le dénominateur une somme de termes de signes différens. On imitait déjà jusqu'à un certain point le procédé de M. Legendre, seulement on ne s'astreignait pas à faire que chacune des équations finales fût la somme de toutes les équations particulières, et cela n'est pas toujours possible : ici, par exemple, x et y ont toujours un coefficient positif, ainsi la somme des onze équations, sans autre préparation, serait la même pour x et pour y.

Mais pour z nous avons six coefficiens positifs et cinq négatifs, changeons les signes des cinq premières équations, et prenons la somme des onze, $5x$ négatifs ajoutés à 6 positifs donneront pour résultat $+x$, $5y$ deviendront négatifs et détruiront en partie les $6y$ positifs, il en sera de même à peu près du terme tout connu, mais ici le hasard fait que le résidu est encore considérable.

51. Nous aurons donc deux bonnes équations finales qui renfermeront onze équations particulières.

Pour en former une troisième, prenons la somme des deux premières et des trois dernières, retranchons cette somme de celles des six autres équations, il nous restera $+x$ et sa valeur; nous aurons ainsi

$$x = -0.118213 + 0.700824y + 0.064056z$$
$$x = -0.928104 + 0.306673y + 6.398731z$$
$$x = -0.035228 + 3.141513y - 1.016953z$$

$$0 = -0.809891 - 0.394151y + 6.334675z$$
$$0 = -0.892876 - 2.854840y + 7.415684z$$

$$0 = -0.127850 - 0.0622213y + z$$
$$0 = -0.120403 - 0.3822750y + z$$

$$0 = -0.007447 + 0.3200537y$$

$$y = \frac{0.007447}{0.3200537} = 0.023268; \qquad z = 0.129298;$$

$$\frac{z}{y} = \text{tang}\,N = \text{tang}\,79°\,47'\,55''; \qquad I = 7°\,29'\,4''.$$

Ces élémens diffèrent assez des précédens; à ne considérer que les coefficiens, on trouverait ces nouvelles équations au moins aussi avantageuses que celles des moindres carrés; celle qui donne z est aussi bonne, celle qui donne y est meilleure, et celle qui donne x est la même dans les deux méthodes.

Ces élémens donnent pour D les valeurs qu'on voit dans la quatrième colonne D du tableau.

52. Pour comparer ces divers systèmes d'élémens, je prends les écarts de D autour de la moyenne, j'en forme la somme sans avoir égard aux signes, je marque les plus grands écarts dans les deux sens et j'en forme le tableau suivant.

Système.	Somme des écarts.	Écart moyen.	Plus grand écart. +	Plus grand écart. —	Écart extrême.
1	82′ 0″	7′ 27″	+21′ 52″	—14′ 50″	56′ 42″
2	110.40	11. 4	+22. 4	—18.55	40.59
3	91. 4	8.17	+22.47	—15.34	38.21
4	90.34	8.14	+17.21	—15.39	33. 0

Ma seconde combinaison est à tous égards la plus mauvaise et l'inspection seule des équations finales le faisait prévoir.

La quatrième donne la somme la plus petite pour les écarts extrêmes; les écarts positifs et négatifs sont à peu près égaux, mais la somme des écarts et l'écart moyen sont moindres dans le premier système.

On pourrait balancer entre le premier et le dernier système.

Celui des moindres carrés donne une plus grande somme d'erreurs, un plus grand écart moyen, une répartition moins égale entre les écarts positifs et négatifs.

Ce système est le plus probable, mais les astronomes préféreront peut-être celui qui donne de moindres erreurs et qui exige beaucoup moins de calcul.

Si nous prenons le milieu entre les quatre systèmes d'élémens nous aurons

Système.	Nœud.	Inclinaison.	Déclinaison.	Révolution.	Mouvement diurne sur l'équateur.
1	$2^s 20° 45' 7''$	$7° 19' 19''$	$5° 26' 53''$	$25^j\ 0^h\ 16'$	$14°4$
2	2.19.21.35	7.12.37	5.20.20	Révolution synodique.	Mouvement diurne sur l'écliptique.
3	2.20.33.40	7.16.33	5.26.13		
4	2.19.47.55	7.29. 4	5.19.39	$26^j\ 4^h\ 38'$	$14°4 + 0°2353 \sin 2(Æ - ☊)$
Milieu...	2.20.07. 4	7.19.23	5.23.16		

$$14°,4' : 14°,4 - 59',8'',33 = 14°,4' - 0°,59',139 = 14°,4 - 0,98565$$

$$= 14.4 : 13,41435 :: x : 25',0110, \quad x = \frac{25.011 \times 14°,4}{13.41435} - \frac{25.011 \times 28.8}{26.8287}$$

c. 13.41437...	8.8724303	$I = 7°,20'$	c. sin 1″ 5.3144251
14.4.......	1.1473671	$\frac{1}{2}I = 3.40$	$\tang^2 \frac{1}{2} I$ 7.6134844
	0.0197974	$847'',05 = 14',7'',05$.....	2.9279095
25',011....	1.3981311	ou $26^j, 4^h, 17'$.....	9.6989700
26.177....	1.4179285	réduct. $14',7''$, sin $2(Æ - ☊)$	0.2403634

53. Les élémens que nous avons trouvés diffèrent très-peu de ceux qu'on suppose ordinairement, à la réserve de la rotation qui n'est par un milieu que de 25j. ou 54 = 25j. 0h 16′ 36″. Les calculs partiels s'accordent à cet égard autant qu'on peut l'espérer.

Si les deux observations extrêmes paraissent suspectes à cause de la trop grande obliquité de la tache, et celles du milieu, parce que l'intervalle n'est pas assez grand, on voit au moins que les erreurs se sont compensées; car le milieu entre les quatre observations donne......

R = 25j. 0366, il paraît donc certain que les observations prouvent une rotation de 25 jours.

Une rotation de 25j. suppose un mouvem. diurne de	14°,24′
Une rotation de 25j. 10h suppose un mouvement	14. 9.50″
La différence est de	14.10

Nous avons dix jours d'intervalle, ce qui ferait 2° 21′ 40″ d'erreur sur la différence des deux ascensions droites extrêmes : et cela paraît impossible. Tout ce qu'on pourrait soupçonner, ce serait une erreur de 20 à 30′ provenant des deux longitudes. On voit en effet, par le calcul et la petitesse de l'inclinaison, que l'erreur des L se portera sur les Æ presque sans altération ; l'erreur du nœud paraît fort peu de chose et se réduirait à rien dans la comparaison des deux Æ dont on prend la différence.

An lieu d'avouer la possibilité d'une erreur de 2° sur la différence des ascensions droites, j'aimerais mieux supposer que la tache n'est pas parfaitement immobile ; qu'elle a eu dans l'intervalle un mouvement propre de deux degrés dans le même sens que le mouvement diurne. 2° ou 120′ de mouvement en dix jours feraient 12′ par jour.

54. Prenons pour unité le rayon de la terre ; le rayon du globe solaire sera $\frac{\sin\frac{1}{2}\delta}{\sin\varpi}$; le rayon du parallèle $\frac{\sin\frac{1}{2}\delta\cos D}{\sin\varpi}$; le chemin de la tache sur son parallèle $\frac{\sin\frac{1}{2}\delta\cos D\sin 12'}{\sin\varpi} = 0.3834$ demi-diamètre de la terre = 2444500 mètres, le mouvement horaire 101854, le mouvement pour une minute 1694m,2, le mouvement pour une seconde serait de 28m,24, et ce mouvement n'est pas invraisemblable ; si on le suppose irrégulier, il pourra expliquer l'écart des déclinaisons.

55. Enfin l'erreur, s'il y en a une, ne pourrait-elle pas venir de ce que la tache aura changé de figure, et qu'on n'aura pas toujours observé le même point. Toutes ces raisons me portent à croire qu'il est au moins fort incertain que les taches aient un mouvement, et qu'il est fort difficile de s'assurer de l'identité d'une tache, autrement que par des retours consécutifs, ou du moins assez peu éloignés pour qu'on n'ait pas à craindre l'erreur d'une révolution entière dans le nombre de celles qui ont eu lieu dans l'intervalle.

56. M. Lagrange, dans son Mémoire sur la Libration de la lune,

a donné une méthode qui ne diffère de la précédente que par les moyens qu'il a employés pour y parvenir, et en ce qu'il ne l'applique qu'à trois observations.

C'est par l'analyse toute pure que M. Lagrange a trouvé la formule, mais cette analyse est assez longue; la trigonométrie sphérique la donne par la seule inspection de la figure. Je n'ai point parlé de la méthode de Saint-Jacques de Silvabelle qui m'a paru pour le moins aussi longue et moins naturelle. Duséjour en a donné une qu'il estimait beaucoup, mais dans laquelle il a sans nécessité doublé tout le travail, et peut-être décuplé, sans qu'on ait la certitude d'arriver à plus de précision. Les élémens qu'il a trouvés par dix observations de Messier, se rapprochent en général de ceux de Cassini, à l'exception qu'il ne trouve que 6° 57′ pour l'inclinaison.

Cassini avait trouvé pour la révolution des taches 27j 12h 20′, d'où Lalande conclut 25j 14h 8′; mais par ses propres observations et divers calculs, il avait trouvé 25j 10h pour la rotation et 27j 7h 17′ 28″.

On s'étonnera peu de ces différences, si l'on songe d'abord à la difficulté des observations, puis à l'effet qu'une erreur légère dans l'observation peut produire sur les arcs hélioceutriques, et troisièmement au peu de certitude que nous avons de la parfaite immobilité des taches.

57. Je ne crois pas la durée de la rotation connue à 10 ou 12 heures près; Lalande la croyait certaine à deux près, et dans cette hypothèse, il avait cherché à la déduire plus exactement par des observations éloignées, c'est-à-dire, par le retour des taches qui lui paraissaient identiques; mais si l'incertitude est de 12 heures sur 25 jours, c'est-à-dire de $\frac{1}{50}$, au bout de 50 révolutions, rien n'assurera s'il faut compter 49, 50 ou 51 révolutions; de sorte que les observations anciennes, outre les erreurs énormes auxquelles elles sont sujettes, ne peuvent donner rien de sûr, parce qu'elles donneront toujours à fort peu près la rotation qu'on aura supposée. C'est ce dont je me suis convaincu par l'emploi des observations mêmes dont Lalande s'était servi.

58. Quand les astronomes étaient trop peu familiarisés avec l'analyse trigonométrique, et qu'ils n'avaient encore aucune des solutions que nous avons exposées ci-dessus, ils cherchaient à démêler les circonstances qui pouvaient abréger ou simplifier les calculs; notre formule (38) va nous indiquer d'elle-même ces circonstances.

Si

Si vous avez deux latitudes égales, elles donneront

$$\sin D = \sin\lambda \cos I - \sin L \cos\lambda(\sin I \cos N) + \cos L \cos\lambda(\sin I \sin N)$$
$$\sin D = \sin\lambda \cos I - \sin L' \cos\lambda(\sin I \cos N) + \cos L' \cos\lambda(\sin I \sin N)$$

d'où

$$o = (\sin L' - \sin L) \cos\lambda \sin I \cos N + (\cos L - \cos L') \cos\lambda \sin I \sin N$$

ou bien

$$o = (\sin L' - \sin L) \cos N + (\cos L - \cos L') \sin N,$$

d'où l'on tire

$$\tang N = \frac{\sin L - \sin L'}{\cos L - \cos L'} = \frac{2\sin\left(\frac{L-L'}{2}\right)\cos\frac{L+L'}{2}}{-2\sin\left(\frac{L-L'}{2}\right)\sin\left(\frac{L+L'}{2}\right)} = -\cot\tfrac{1}{2}(L+L'),$$

ou

$$\tang N = \tang[90° + \tfrac{1}{2}(L+L')].$$

En effet les deux latitudes sont égales; elles ont été observées à distances égales de la limite; ainsi la limite a dû arriver quand la longitude de la tache était moyenne arithmétique entre les deux longitudes observées; cette moyenne sera donc la longitude du pôle, si les deux latitudes sont australes; si elles sont boréales, il faudra ajouter 180° à $\frac{1}{2}(L+L')$.

59. Si vous avez une latitude égale o, ce qui sera souvent facile à trouver par interpolation, quand vous aurez une suite considérable d'observations d'une même tache, la formule (38) deviendra

$$\sin D = -\sin L \sin I \cos N + \cos L \sin I \sin N = -\sin I \sin(L-N).$$

équation qui ne peut avoir lieu si $D > I$.

Si vous avez deux latitudes dans les limites, ce qui ne sera pas impossible à démêler, vous aurez $\Delta = 90° - D = \frac{1}{2}(\Delta' + \Delta'')$; $I = \frac{1}{2}(\Delta'' - \Delta')$; il ne restera plus qu'une inconnue N dans chacune des deux équations

$$\sin D = \sin\lambda \cos I - \cos\lambda \sin I \sin(L-N) = \sin\lambda' \cos I - \cos\lambda' \sin I \sin(L'-N).$$

60. On pourrait résoudre le problème graphiquement avec un globe et un compas.

Placez sur le globe, les trois taches suivant leurs longitudes et leurs latitudes. Soit ♈C (fig. 14) l'écliptique de votre globe, placez-y les trois longitudes ♈A, ♈B, ♈C et les trois latitudes A*a*, B*b*, C*c*; menez de *a* en *b* un arc de grand cercle, et un autre de *b* en *c*; sur le milieu de ces arcs élevez les arcs perpendiculaires *m*P, *n*P qui iront se croiser au pôle. Mesurez la distance PE de ce pôle à celui de l'écliptique, ce sera l'inclinaison. Amenez ce pôle au méridien, le point culminant de l'écliptique sera la longitude du pôle. La rotation sera $=\frac{360°(T''-T')}{2mPn}$. P*a*, P*b*, PC seraient les distances polaires. La méthode de Boscovich donne une solution graphique encore plus commode (29).

Au reste, tous ces moyens n'étaient bons qu'au défaut de formules, et je me garderais bien de les employer ou de les conseiller aujourd'hui; on pourrait tout au plus les faire servir aux observations de Scheiner, ou d'Hévelius.

61. Nous avons vu que le nœud est à $2^s\ 20°$, ce qui a lieu vers le douze décembre; la terre sera dans le nœud de l'équateur, c'est-à-dire, dans le plan de l'équateur solaire; ce plan sera vu de la terre comme une ligne droite qui fera avec l'écliptique un angle de $7°\frac{1}{3}$; les pôles seront en P et en P′ (fig. 16) sur le bord du disque solaire. Une tache dans l'équateur traverserait le disque en allant selon la droite QR; car elles vont en montant, puisque la terre est dans le nœud ascendant et que les taches rétrogradent d'orient en occident; une tache qui aurait une déclinaison ☊D décrirait une droite *qr* parallèle à QR.

62. Dans toute autre position intermédiaire, le pôle étant en P (fig. 17), prolongez $EP = 7°\frac{1}{3}$, ensorte que $PQ = 90°$, menez le grand cercle QR perpendiculaire à PQ, QR sera l'équateur.

La terre étant toujours supposée au centre T de la sphère; dans le triangle EPT, vous connaissez $EP = 7°\frac{1}{3}$, $ET = 90°$, PET = différence de longitude entre la terre et le pôle P, nommez E cet angle

$$\cos PT = \sin TR = \cos E \sin PE \sin ET + \cos PE \cos ET = \cos E \sin PE$$
$$(\text{car } \cos ET = 0) \qquad = \sin PE \cos(T - P)$$
$$= \sin 7°\,20' \cos(♁ - 11^s\ 20°) = \sin 7°\,20' \cos(\odot - 5^s\ 20°)$$
$$= \sin 7°\,20' \cos(\odot + 6^s\ 10°).$$

Le même triangle vous donne

$$\cos ET \cos E = \cot PE \sin ET - \sin E \cot PTE,$$

ou $$\cot PE \sin ET = \sin E \cot PTE$$

$$\tang PTE = \sin E \tang PE = \tang I \sin(☊ - 11^s 20°) = \tang I \sin(\odot - 5^s 20°)$$
$$= \tang I \sin(\odot + 6^s 10°).$$

Ainsi à la droite du cercle de latitude TE menez une ligne qui fasse l'angle dont la tang = tang I sin($\odot + 6^s$ 10°). Si la tangente est négative TP sera à gauche de TE; prenez TP = δ sin angle dont le cosinus = sin I cos($\odot + 6^s$ 10°), P sera le pôle; δ est le demi-diamètre du soleil. Si le cosinus est négatif, le pôle visible sera P′ au-dessous de l'écliptique.

L'équateur ARB paraîtra comme une demi-ellipse dont le grand axe sera AB diamètre du soleil et le demi-petit axe sera TR = $\frac{1}{2}\delta$ sin 7° 20′ cos ($\odot + 6^s$ 10°). Les parallèles seraient des ellipses semblables et également inclinées. L'ellipse de l'équateur coupera l'écliptique en un point N, tel que NT = δ sin (☊ — ☋) = (2^s 20° — ☋) = δ sin ($\odot - 2^s$ 20°).

Sin TR sera l'élévation de la terre sur le plan de l'équateur. Si TR était négatif, c'est-à-dire, si $\odot + 6^s$ 10° était entre 90° et 270°, les ellipses au lieu de tourner leur concavité vers P tourneraient leur convexité vers ce pôle qui serait alors dans l'hémisphère invisible.

Dans tous les cas, le triangle PT*b* donnerait la demi-durée du tems qu'une tache *b* passerait dans l'hémisphère visible; or dans ce triangle nous connaissons T*b* = 90°, P*b* = 90° — D, TP par l'équation cos PT = sin I cos($\odot + 6^s$ 10°), nous aurons

$$\cot TPb = \frac{\cos Tb - \cos Pb \cos PT}{\sin Pb \sin PT} = -\cot Pb \cot PT = -\tang D \cot PT$$
$$= -\tang D \tang TR = -\tang D \tang \text{ élévation de}$$
la terre sur l'équateur solaire.

Connaissant ainsi l'angle RP*b* = TP*b*, vous direz 180° : RP*b* :: révolution de 27^j : tems pendant lequel la tache sera visible.

63. On ne s'occupe plus guère aujourd'hui de la rotation du soleil; on n'a aucun espoir de trouver des solutions plus simples et plus commodes; on sait fort bien qu'on ajoutera peu de choses à ce que l'on connaît de la rotation du soleil : ce phénomène est plus curieux qu'utile.

Les géomètres et les astronomes l'ont abandonné, il est du nombre

de ceux auxquels on ne doit songer qu'une fois dans la vie; mais tout astronome doit le calculer une fois au moins, ne fût-ce que pour savoir quelque jour, si l'inclinaison est constante, et si les nœuds sont toujours sensiblement à la même place; mais si les nœuds ont un mouvement et si l'inclinaison peut varier, on n'en aura la certitude qu'après un intervalle assez long pour que les variations surpassent de beaucoup l'erreur des observations.

Rotation de la Lune.

64. La rotation de la lune est encore plus lente que celle du soleil, et elle nous offre des phénomènes plus singuliers. Nous y emploierons les mêmes formules avec quelques attentions particulières qui tiennent principalement à ce que la lune ne se meut pas dans l'écliptique.

Soit EPQR (fig. 18) le disque apparent de la lune, PR le cercle de déclinaison qui le traverse par le centre C, EQ un arc parallèle à l'équateur, T une tache, les différences d'ascension droite et de déclinaison Ct et tT, l'angle TCt et l'angle géocentrique x sous lequel est vu CT se trouveront, comme on a vu pour le soleil, mais en ayant égard au mouvement de la lune en ascension droite pour la réduction du tems en degrés.

On calculera l'arc sélénocentrique qui répond à CT par la formule

$$\frac{CT}{\frac{1}{2}\text{demi} ☾} = \sin(x + C'T'), \qquad \text{d'où} \qquad C'T' = (x + C'T') - x.$$

On connaîtra $PCT = 90° - TCt$; on imaginera le cercle de latitude mené du centre C au pôle O de l'écliptique; on calculera l'angle OCP, ou l'angle de position par la formule

$$\cot OCP = \frac{\cos D \cot \omega}{\cos Æ} + \sin D \tang Æ.$$

On connaîtra donc OCT, on connaît déjà CT et CO distance apparente de la lune au pôle de l'écliptique. En effet, pour le moment de l'observation, on peut calculer la latitude apparente de la lune ou la latitude affectée de la parallaxe. Soit λ cette latitude, $-\lambda$ sera la latitude sélénocentrique du point de la terre occupé par l'observateur, nous aurons donc

$$\cos OT = \cos OCT \sin CO \sin CT + \cos CO \cos CT;$$

ce sera la distance de la tache au pôle de l'écliptique pour le centre de la lune.

65. Dans le même triangle on a

$$\cot COT = \frac{\cos OC \cot CT}{\sin C} - \cos OC \cot C,$$

ou bien

$$\cot(\text{longit. appar. } ☾ + 180° - \text{longit. sélénoc. tache}) = \cot \varphi$$
$$= \frac{\sin(90° + \text{latit. appar. } ☾) \cot \text{arc de distance}}{\sin \text{angle au centre de la lune}}$$
$$- \cos(90° + \text{latit. appar. } ☾) \cot \text{angle au centre},$$
$$= \frac{\cos \text{latit. appar. } ☾ \cot \text{arc de distance} + \sin \text{lat. appar. } \cos \text{angle au centre}}{\sin \text{angle au centre}}.$$

66. On pourrait varier ces formules, mais je choisis de préférence celles qui n'offrent aucune ambiguité pour les signes. On verra par ceux du numérateur et du dénominateur à quel quart appartient la cotangente. De l'équation $\varphi = \text{longit. appar. } ☾ + 180° - \text{longit. sélénoc. tache}$, on tire

$$\text{longit. sélénoc. tache} = \text{longit. appar. } ☾ + 180° - \varphi.$$

67. On fera les mêmes calculs pour chacune des observations; on cherchera le nœud, l'inclinaison, la déclinaison de la tache, les ascensions droites et la rotation par les formules qui ont servi pour le soleil. Il y manque pourtant une attention dont nous allons apercevoir la nécessité qu'on ne pouvait d'abord soupçonner. En la négligeant on trouvera cependant deux résultats extrêmement remarquables. Les nœuds de l'équateur coïncident avec les nœuds de l'orbite lunaire sur l'écliptique, et la durée de la rotation est égale à celle de la révolution sidérale de la lune. Si l'on y trouve quelque différence, elle ne passe pas les erreurs probables de l'observation et du calcul; et l'on a toujours trouvé cette ressemblance dès les premiers tems, comme aujourd'hui.

68. D. Cassini est le premier qui ait donné une idée juste et complète de ces phénomènes. Ils prouvent que nous avons mal calculé; car dans notre équation fondamentale $\sin D = \sin\lambda \cos I - \cos\lambda \sin I \sin(L-N)$,

nous avons supposé le nœud immobile comme celui de l'équateur solaire : or ce nœud coïncide toujours avec celui de l'orbite, il a donc un mouvement rétrograde de 3′10″,6 par jour.

Notre équation n'est bonne que pour la première observation; dans la seconde nous aurions dû faire

$$\sin D = \sin\lambda' \cos I - \cos\lambda' \sin I \sin(L' - N')$$

et en supposant $N' = N - m$, on devait faire

$$\sin D = \sin\lambda' \cos I - \cos\lambda' \sin I \sin(L' + m - N),$$

c'est-à-dire, qu'il fallait augmenter la seconde longitude du mouvement m du nœud, dans l'intervalle de la première observation à la seconde, par là nous aurions conservé la même inconnue N, et la formule tang N (n° 58) nous eût donné la position du nœud telle qu'elle était à la première observation. Il est clair que m qu'on ajoute à la longitude est de valeur différente pour chacune des observations; cette quantité est de 3′10″,6 pour chacun des jours écoulés depuis la première observation jusqu'à celle qu'on calcule; si l'intervalle entre deux observations est de 12 jours, m sera de 38′7″,7, mais l'intervalle peut-être d'une année et plus, et pour une année $m = 19° 19′ 43″,4$. On voit donc quelle est l'importance de cette remarque : Mayer dans son beau Mémoire sur la rotation de la lune, y a eu égard en calculant pour chaque observation, la position actuelle du nœud de la lune. Astr. de Lalande, T. III.

69. Soit ♈♎ (fig. 19) l'équateur, ♈♋♎ l'écliptique, ☊ le nœud de l'orbite lunaire, ☊L☋ l'orbite lunaire inclinée de 5° 9′ à l'écliptique ☊Q☋V sera l'équateur lunaire dont l'inclinaison a été trouvée de 1° 43′ environ; ensorte que cet équateur passe entre l'écliptique et l'orbite; qu'il est incliné de 1° 43′ à la première, et de 3° 26′ à la seconde. Les nœuds de l'équateur rétrogradent avec l'orbite, et la coïncidence est constante.

70. La seconde conséquence que nous avons à tirer des élémens trouvés est encore plus curieuse, et elle devait se prévoir. La lune tourne en $27^j\ 7^h\ 43'\ 3''$ sur son axe; ainsi une tache fait autour du pôle de rotation un mouvement de 360° en 27^j; mais la lune par son mouvement moyen autour de la terre fait aussi 360° en 27^j; le mouvement de ro-

tation est donc égal au mouvement moyen de la lune. Il en résulte que si la lune tournait dans un cercle et d'un mouvement égal, elle nous montrerait toujours la même face. En effet soit T (fig. 20) la terre, A le centre de la lune. Si la lune nous paraît tourner de A en B, de manière à décrire 90° en sept jours environ, pour un observateur qui se croirait immobile au centre A de la lune, la terre paraîtrait avoir avancé de 90° de T en T'; mais si dans le même tems la lune a tourné de 90° de *a* en *a'*, le point *a* se trouvera en *a'* vis-à-vis la terre T', comme il était vis-à-vis la terre T; donc la terre T verra toujours le point *a* au centre de la lune, donc la lune tournera toujours la même face à la terre; car ce que nous avons dit du mouvement de 90°, nous le dirons de ceux de 180°, 270° et de tout autre arc possible. Nous verrons donc toujours le même point *a* au centre de la lune, et toujours le même hémisphère *b'aa'* tourné vers le centre de la terre; le point *a*, dans ce mouvement, aura successivement regardé tous les points d'un grand cercle de la sphère céleste; il en est de même du point *b* et de tout autre.

71. Les anciens avaient remarqué que la lune nous présente toujours le même hémisphère; il est vrai que quelques-uns la regardaient comme un miroir qui ne faisait que réfléchir les objets terrestres; mais d'autres faisaient de la lune une terre qui a ses vallées, ses montagnes, ses mers; et puisqu'on croyait y voir un visage, ce qui est assez attesté par le titre que Plutarque a donné à l'un de ses Traités, et que nous ne voyons nulle part, qu'ils aient cru que ce visage changeât; comme la même idée s'est conservée parmi le peuple, il s'ensuit qu'on a tacitement été d'accord sur ce point, que la lune nous montre un visage qui est toujours le même.

72. Voyons maintenant ce qui doit résulter du mouvement inégal de la lune dans son orbite. Le mouvement de rotation paraît uniforme, il doit être égal au mouvement moyen de la lune. Soit M ce mouvement pour un tems quelconque; le mouvement vrai du centre de la lune sera $M - 2e\sin u$, en ne considérant que le terme principal de l'équation du centre. Que la lune se soit avancée de A en B (fig. 21), l'angle ATB sera $M - 2e\sin u$; menons B*a'* parallèle à TA, nous aurons $a'BT = M - 2e\sin u$; prenons $TBa = 2e\sin u$, nous aurons

$$a'Ba = M - 2e\sin u + 2e\sin u = M,$$

l'arc $a'a$ sera le mouvement de rotation de la lune. Le point a ne nous paraîtra plus répondre au centre de la lune, ce sera le point b; le point a sera donc moins avancé en longitude, d'un arc $ba = 2e \sin u$, ou plus exactement, d'un arc ba = somme de toutes les inégalités de mouvement en longitude. Nous supposons ces inégalités soustractives; si elles étaient additives, le point a paraîtrait plus avancé; si elles étaient nulles, le point a se retrouverait au centre.

Si la lune ne tournait pas sur elle-même, le point a regarderait constamment le même point du ciel, la ligne Aa deviendrait Ba' parallèle à la ligne AaT. Mais ce point a un mouvement de rotation $M = a'Ba$; il paraîtra donc en a; car le mouvement de rotation de la lune, comme celui du soleil, se fait d'occident en orient et suivant l'ordre des signes.

73. C'est là ce qu'on appelle *libration*, ou *balancement en longitude*; car le point a oscille autour du centre apparent de la lune; le point a ne peut osciller de 8° autour du centre, sans que les bords du disque ne changent d'une quantité de 8°, ou que nous ne gagnions 8° au bord suivant ou oriental de la lune, et que nous ne les perdions au bord précédent ou occidental. Je dis suivant ou précédent, selon l'ordre des signes. Toutes les taches qui seront dans l'écliptique paraîtront donc avoir un balancement égal; ou plutôt le balancement sera égal, mais il paraîtra moindre pour une tache plus éloignée du centre.

Supposons que l'arc ab (fig. 22) soit de 8°, c'est à peu près la somme des inégalités de la lune; que bc soit aussi de 8°, la corde bc sera égale à la corde ab; cependant l'angle bTc sera plus petit que l'angle aTb, parce que l'angle Tbc sera obtus, au lieu que Tab est sensiblement droit, et que $Tb > Ta$, $Tc > Tb$. On a

$$\tang bTc = \frac{bc \sin bcT}{Tc - bc \cos bcT} = \frac{\left(\frac{2 \sin \frac{1}{2} bc}{Tc}\right) \sin bcT}{1 - \left(\frac{2 \sin \frac{1}{2} bc}{Tc}\right) \cos bcT};$$

mais

$$bcT = 180° - bcx = 180° - \tfrac{1}{2}(ba'x) = 180° - \tfrac{1}{2}(ab + 180° + a'x)$$
$$= 180° - 90° - \tfrac{1}{2} ab - \tfrac{1}{2} a'x = 90° - \tfrac{1}{2} ab - a'x.$$

Mais $aTc = \tfrac{1}{2} a'x - \tfrac{1}{2} ac$; $\tfrac{1}{2} a'x = aTc + \tfrac{1}{2} ac$;

donc

$$bcT = 90° - \tfrac{1}{2} ab - \tfrac{1}{2} ac - aTc = 90° - \left(\frac{ab + ac}{2} + aTc\right),$$

et

et

$$\text{tang}\, b\text{T}c = \frac{\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}bc}{\text{T}c}\right)\cos\left(\frac{ac+bc}{2}+a\text{T}c\right)}{1-\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}bc}{\text{T}c}\right)\sin\left(\frac{ac+bc}{2}+a\text{T}c\right)},$$

ou, sans erreur bien sensible,

$$b\text{T}c = bc\cos\tfrac{1}{2}(ab+ac) = d.ab\cos(ab+\tfrac{1}{2}d.ab),$$

ce qui est la différentielle de l'arc *ab*, en négligeant la différence des distances T*a*, T*b*, T*c*, et en supposant qne tout arc *ac* qui a son origine au centre est vu comme son sinus. Ainsi le fuseau du globe lunaire dont la largeur sera *bc* libration en longitude, paraîtra d'autant moindre qu'il sera plus voisin des bords, parce que le cosinus sera plus petit.

74. Quand la lune est en L (fig. 22) dans le plan de l'écliptique, le centre L et le centre apparent *a* sont dans le plan de l'écliptique et dans une même droite T*a*L*a'*. Si le centre de la lune descend en L', le point *a* descendra en *a'*, et le point *b* en *b'*; le centre apparent *c'*, ponr la terre en T, différera du point *a'* de l'arc *a'c'* = latitude de la lune; la position du centre apparent pourra donc varier de 5° 8' sur le globe lunaire, soit au nord, soit au sud.

75. Soit EC (fig. 23) la section du globe lnnaire par l'écliptique; si la latitnde est nulle, EC paraîtra comme une ligne droite; quand la latitude sera de 5° 8', en place de EC on aura la demi-ellipse E*ac*, dont le demi-petit axe est le sinns de 5° 8'; si la latitnde est — 5° 8', la demi-ellipse sera E*bc*. Dans le premier cas, nous perdrons la vue d'un fusean de 5° 8' de largeur au nord; nous en gagnerons nn pareil an midi: ce sera le contraire dans les latitudes australes, et cet effet variera suivant la latitude; c'est ce qu'on appelle *libration en latitude*. Il y aura de même nne libration en ascension droite et en déclinaison.

76. Tontes ces librations diverses sont celles qu'on verrait dn centre de la terre. Pour un observateur à la surface, elles sont modifiées par les parallaxes. Voilà pourquoi, dans le calcnl des élémens de la rotation de la lune, nous avons employé les longitudes et les latitudes apparentes.

77. Pour connaître la position sélénocentrique de la tache, nous chercherons la position sélénocentrique de l'observateur qui a vu la tache, et cette position est toujours diamétralement opposée à celle du centre apparent de la lune.

Soit O (fig. 24) l'observateur, c le centre apparent de la lune; menez Oc et prolongez cette ligne de part et d'autre jusqu'à la sphère des étoiles; l'observateur verra en A le centre c de la lune; la lune verra l'observateur en B, or Oc est sensiblement nul en comparaison de AO, le point O peut être considéré comme le centre de la sphère céleste, et AO ou Ac comme un demi-diamètre.

C'est ainsi que les longitudes et les latitudes apparentes, la distance du centre apparent c à la tache T, l'angle que cette distance fait avec le cercle de latitude, nous ont donné la longitude et la latitude sélénocentriques de l'observateur et de la tache T.

78. Maintenant que nous connaissons le nœud N (fig. 25) de l'équateur lunaire sur l'écliptique, et l'inclinaison I, soit M le lieu moyen de la lune sur l'écliptique; nous connaîtrons MN, menons MmP au pôle de rotation, l'angle m sera droit, et nous aurons $\tang Nm = \cos I \tang NM$, et Nm mesurera l'angle au pôle NPM; nous aurons $mC = NC - Nm$, c'est-à-dire la distance de la tache au cercle de déclinaison PmM qui passe par le lieu moyen de la lune, et qui partagerait toujours en deux également le disque lunaire, sans les librations de toute espèce dont nous avons parlé. Ce cercle est celui auquel on rapporte tout; c'est le premier méridien de la lune, le plus facile à reconnaître, et celui duquel il est plus naturel de compter les ascensions droites; ainsi nous dirons qu'une tache qui serait en m, ou en général sur le cercle Pm, aurait $0°$ d'ascension droite; que l'arc mC mesure l'ascension de la tache dont BC est la déclinaison; cette déclinaison est constante, ainsi que la différence d'ascension droite mC, au lieu que l'ascension droite NC varie sans cesse avec le nœud.

79. Ces ascensions droites se nomment *longitudes sélénographiques*, les déclinaisons telles que BC, *latitudes sélénographiques*; ces dénominations ont été adoptées en imitation de ce qui est en usage en géographie, où l'on nomme *longitudes géographiques* les arcs de l'équateur compris entre un méridien quelconque et un méridien qu'on nomme *premier méridien*, et *latitudes géographiques*, les distances des divers points terrestres à l'équateur.

Cependant, pour empêcher que l'on ne confonde les longitudes et latitudes sélénocentriques, qui sont vues du centre de la lune et comptées sur l'écliptique, avec les longitudes et latitudes sélénographiques, qui se rapportent à l'équateur lunaire, il me semble qu'il eût été plus simple de désigner ces dernières par les noms d'*ascension droite constante* et de *déclinaison*, qui n'auraient pas donné lieu aux mêmes méprises.

C'est ainsi que Mayer avait trouvé, pour la tache connue sous le nom

de *Manilius*, distance au nœud sur l'équateur........	$2^s\ 7^\circ 54'$.
La longitude du nœud était alors................	9.26.15.
L'ascension droite était donc	$0^s\ 4^\circ\ 9'$.
Mais la longitude moyenne sélénocentrique de la terre, on la longitude moyenne géocentrique de la lune, augmentée de 180° et réduite à l'équateur, était.........	11.25. 7.
Ainsi la longitude sélénographique de Manilius est de..	0. 9. 2.
On peut faire ce calcul d'une maniere plus courte.	
Distance au nœud sur l'équateur.................	2. 7.54.
Distance de la lune à son nœud descendant, ou ☾"—☋.	1.28.52.
Longitude sélénographique de Manilius.......... —	0. 9. 2.

Cette longitude est occidentale, parce que la distance au nœud sur l'équateur était plus grande que la distance de la lune à son nœud descendant; l'expression générale est longit. sélénog. = ☾" — ☋ — dist. nœud sur l'équateur.

Si le résultat est positif, la longitude est orientale; elle est occidentale s'il est négatif.

80. La table de Mayer renferme 89 taches dont il avait déterminé les longitudes et les latitudes, soit directement par les moyens que nous venons d'exposer, soit par d'autres moyens plus expéditifs. Les longitudes vont depuis + 77° 26′ jusqu'à — 75° 10′. Le premier cercle de déclinaison passe entre les taches de Walthcrus et de Regiomontanus, à 10′ de la première et 35′ de la seconde. Ces taches ont 31° 40′ et 26° 44′ de déclinaison australe. (Voyez *Mayeri Opera inedita.*)

L'équateur lunaire passe à 6′ nord de Censorinus, à 7° 31′ nord de Pitatus, 2° 55′ sud de Dionysius, 5° 53′ nord d'Hipparque, 8° 57′ nord de Ptolémée, 1° 1′ nord de Lansbergius, 20° 31′ sud de Reinhold, 7° 47′ sud de Galilée, 5° 5′ nord de Grimaldi.

Pour connaître ces taches, voyez la Carte de Riccioli. *Almagest. nov.*, 1[er] vol.; c'est lui qui a donné aux taches les noms des astronomes. Hévelius avait fait de la lune une carte géographique où il avait transporté les mers, les montagnes et les régions les plus célèbres de la terre. La nomenclature de Riccioli est universellement préférée; elle a été adoptée pour toutes les cartes modernes. Voyez aussi la Sélénographie d'Hévelius.

Les mots *sélénographique* et *sélénocentrique* ont pour racine *σελήνη*, *luna*.

81. Pour trouver NC et BC par NA et BA, nous pourrions nous servir des quatre analogies qui servent pour tous les astres, quand on veut changer leurs longitudes et latitudes en ascension droite et en déclinaison; mais voici des formules plus expéditives.

Dans le triangle PET (fig. 15), on connaît

$$PET = 90^\circ + NET = 90^\circ + (\text{longit.} - \Omega),$$

compté sur l'écliptique; nous avons $PE = 1^\circ\ 43'$, ET = distance de la tache au pôle de l'écliptique; on aura

$$\text{tang}\,\mathit{AR} = \frac{\sin I \,\text{tang}\,\lambda}{\sin(90^\circ + L - \Omega)} - \cos I \cot(90^\circ + L - \Omega)$$

$$= \frac{\sin I \,\text{tang}\,\lambda}{\cos(L - \Omega)} + \cos I \,\text{tang}(L - \Omega)$$

$$= \frac{\sin I \,\text{tang}\,\lambda}{\cos(L - \Omega)} + \text{tang}(L - \Omega) - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} I \,\text{tang}(L - \Omega),$$

$$\text{tang}\,\mathit{AR} - \text{tang}(L - \Omega) = \frac{\sin I \,\text{tang}\,\lambda}{\cos(L - \Omega)} - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} I \,\text{tang}(L - \Omega),$$

$$\frac{\sin[\mathit{AR} - (L - \Omega)]}{\cos \mathit{AR} \cos(L - \Omega)} = \frac{\sin I \,\text{tang}\,\lambda}{\cos(L - \Omega)} - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} I \,\text{tang}(L - \Omega),$$

$$\sin[\mathit{AR} - (L - \Omega)] = \sin I \,\text{tang}\,\lambda \cos \mathit{AR} - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} I \sin(L - \Omega) \cos \mathit{AR},$$

$$\sin x = \sin I \,\text{tang}\,\lambda \cos(L - \Omega + x) - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} I \sin(L - \Omega) \cos(L - \Omega + x)$$

$$= \sin I \,\text{tang}\,\lambda \cos(L - \Omega) \cos x - \sin I \,\text{tang}\,\lambda \sin(L - \Omega) \sin x$$

$$- 2\sin^2 \tfrac{1}{2} I \sin(L - \Omega) \cos(L - \Omega) \cos x + 2\sin^2 \tfrac{1}{2} I \sin^2(L - \Omega) \sin x$$

$$= \sin I \,\text{tang}\,\lambda \cos(L - \Omega) - 2\sin I \,\text{tang}\,\lambda \cos(L - \Omega) \sin^2 \tfrac{1}{2} x$$

$$- \sin I \,\text{tang}\,\lambda \sin(L - \Omega) \sin I \,\text{tang}\,\lambda \cos(L - \Omega) - \sin^2 \tfrac{1}{2} I \sin 2(L - \Omega)$$

$$+ 2\sin^2 \tfrac{1}{2} I \sin^2(L - \Omega) \sin I \,\text{tang}\,\lambda \cos(L - \Omega)$$

$$= \sin I \,\text{tang}\,\lambda \cos(L - \Omega) - \sin^2 \tfrac{1}{2} I \sin 2(L - \Omega) - \tfrac{1}{2} \sin^2 I \,\text{tang}^2 \lambda \sin 2(L - \Omega)$$

$$+ \tfrac{1}{2} \sin^3 I \,\text{tang}\,\lambda \sin^2(L - \Omega) \cos(L - \Omega)$$

$$- \tfrac{1}{2} \sin I \,\text{tang}\,\lambda \cos(L - \Omega) \sin^2 I \,\text{tang}^2 \lambda \cos^2(L - \Omega)$$

$$= \sin I \tang\lambda\cos(L-\Omega) - \sin^2\tfrac{1}{2}I\sin 2(L-\Omega) - \tfrac{1}{2}\sin^2 I\tang^2\lambda\sin 2(L-\Omega)$$
$$- \tfrac{1}{3}\sin^3 I\tang^3\lambda\cos^3(L-\Omega) + \tfrac{1}{4}\sin^3 I\tang\lambda\sin 2(L-\Omega)\cos(L-\Omega)$$
$$+ \tfrac{1}{4}\sin^3 I\tang\lambda\sin^3(L-\Omega) + \tfrac{1}{4}\sin^3 I\tang\lambda\sin(L-\Omega),$$

$$x = 103'\tang\lambda\cos(L-\Omega) - 1',54\tang^2\lambda\sin 2(L-\Omega) - 0',77\sin 2(L-\Omega).$$

Pour la déclinaison de la tache, le même triangle donne

$$\cot PT = \sin D = \cos PE \cos ET + \sin PE \sin ET \cos PET$$
$$= \cos 1^\circ\ 43'\sin\lambda + \sin 1^\circ\ 43'\cos\lambda\cos(90^\circ + L - \Omega)$$
$$= \cos 1^\circ\ 43'\sin\lambda - \sin 1^\circ\ 43'\cos\lambda\sin(L-\Omega),$$

ou bien

$$\sin\lambda\cos 1^\circ 43' - \sin D = \sin 1^\circ\ 43'\cos\lambda\sin(L-\Omega),$$

ou

$$\sin\lambda - \sin D = 2\sin^2 51'\ 30''\sin\lambda + \sin 1^\circ\ 43'\cos\lambda\sin(L-\Omega),$$

ou

$$2\sin\tfrac{1}{2}(\lambda - D)\cos\tfrac{1}{2}(\lambda + D) = 2\sin^2 51'\ 30''\sin\lambda + \sin 1^\circ\ 43'\cos\lambda\sin(L-\Omega),$$

et

$$2\sin\tfrac{1}{2}(\lambda - D) = \frac{\sin 1^\circ 43'\cos\lambda\sin(L-\Omega)}{\cos\frac{1}{2}(\lambda + D)} + \frac{3',06\sin\lambda}{\cos\frac{1}{2}(\lambda + D)},$$

ou

$$\lambda - D = 1^\circ\ 43'\sin(L-\Omega) + 3'\tang\lambda,$$

ou enfin

$$D = \lambda - 1^\circ\ 43'\sin(L-\Omega) - 3'\tang\lambda,$$

à fort peu près; car dans ces calculs on doit se contenter des minutes, qu'on ne peut pas même espérer des observations.

82. Nous avons dit que les anciens avaient trouvé des montagnes et des vallées dans la lune. Les modernes les ont mieux vues; ils ont même tenté de les mesurer. Ces montagnes ont quelquefois d'énormes cratères; on voit de ces cratères ou puits dans les vallées et même dans les grands espaces auxquels Hévelius a donné le nom de *mers*, ce qui peut faire au moins douter que ce soient des mers véritables. Ces hauteurs et ces profondeurs se mesurent par les ombres.

83. Soit ABO (fig. 26) l'hémisphère éclairé de la lune, SO le rayon solaire tangent au globe lunaire, et O par conséquent l'un des points

du cercle qui sépare l'hémisphère éclairé de l'hémisphère obscur. Toute la partie OD sera donc dans l'ombre; mais si cette partie renferme une montagne assez élevée pour que son sommet M rencontre le rayon solaire SO, le point M sera lumineux, tandis que l'arc Oa sera obscur; mesurez la distance du point M au cercle terminateur de l'ombre, vous en déduirez l'arc aO, et la hauteur aM de la montagne

$$= \text{CO} \tang aO \tang \tfrac{1}{2} aO = \text{CO}.\tang C.\tang \tfrac{1}{2} C.$$

Soit R le rayon de la terre, ϖ la parallaxe horizontale, δ le diamètre de la lune.

$$\frac{R}{\sin \varpi} = \text{TC} = \text{distance de la lune à la terre};$$

$$\text{CO} = \frac{R \sin \frac{1}{2} \delta}{\sin \varpi} \;:\; aM = \frac{R \sin \frac{1}{2} \delta \tang aO \tang \frac{1}{2} aO}{\sin \varpi} = \frac{\frac{1}{2} R \sin \frac{1}{2} \delta \tang^2 aO}{\sin \varpi};$$

menez Om perpendiculaire à TO,

$$\text{MO} = \text{CO} \tang aO = \frac{mO}{\cos \text{MO}m} = \frac{\text{TO} \tang \text{OT}m}{\cos(\text{MOT} - 90^\circ)} = \frac{\text{TO} \tang \text{OTM}}{\sin \text{MOT}},$$

$$\tang aO = \frac{\text{TO}}{\text{CO}} \cdot \frac{\tang \text{OTM}}{\sin \text{MOT}} = \frac{\tang \text{OTM}}{\sin \frac{1}{2} \delta \sin \text{MOT}} = \frac{\tang \text{OTM}}{\sin \frac{1}{2} \delta \sin \text{TOS}} = \frac{\tang \text{OTM}}{\sin \frac{1}{2} \delta \sin \text{TCS}},$$

$$aM = \frac{\frac{1}{2} R \sin \frac{1}{2} \delta}{\sin \varpi} \cdot \frac{\tang^2 \text{OTM}}{\sin^2 \frac{1}{2} \delta \sin^2 \text{TCS}} = \frac{\frac{1}{2} R \tang^2 \text{OTM}}{\sin \varpi \sin \frac{1}{2} \delta \sin^2 \text{TCS}} = \frac{R \tang^2 \text{OTM}}{\sin \delta \sin \varpi \sin^2 \text{TCS}},$$

vous aurez la hauteur aM en parties du rayon R de la terre.

84. Soit maintenant *bacd* (fig. 27) un des puits; on observera l'instant où l'ombre couvre entièrement et bien juste le fond ac; alors on aura

$$ba = ac \cot b = ac \cot \text{distance du soleil au zénit du puits}.$$

On mesure l'angle T sous lequel paraît ac; $ac = \frac{R \sin T}{\sin \varpi}$, et $ba = \frac{R \sin T \cot N}{\sin \varpi}$; il reste à trouver la distance N du soleil au zénit du puits. On détermine la position du puits par rapport au centre de la lune; on place sur la figure le centre de la partie éclairée. Soit k ce centre (fig. 28); $N = ZbS = ZCS + bSC$. On connaît kb, et par conséquent $kCb = ZCS$; alors on a Cb, CS, et l'angle compris; on peut calculer les autres angles.

Au reste, tous ces calculs ne sont que de curiosité et ne peuvent être susceptibles d'une grande précision. Nous en dirons autant des calculs qu'on a proposés pour prédire l'instant où, dans l'éclipse de lune, l'ombre doit atteindre ou quitter telle ou telle tache, ou bien

pour se servir de telle ou telle tache, au lieu du bord de la lune, pour mesurer la distance de la lune à une étoile dont elle passe fort près, sans pourtant l'éclipser. On ne peut avoir la position apparente de la tache, sans connaître bien parfaitement les élémens de la rotation et la position de la tache, par sa longitude sur l'équateur et sa distance à cet équateur, sans calculer la libration et la parallaxe: ces calculs sont excessivement longs et ne peuvent donner qu'une exactitude très-médiocre; on aura mieux, par d'autres moyens, avec moins de peine.

85. Il nous reste à exposer la cause physique qui détermine la lune à nous montrer toujours la même face. Il faut voir pour cela le beau Mémoire de M. Lagrange. Il nous suffira de dire ici, qu'en vertu de l'attraction, la lune a dû s'alonger vers la terre, de manière que son globe, en le supposant primitivement rond et fluide, a dû prendre la forme d'un ellipsoïde irrégulier, s'alonger dans les deux sens opposés, mais quatre fois plus du côté de la terre que de l'autre côté, et qu'ainsi l'un des hémisphères est plus lourd que l'autre et retombe toujours du côté de la terre par cet excès de poids.

86. La terre est pour les habitans de la lune une espèce de lune bien plus grande; mais la terre n'est visible que pour l'hémisphère que la lune nous montre toujours. Seulement la terre doit s'élever de tems en tems de quelques degrés, pour l'horizon des taches que la libration nous découvre successivement. Le point de la lune qui nous paraît au centre de l'hémisphère visible, doit toujours voir la terre près de son zénit, d'où elle ne s'écarte que de 8° environ, en vertu de la libration.

Gregori s'est donné la peine d'exposer en détail tous les phénomènes de la terre pour un habitant de la lune; mais si elle en a, l'Astronomie doit être pour eux beaucoup plus compliquée que pour nous. Sans doute ils auront commencé par se croire immobiles au centre de l'univers; ils auront fait tourner pour eux le soleil en $29\frac{1}{2}$ jours, et la terre en 27; car quoique la terre leur paraisse conserver à peu près la même distance au zénit, ils doivent s'appercevoir qu'elle fait en 29 jours le tour du ciel; mais ils auront attribué ces mouvemens au ciel ou à la terre. Il a dû être pour eux fort pénible de s'élever à l'idée que la terre est le centre de leurs mouvemens, et le soleil le centre des mouvemens de la terre et des autres planètes. Si le système de Copernic a trouvé si long-tems des incrédules, s'il n'est universellement reconnu que

depuis cent aos au plus, on peut croire qu'il n'est pas même imaginé dans la lune.

87. Nous sommes certains que la lnne tourne toujours la même face vers la terre; nous avons quelques raisons pour soupçonner qne c'est une loi générale pour tous les satellites, dont la rotation a la même durée que la révolution autour de la planète principale. L'observation a paru confirmer ce soupçon pour quelques satellites.

Si un satellite S (fig. 29) tourne toujours le même point *a* vers la planète principale P, il tournera à chaque instant un point différent vers la terre. Supposez un poiot quelconque *b*; l'arc *ab* compris entre les deux points sera la mesure de l'angle an centre du satellite, entre la planète et la terre, et toutes les fois que cet angle reviendra le même du même côté, la terre verra le même point *b*.

88. On a remarqué que certains satellites, toujours difficiles à voir, à cause de leur petitesse, deviennent tout-à-fait invisibles dans une partie de leur orbite, et ce n'est pas celle où ils paraissent le plus voisins de leur planète. Pour expliquer ce phénomène, on peut penser que toutes les parties de la surface du satellite ne sont pas également propres à réfléchir la lumière. Soit *b* le centre de cette partie moins brillante; toutes les fois que *b* sera tourné vers la terre, le satellite sera invisible; l'arc $PST = ab$ étant redevenu le même, et PS étant constant, l'angle à la terre ne pourra varier que par le changement de distance PT; en effet, $PS : PT :: \sin T : \sin ab$, ou $r : D :: \sin T : \sin ab$, on $\sin T = \frac{r \sin ab}{D}$; de $D \sin T = \text{constante}$, on tire

$$dD \sin T + D \cos T dT = 0, \quad dD \sin T = -D \cos T dT,$$
$$\frac{dD}{dT} = -D \cot T.$$

Quand le satellite sera de l'autre côté en S', présentant toujours le point *a* à sa planète, l'éloogation T sera bien la même; mais l'arc *ab* aura une position différente, un autre point *c* sera touroé vers la terre, nous verrons une face très-différente, et le satellite sera visible. C'est ainsi que le dernier satellite de Saturne, c'est-à-dire le plus éloigné des sept qui circulent autour de cette planète; celui qu'on devrait

devrait distinguer le mieux disparaît presque toujours quand il est à l'orient de Saturne.

Cependant on trouve dans les Mémoires de l'Académie, pour 1707, page 96, une observation de Cassini, qui, pendant le mois d'octobre 1705, a vu ce satellite dans la partie orientale, *aussi bien que dans la moitié occidentale, où il avait toujours été visible.* Sur quoi l'historien de l'Académie ajoute : « que les philosophes n'ont point de » regret à ces petits commencemens de systèmes que la nature dément » ensuite; ils ne les aiment qu'antant qu'ils la représenteraient, et non » parce qu'ils leur appartiennent. »

Rotation des Planètes.

89. Les formules exposées ci-dessus serviraient également pour les planètes. Mercure est si près du soleil, si petit et si éclatant, qu'il est difficile de remarquer sur son disque un point bien distinct dont on puisse observer le mouvement; d'ailleurs il suit toujours le soleil de si près, qu'à peine l'observation serait commencée qu'on verrait la planète se coucher, si c'était le soir, ou que le soleil viendrait rendre la tache invisible, si c'était le matin. On ne pourrait donc observer chaque jour qu'un arc fort petit d'un très-petit globe, et quand on reverrait le lendemain la tache observée la veille, on douterait si le mouvement mesuré serait le mouvement total, ou s'il faudrait y ajouter une ou plusieurs révolutions de 360°.

90. Malgré ces difficultés, M. Schroëter a observé la rotation qu'il trouve de $24^h\ 2'$ ou $4'$; il a reconnu, de plus, que l'axe de rotation fait avec l'écliptique un angle considérable dont il n'a pas donné la mesure; il croit à Mercure une atmosphère assez dense, et des montagnes beaucoup plus hautes que celles de la terre. Quant à l'atmosphère, on l'avait soupçonnée dans quelques passages sur le soleil, mais le fait ne paraissait pas assez constaté. Le résultat des recherches de M. Schroëter est contenu dans les propositions suivantes (*Neueste Beytrage*, 1800, pag. 180).

Le diamètre de Mercure à la distance moyenne, est de 6'',02.

On n'y remarque aucun aplatissement sensible.

Il y a des montagnes qui présentent de longues ombres.

Ces montagnes sont plus hautes que celles de Vénus à proportion

des deux diamètres; elles sont placées dans l'hémisphère austral comme sur Vénus et sur la terre.

Son équateur est considérablement incliné à l'orbite, et les différences des jours et des saisons doivent être très-grandes; son atmosphère est du genre de celle de Vénus et assez dense; le disque n'offre pas de bandes ni de taches aussi sensibles que celles de Mars, Jupiter et Saturne.

Sur la terre, la hauteur du Chimboraço est $\frac{1}{1017}$ du rayon de la terre.

Les montagnes de la lune sont $\frac{1}{214}$ du demi-diamètre.

Celles de Vénus sont $\frac{1}{144}$ du demi-diamètre.

Celle de Mercure sont $\frac{1}{126}$.

Par de nouvelles recherches, il trouvait la période de la rotation de $24^h\,5'\,30''$.

91. La rotation de Vénus est encore fort difficile à reconnaître, par des raisons de même genre. Cassini Ier avait trouvé 23^h et quelques minutes pour le tems de la rotation; l'axe de Vénus lui parut faire un angle d'environ $75°$ avec celui de l'écliptique. La planète étant dichotome, il avait observé un point brillant qui suivait presqu'exactement la ligne des cornes; ainsi le mouvement était presque perpendiculaire au plan de l'écliptique; il n'osait assurer cependant si le mouvement observé était une partie du cercle diurne ou seulement une libration.

Bianchini crut qu'il s'était trompé et que le tems de la rotation était de $24^j\,8^h$. Voyez son Ouvrage *Hesperi et phosphori nova phænomena*.

Cassini II fit remarquer que les observations de Bianchini, ainsi que celles de D. Cassini pouvaient s'expliquer par une rotation de 23^h 21 à 22', au lieu que la rotation de $24^j\,8^h$ ne pouvait rendre raison des apparences observées par Cassini. Les astronomes penchaient pour ce dernier, d'autant plus que Bianchini n'avait pu faire ses observations d'une manière suivie, parce qu'une maison voisine lui dérobant Vénus, il avait été obligé de transporter son télescope du palais dans le jardin.

M. Schroëter a décidé le procès en déterminant une rotation de $23^h\,21'\,19''$. Quant à l'inclinaison les trois astronomes la font de $75°$ environ. Le nœud serait à $10^s\,15°$.

92. C'est une chose digne de remarque que les équateurs des deux

planètes inférieures sont presque perpendiculaires à l'écliptique, de laquelle se rapprochent considérablement les équateurs des planètes supérieures entre lesquelles la terre paraît tenir une espèce de milieu, puisque son équateur fait un angle de 23° 28′ avec l'écliptique.

Il en résulte que si les jours moyens de Vénus et de Mercure sont presqu'égaux à ceux de la terre, les jours vrais et les saisons doivent éprouver des variations bien plus grandes, les zônes torrides y sont d'environ 150° sur 180. L'on conçoit quelles doivent être les ténèbres et le froid pour l'un des pôles quand le soleil n'est qu'à 15° du pôle opposé, et quels sont, et l'éclat, et la chaleur du jour quand le soleil pendant des mois entiers passe à peu de distance du zénit. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à calculer les tables des climats, en supposant la déclinaison de 75° au lieu de 23° 28′.

93. L'aplatissement de ces deux planètes ne doit pas différer beaucoup de celui de la terre, mais il est imperceptible même pour Vénus, puisqu'en le supposant $\frac{1}{300}$ il n'y aurait qu'un dixième de seconde de différence entre le rayon de l'équateur et l'axe de rotation.

L'atmosphère de Vénus est considérable, et M. Schroëter a calculé que la réfraction horizontale y devait être de 30′ 34″.

Pour arriver à ces résultats, M. Schroëter s'est servi principalement d'une montagne placée vers la corne australe de Vénus. Nous avons dit que la ligne des cornes est toujours un diamètre. Les cornes du croissant d'un globe bien uni seraient très-aiguës. M. Schroëter remarqua qu'il n'en était pas ainsi toujours des cornes de Vénus et de Mercure; la corne boréale avait toujours la même figure pointue, mais la corne australe paraissait quelquefois ronde ou obtuse, ce qui indiquait une montagne qui couvrait de son ombre la partie *co*, *fig.* 30, ensorte que la ligne des cornes paraissait A*o* et non pas AC, mais en *d* au-delà de *o*C il remarquait un point lumineux qui devait être le sommet d'une autre montagne qui voyait le soleil quoiqu'il ne fût pas dans l'hémisphère qui devait seul être éclairé.

94. Si l'axe de rotation faisait un angle de 90° avec l'axe de l'écliptique, AC serait le diamètre de l'équateur de Vénus; soit *eq* un diamètre incliné de 15° sur AC, il fera un angle de 75° avec l'écliptique EL; la montagne *d* sera dans la partie australe.

95. Pour que la corne paraisse obtuse et que la montagne *d* présente un point lumineux, il faut que les deux montagnes se trouvent à la fois et au bord du disque, et à la limite de la lumière et de l'ombre. Cette situation ne peut être que passagère, car la rotation fera monter *d* dans la partie éclairée, ou l'abaissera dans la partie obscure, et dans les deux cas, *d* cessera d'être visible. Mais si la rotation est de $23^h\ 21'$, le lendemain on verra *d* reparaître $39'$ plus tôt, car du jour au lendemain, la limite de la lumière et de l'ombre varie peu; on pourra donc avoir plusieurs observations consécutives, et l'on pourra voir si elles s'accordent avec la rotation que Cassini II a calculée, en supposant que la tache vue par son père était la même que celle qui fut vue depuis par Bianchini.

En répétant à différentes époques des observations pareilles, on saura à fort peu près la correction dont la période de Cassini peut avoir besoin. Connaissant ainsi la valeur très-approchée de la période, on la rectifiera par des observations plus éloignées. Ainsi M. Schroëter a trouvé qu'un intervalle de $20^j\ 11^h\ 15'$ entre deux apparitions de la montagne, étant divisé par $23^h\ 21'$, donnait 21.005 révolutions; qu'un intervalle de $121^j\ 14^h\ 25'$, divisé par $23^h\ 21'$, donnait 125.01 révolutions; qu'un intervalle de $142^j\ 1^h\ 40'$ donnait 146.02 révolutions; qu'un intervalle de $155^j\ 18^h\ 11'$ donnait 165.09 révolutions. Toutes ces comparaisons prouvent que la révolution $23^h\ 21'$ est un peu trop courte. Ces intervalles auraient dû donner 21, 125, 146 et 165 révolutions justes, en supposant toutefois que les observations fussent sûres à la minute, ce qui n'est pas tout-à-fait vrai. Quoi qu'il en soit, en divisant chacun de ces intervalles par 21, 125, 146 et 165, on aura autant de fois la durée de la révolution, telle qu'elle résulte des deux observations comparées; on prendra un milieu proportionnel entre toutes, et on aura du moins le résultat le plus probable. C'est ainsi que M. Schroëter a trouvé $23^h\ 21'\ 19''$. Voyez son ouvrage : *Aphroditographische fragmente*, première partie. On aurait la correction de la période supposée, en faisant, par exemple,

$$\text{correction} = \left(\frac{0.09}{155,09}\right) 23^h\ 21' = +\ 45'',85,$$

ou

$$\left(\frac{0.02}{146,02}\right) 23^h\ 21' = +\ 15'',51.$$

96. Ceci suppose pourtant que c'est au bout d'un nombre entier de

périodes, que la montagne doit se trouver à la pointe du croissant. Pour que cela fût rigoureusement vrai, il faudrait que l'hémisphère visible et l'hémisphère éclairé revinssent exactement les mêmes, que Vénus, la terre et la montagne se retrouvassent dans la même situation respective, ce qui est difficile; mais il ne s'en faudra jamais d'une révolutiou entière de la tache, ct si l'intervalle est considérable, l'erreur, divisée par un grand nombre, deviendra peu sensible.

97. Cassini avait trouvé pour la rotation de Mars $24^h\ 40'$ ct une inclinaison fort petite; Maraldi $24^h\ 39'$; Herschel $24^h\ 39'\ 21''\frac{2}{3}$, et l'inclinaison $30°\ 18'$ sur l'écliptique ou $28°\ 42'$ sur l'orbite, et le nœud en $2^s\ 17°\ 47'$, l'aplatissement $\frac{1}{16}$.

98. Ponr Jupiter, Cassini et Maraldi font la rotation de $9^h\ 51'$ ou $56'$; Herschel de $9^h\ 51'\ 46''$ à $9^h\ 55'\ 40''$, l'aplatissement $\frac{1}{14}$ environ. M. Schroëter a trouvé $9^h\ 55'\ 33''$. Ils faisaient l'inclinaison de $2°$ à $3°$ sur l'orbite de Jupiter. Mais par les éclipses des satellites de Jupiter, d'après la théorie de M. Laplace, j'ai trouvé $3°\ 12'\ 24''$, et l'aplatissement $\frac{1}{13}$ environ.

Jupiter est remarquable par des bandes dont l'une parait être dans l'équateur même, et l'autre dans un parallèle voisin. Quelquefois on voit trois bandes, rarement on en voit davantage. M. Messier en a vu une fois un si grand nombre, que le disque en paraissait tout couvert. Ses qnatre satellites tournent autour de lui daus des plans qui sont peu inclinés à son équateur.

99. On n'avait pu observer la rotation de Saturne. M. Herschel a trouvé 10^h et quelques minutes, et l'aplatissement de $\frac{1}{11}$; et depuis il a cru remarquer que le plus grand diamètre n'est pas celui de l'équateur, mais celui qui lui est incliné de $46°$. M. Bugge croit l'aplatissement de $\frac{1}{3}$, ce qui paraitra bien fort; il en conclut une rotation de 6 heures.

100. Mais Saturne est remarquable par un corps fort singulier qui est dans le plan de son équateur et qui l'entoure de toutes parts à une certaine distance, comme l'horizon entoure la terre ou le ciel dans un globe terrestre ou céleste. Nous en traiterons dans un article particulier. Six des satellites de Saturne circulent dans le plan de l'anneau, le septième est le seul qui s'en écarte sensiblement, ou de $30°$ environ.

101. La planète d'Herschel ou Uranus a six satellites dont les orbites sont presque perpendiculaires à l'écliptique, Herschel a cru lui trouver un anneau. Quant à la rotation, on doit la présumer par analogie, mais

il est douteux qu'on puisse jamais l'observer; il serait bien curieux cependant de constater au moins dans quel sens elle se fait, si elle est perpendiculaire à l'écliptique comme les orbites des satellites, et si la plus éloignée de toutes les planètes de notre système ressemble en cela aux planètes inférieures; mais il reste sur ces satellites et cet anneau bien d'autres choses à éclaircir.

102. Quand on a déterminé, par les méthodes expliquées, l'inclinaison de l'équateur sur l'écliptique et le lieu des nœuds, on en déduit facilement l'inclinaison et le nœud sur l'orbite.

Soit EOQC l'écliptique (fig. 31), OR l'orbite de la planète, RQ son équateur. On connaît le nœud O de la planète et son inclinaison ROQ, le nœud de l'équateur et l'inclinaison RQC, le triangle RQO donne

$$\cos R = \cos QO \sin O \sin Q - \cos O \cos Q\,;$$

ou

$$\cos I'' = \cos(☊' - ☊) \sin I \sin I' + \cos I \cos I',$$

puis

$$\sin R : \sin OQ :: \sin Q : \sin OR$$

lieu du nœud sur l'orbite. On peut varier cette solution de plusieurs manières.

Ce calcul est rarement nécessaire pour trouver les phénomènes qui dérivent de la rotation, il est plus simple et plus général de rapporter le tout à l'écliptique.

On peut cependant calculer ces phénomènes avec les élémens rapportés à l'orbite de la planète : en voici les moyens.

103. Soit P le pôle de rotation (fig. 32), O le pôle de l'orbite RB, AC l'équateur, T le lieu de la terre vue du centre de la planète.

La longitude planéticentrique de la terre se calcule par les mêmes formules que le lieu géocentrique des planètes; la seule différence est qu'on rapporte tout à l'orbite de la planète, que l'argument de latitude héliocentrique est la distance de la terre au nœud de l'écliptique sur l'orbite; c'est la longitude de la terre sur l'écliptique qui se réduit à l'orbite par la soustraction de

$$\frac{\tang^2 \frac{1}{2} I \sin 2(♁ - ☊)}{\sin 1''} - \frac{\tang^4 \frac{1}{2} I \sin 4(♁ - ☊)}{\sin 2''} + \text{etc.}$$

104. Supposons que N, fig. 33, soit le nœud ascendant de l'orbite, C le lieu de la terre sur l'écliptique, Na sera la distance au nœud sur l'orbite

et Υa la longitude réduite, Ca sera la latitude héliocentrique de la terre; elle sera australe dans la première moitié de l'argument, et toujours de dénomination contraire à celle qu'aurait eu la planète en calculant pour l'écliptique.

Remarquez encore que la terre est planète inférieure pour une planète supérieure, et réciproquement.

105. Vous connaîtrez donc OT = 90° — latitude planéticentrique de la terre; fig. 32

$$POT = 90° + ♁ - ☊$$
$$PO = \text{inclinaison de l'équateur sur l'orbite,}$$
$$\cos PT = \sin TV = \cos PO \cos OT + \cos POT \sin PO \sin OT$$
$$= \cos I \sin\lambda - \sin I \cos\lambda \sin(♁ - ☊),$$

TV sera l'élévation de la terre sur le plan de l'équateur, qui détermine le demi-petit axe de l'ellipse.

$$\sin(90°+ ♁ - ☊) = \cos(♁ - ☊) : \sin PT :: \sin PO : \sin T = \frac{\sin PO \sin PT}{\cos(♁ - ☊)}$$

T sera l'angle apparent entre l'axe de rotation et l'axe de l'orbite sur le disque de la planète. Soit AOB ce disque (fig. 34), AB l'orbite, OTR son axe; menez le diamètre QTS qui fasse l'angle trouvé T avec OR, EV qui lui soit perpendiculaire, l'arc TP = EQ cos TV déterminera le lieu du pôle, EV sera le grand axe de l'ellipse, ET sin TV sera le demi-petit axe et E*b*V la demi-ellipse de l'équateur. Mais il est plus simple, pour toutes sortes de raisons, de tout rapporter à l'écliptique.

Soit donc dans la même figure 32, P le pôle de rotation, O celui de l'écliptique. Calculez ou prenez dans une éphéméride la longitude géocentrique de la planète, ajoutez-y 180°, vous aurez la longitude planéticentrique de la terre sur l'écliptique.

106. La latitude planéticentrique de la terre sera égale à la latitude géocentrique de la planète prise avec un signe contraire.

En effet, soit T le globe de la terre (fig. 35), EC l'écliptique et TO son axe, P le globe de la planète; la distance géocentrique de la planète au pôle de l'écliptique sera OTP = 90° + CTP = 90° + latitude géocentrique australe.

Soit maintenant PO parallèle à TO ou perpendiculaire à EC; PO est aussi l'axe de l'écliptique à cause de T*p* qui est nulle en comparaison du rayon de la sphère céleste; les deux points O ne sont qu'un même

point; les lignes TO, pO une même ligne; la distance de la terre au point de l'écliptique et vue du centre de la planète $= OPT = 180° - OTP = 180° - 90° -$ latit. géoc. $= 90° -$ latit. géoc.

107. D'après cela, la formule ci-dessus

$$\sin TV = \cos I \sin \lambda - \sin I \cos \lambda \sin(♄ - ☊)$$

deviendra

$$\sin TV = -\cos I \sin \lambda + \sin I \cos \lambda \sin(G - ☊);$$

G étant la longitude géocentrique de la planète $= 180° + ♄$; pour plus d'uniformité, appelons G la longitude géocentrique et g la latitude géocentrique, nous aurons

$$\sin TV = \sin I \cos g \sin(G - ☊) - \cos I \sin g$$

et TV sera toujours l'élévation de la terre sur le plan de l'équateur qui déterminera l'ouverture de l'ellipse comme ci-dessus.

Si $TV = 0$, l'ellipse se réduira à une ligne droite.

Si TV est négatif, la terre sera au-dessous du plan de l'équateur, et la demi-ellipse visible sera au-dessus du grand axe.

Si $TV = I$, l'ellipse aura la plus grande largeur qui soit possible, on aura

$$\sin I = \sin I \cos g \sin(G - ☊) - \cos I \sin g,$$
$$1 = \cos g \sin(G - ☊) - \cot I \sin g,$$
$$\sin(G - ☊) = \sec g + \cot I \tang g,$$
$$\sin(G - ☊) = \frac{1 + \cot I \sin g}{\cos g} = \frac{\sin I + \cos I \sin g}{\sin I \cos g}.$$

De l'anneau de Saturne.

108. Si l'anneau de Saturne est un plan qui se confonde avec celui de l'équateur, nous aurons tous les phénomènes de cet anneau par l'équation précédente. S'il est un plan différent, l'équation n'en sera pas moins exacte, seulement les valeurs de I et du nœud seront d'autres nombres que nous allons déterminer. Soit $TV = E$, N étant la longitude du nœud, nous aurons

$$\sin E = \sin I \cos g \sin(G - N) - \cos I \sin g$$
$$= \sin I \cos g \sin G \cos N - \sin I \cos g \cos G \sin N - \cos I \sin g,$$
$$\frac{\sin E}{\cos I} = \cos g \sin G (\tang I \cos N) - \cos g \cos G (\tang I \sin N) - \sin g.$$

Cette

Soit $E = o$, c'est-à-dire, que la terre se trouve pour le moment dans le plan de l'anneau, nous aurons

$$\sin I \cos g \sin(G - N) = \cos I \sin g, \quad \text{ou} \quad \sin(G - N) = \cot I \tang g.$$

Dans ce cas, nous ne verrons l'anneau que par son épaisseur, et si cette épaisseur est fort peu de chose, l'anneau pourra cesser d'être visible ; et Saturne paraîtra rond comme une autre planète, c'est ce qu'on observe en effet deux fois à chaque révolution de Saturne, c'est-à-dire, tous les quinze ans. L'anneau n'est plus visible que dans les plus forts télescopes, tels que ceux de Herschel.

109. L'anneau peut encore disparaître par une autre cause. C'est quand le soleil se trouve dans le plan de l'anneau; car alors il n'en éclaire que l'épaisseur, la surface de l'anneau ne recevant aucun des rayons solaires devient invisible. Ce phénomène aura lieu quand la hauteur du soleil sur le plan sera $= o$.

Soit ϵ cette hauteur; appliquons au soleil tous les raisonnemens que nous avons faits pour la terre, nommons H la longitude héliocentrique de Saturne, et h la latitude héliocentrique, nous aurons de même

$$\sin \epsilon = \sin I \cos h \sin(H - N) - \cos I \sin h,$$

équation qui dans le cas de $\epsilon = o$ se réduit à

$$\cot h \sin(H - h) = \cot I.$$

Cette équation n'est vraie que pour le centre du soleil.

110. Soit ABC l'anneau (fig. 36), S le soleil, prolongeons AD en ad, BC en bc; quand le centre du soleil sera sur la ligne mS qui partage le plan par le milieu de son épaisseur, la surface supérieure de l'anneau sera encore éclairée par la partie ae du soleil, la surface inférieure sera éclairée par la partie bf, mais les rayons solaires glisseront sur la surface de l'anneau et presque parallèlement, ils seront réfléchis suivant un angle égal à celui d'incidence; ils n'éprouveront qu'une légère inflexion dans leur route qui les portera au-delà de Saturne; ils ne seront pas réfléchis vers la terre qui est toujours dans le voisinage du soleil, et l'anneau disparaîtra nécessairement pour nous; il se peut même qu'il disparaisse avant que le soleil soit arrivé dans le plan mS.

111. On peut calculer l'élévation des points e et f sur les deux faces de l'anneau.

Le demi-diamètre du soleil vu de Saturne n'est que de 1′ 36″, s'il est pour nous de 16′, car la distance de Saturne au soleil est dix fois plus grande que celle de la terre. La ligne Se vue de Saturne soutendra donc un angle de 96″, il en faut retrancher $Su = \frac{1}{2}$ épaisseur de l'anneau $= \frac{1}{2}e$; pour que la surface supérieure ne reçût plus aucun rayon, il faudrait que ε fût négatif et $= 96'' - \frac{1}{2}e$, mais $\frac{1}{2}e$ est d'une petitesse qui échappe à toutes les mesures; car on a observé que cette épaisseur est sensiblement moindre que le diamètre du premier satellite de Saturne, et ce diamètre n'est pas d'une seconde.

112. Si l'élévation E de la terre est de signe contraire à l'élévation du soleil, le soleil éclairera l'une des faces de l'anneau qui ne nous montrera que l'autre face; l'anneau sera invisible pour nous, mais nous pourrons observer l'ombre qu'il projettera sur le disque de Saturne; cette ombre sera toujours fort étroite, parce que les élévations E et ε ne différant presque pas l'une de l'autre, quand le plan de l'anneau passera entre la terre et le soleil, il les rasera l'un et l'autre de très-près, et la largeur de l'ombre ne surpassera guère l'épaisseur de l'anneau.

Tant que durera la différeuce de signe l'anneau continuera d'être invisible; ainsi, dès l'instant où la terre aura passé à la surface inférieure, par exemple, jusqu'à celui où le soleil y arrivera lui-même, l'anneau ne pourra se voir.

113. L'intervalle sera de plusieurs mois et la révolution de Saturne ayant une durée de 30 ans, au bout de quinze jours on verra des phénomènes semblables arriver vers l'autre nœud. Il est visible, par les équations..... $\sin(G - N) = \cot I \tang g$ et $\sin(H - N) = \cot I \tang h$, que les distances au nœud sont de petits arcs, puisque les latitudes h et g ne pourront surpasser 2° 30′ et 2° 45′; et que l'inclinaison I est de 31° 20′ ou 31° 24′.

Les distances au nœud n'iront donc jamais à 5° qui sont le mouvement de Saturne en cinq mois; ce sera donc dans l'espace de cinq mois avant ou après le passage de Saturne par le nœud de son anneau, qu'on devra s'attendre aux disparitions ou aux réapparitions de cet anneau.

114. Ordinairement il n'y aura tous les 15 ans qu'une disparition et

une réapparition; mais si la première disparition arrive peu de tems avant la station, la rétrogradation ramènera bientôt après Saturne à la distance géocentrique au nœud qui donne un passage du plan de l'anneau par le centre de la terre; ce second passage causera une réapparition : le plan de l'anneau passant ensuite par le centre du soleil, la surface éclairée changera, l'anneau deviendra de nouveau invisible jusqu'au moment où la planète étant redevenue directe, le plan passera par le centre de la terre, après quoi la terre et le soleil étant du même côté du plan, l'anneau sera visible pendant près de quinze ans.

115. Quand la distance angulaire géocentrique au nœud sera plus considérable, la terre sera élevée sur la face boréale de l'anneau, ou abaissée sous la face australe, et l'anneau paraîtra sous une forme elliptique. Le grand axe sera le diamètre de l'anneau. Soit a ce grand axe, b le petit, E l'élévation de la terre sur le plan, on aura

$$b = a \sin E \quad \text{et} \quad \sin E = \frac{b}{a}.$$

Si E est une quantité positive, c'est-à-dire boréale, la partie antérieure de l'anneau sera pour nous au-dessous du centre de Saturne, la partie la plus éloignée sera au-dessus du centre, mais cachée en partie par le corps de la planète.

Si E est une quantité négative, ou si la terre voit la face australe, la partie antérieure sera pour nous au-dessus du centre, la partie la plus éloignée sera au-dessous, mais en partie derrière la planète.

Les parties de l'anneau qui seront à l'est et à l'ouest de la planète paraîtront comme deux bras, ou comme deux anses; ces anses seront divisées longitudinalement en parties égales par le grand axe qui s'appelle aussi *ligne des anses*.

116. Ces anses sont sujettes à changer de figure avec l'élévation E; mal vues dans des télescopes trop faibles, elles ont beaucoup exercé les astronomes qui ne pouvaient parvenir à s'en faire une idée exacte.

Mais Huyghens ayant construit de plus grandes lunettes, découvrit la cause de ces apparences si extraordinaires, et il l'exposa en 1659, dans *systema Saturnium*. Cette explication est aujourd'hui reçue universellement, et elle a été confirmée par toutes les observations, faites et calculées depuis.

117. Saturne est donc environné d'un anneau de peu d'épaisseur, sensiblement plan, qui paraît comme un prolongement de son équateur, auquel il n'adhère pourtant pas. Supposez le diamètre de Saturne de 18″, le diamètre extérieur de l'anneau sera de 42″, le diamètre intérieur de 30″.

Le rayon du globe de Saturne sera de 9″, le rayon de l'anneau intérieur de 15″, celui de l'anneau extérieur de 21″, ensorte que la largeur de l'anneau et de chacune des deux anses sera de 6″, ainsi que l'espace vide entre Saturne et son anneau. Whiston assure que le père de Clarke avait vu une étoile dans ce vide. Short a cru que l'anneau était quadruple, c'est-à-dire composé de quatre anneaux dans le même plan et séparés par trois raies noires ou vides presqu'imperceptibles; du moins c'est ainsi que Lalande le représente (fig. 280). Cassini n'y vit que deux anneaux et une seule séparation : Herschel est de cette opinion. La raie noire qui sépare les deux anneaux se voit également aux deux surfaces opposées (fig. 57).

Si le demi-petit axe de l'anneau est égal au demi-diamètre de Saturne, les bords de l'anneau coïncideront avec les extrémités du disque de Saturne, c'est une circonstance qui faciliterait la mesure de l'inclinaison de l'anneau, s'il était possible de bien saisir l'instant où elle a lieu.

Si le demi-petit axe est un peu plus grand, l'anneau débordera des deux côtés.

118. Ces deux circonstances assez rares sont les seules dans lesquelles on puisse mesurer le demi-petit axe de l'ellipse. Cette mesure donnera

$$\sin E = \frac{b}{a} = \sin I \cos g \sin(G - N) - \cos I \sin g,$$

équation qui dans le cas de $\sin(G - N) = 1$, ou de $(G - N) = 90°$ devient

$$\sin E = \sin(I - g) \quad \text{et} \quad \sin E = \sin(I + g)$$

si la latitude est australe. Mais E sera toujours moindre que I; en effet, supposons $E = I$, si cela est possible, nous aurons

$$\sin E = \sin I = \sin I \cos g \sin(G - N) - \cos I \sin g;$$

d'où

$$1 = \cos g \sin(G - N) - \cot I \sin g,$$

et

$$\sin(G - N) = \frac{1 + \cot I \sin g}{\cos g},$$

valeur imaginaire, à moins que la latitude ne soit nulle, et alors on aurait $G - N = 90°$; ou bien à moins que la latitude g ne soit australe et $\sin g$ une quantité négative; reste donc à savoir quand la latitude sera australe ou nulle, si la position des nœuds permettra que l'équation soit satisfaite.

119. Le 1er septembre 1784 on avait $g = -0° 2'$, $G - N = 4^s\ 0° 56'$; l'équation générale donnait $E = 27° 15'$. A mesure que la latitude australe augmentait dans les jours suivans, $(G - N)$ et son sinus diminuaient plus rapidement, et l'élévation E sur le plan diminuait. Il paraît que jamais la terre ne peut avoir une élévation qui surpasse beaucoup 27°. On ne peut donc avoir l'inclinaison directement par l'observation; le calcul est toujours nécessaire, sans cela une observation unique donnerait l'inclinaison et le nœud. En effet, si l'on mesurait $\frac{b}{a} = \sin I$, on connaîtrait par là même $\sin I$ et $\cos I$, l'observation donnerait d'ailleurs G et g; on aurait

$$\frac{b}{a} = A \sin(G - N) - B; \quad \frac{B + \frac{b}{a}}{A} = \sin(G - N) \quad \text{et} \quad N = G - (G - N).$$

A défaut de ce moyen qui serait le meilleur de tous, on attend que l'anneau déborde la planète d'une manière non douteuse, et l'on répète à loisir la mesure des deux axes apparens; chaque observation donne

$$\sin E = \sin g [\cot g \sin(G - N) \sin I - \cos I];$$

d'où

$$\sin(I - x) = \frac{\sin E \sin x}{\sin g},$$

quand on a fait $\cot x = \cot g \sin(G - N)$; alors $I = (I - x) + x$.

120. Ce genre d'observation n'est praticable que pendant un tiers environ de la révolution de Saturne, quand la longitude géocentrique est autour de 3^s et de 9^s, quand $\sin(G - N)$ approche du *maximum*. On peut déterminer toutes les inconnues à la fois, par les disparitions et les réapparitions.

Supposons qu'on ait observé une disparition occasionnée par le pas-

sage de l'anneau par la terre, on aura

$$\frac{\sin E}{\cos I} = \cos g \sin(G - N) \tang I - \sin g$$
$$= \cos g \tang I \sin G \cos N - \cos g \tang I \cos G \sin N - \sin g$$
$$= \cos g \sin G (\tang I \cos N) - \cos g \cos G (\tang I \sin N) - \sin g.$$

Cette équation renferme trois inconnues, I, N et E; mais N et I sont des constantes, au moins pendant une année; on ne connaît encore aucune variation à l'inclinaison I, N n'en a aucune non plus, si ce n'est la précession des équinoxes, qu'on peut retrancher de G; on peut supposer que c'est toujours la même élévation E qui donne une disparition, ainsi en rassemblant trois disparitions de l'anneau, on en déduira les trois inconnues, par la méthode employée pour la rotation solaire.

121. Mais nous avons dit qu'une même année peut présenter une disparition et une réapparition à l'une des faces, et une réapparition à la face opposée. Les deux premières équations supposent deux valeurs de E qui sont égales et de même signe; dans la troisième, E serait de signe contraire, mais on le ramènera au même signe en changeant les signes du second membre de la troisième équation. On pourra donc en peu de mois résoudre le problème.

Ainsi en 1789, le 4 mai, on observa une première disparition; on avait.......................... $G' = 11^s 20° 28'$, $g' = -1° 54' 30''$.
Le 27 août, une 1re réapparition .... $G'' = 11.21.6$, $g'' = -2.21.20$.
Le 31 janv., une 2e réap. à l'autre face $G''' = 11.20.52$, $g''' = -2.4.0$.
J'en tire les trois équations

$$\frac{\sin E}{\cos I} = -0.16553x - 0.68564y + 0.033301$$
$$= -0.15458x - 0.98712y + 0.041101$$
$$= +0.15863x + 0.98668y - 0.036062;$$

d'où $y = +0.14893$, $x = -0.6922$,

$$\tang N = \frac{y}{x} = \tang 5^s 17° 51', \quad \tang I = 35° 18'.$$

$$\sin E' = \sin 3' 3'', \quad \sin E'' = \sin 3' 2'' \text{ et } \sin E''' = \sin - 3' 4''.$$

Lalande dit (3356) qu'il suffit que le soleil dépasse l'anneau de 3' pour qu'il paraisse éclairé; il paraît qu'il suffit d'une élévation de 3' pour que la terre aperçoive l'anneau.

Il résulte de ces trois observations, que l'anneau cesse d'être visible ou recommence à l'être quand la terre est élevée ou abaissée de 3', relativement à la face éclairée, que le nœud est en 5^s 17° 51', ce qui diffère de quelques minutes de ce qu'on suppose ordinairement; et que l'inclinaison est de 55° 18', ce qui passe de 4° ce qu'on a adopté. Mais on a vu par ce qui précède, quelle incertitude il y a sur le tems des phénomènes; j'ai pris sans discussion le milieu arithmétique à peu près. Il me suffisait de donner un exemple d'une méthode plus simple et plus générale que celles qui ont été employées jusqu'ici, et dont cependant on ne doit rien espérer de bien précis, à moins de multiplier beaucoup ces calculs.

122. J'ai supposé l'élévation E une quantité constante, mais il est probable que l'élévation de la terre sur le plan n'est pas la seule cause qui produise la disparition et la réapparition, et que l'élévation plus ou moins grande du soleil y influe aussi d'une manière sensible. Heureusement les valeurs de E et de ε sont si petites qu'on peut les négliger sans inconvénient et se borner à calculer le passage du plan par les centres du soleil et de la terre, et c'est ce qu'on fera toujours assez bien pour se préparer à l'observation.

Dans ce cas, les formules se simplifient, car en supposant $E = 0$ aussi bien que ε, on a

$$\sin(G - N) = \cot I \tang g, \quad \sin(H - N) = \cot I \tang h;$$

on aura donc, au moyen de deux observations,

$$\sin(G' - N) : \sin G'' - N) :: \cot I \tang g' : \cot I \tang g'' :: \tang g : \tang g'',$$

$$\tang \tfrac{1}{2}(G' - N + G'' - N) : \tang \tfrac{1}{2}(G' - N - G'' + N) :: \sin(g' + g'') : \sin(g' - g''),$$

$$\tang \left(\frac{G' + G''}{2} - N\right) : \tang \tfrac{1}{2}(G' - G'') :: \sin(g' + g'') : \sin(g' - g''),$$

$$\tang \left(\frac{G' + G''}{2} - N\right) = \frac{\tang \tfrac{1}{2}(G' - G'') \sin(g' + g'')}{\sin(g' - g'')},$$

après quoi $\cot I = \sin(G' - N) \cot g' = \sin(G'' - N) \cot g''$.

123. Appliquons ces formules à nos deux premières observations,

nous aurons

$$\text{tang}\left(\frac{G'+G''}{2}-N\right)=\frac{\text{tang}(-0^\circ\ 19')\sin(-4^\circ\ 15'\ 50'')}{\sin(+0^\circ\ 26'\ 50'')}=\text{tang}\quad 0^s\ 3^\circ\ 1',$$

$$\frac{G'+G''}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \quad 11.20.47\ ,$$

$$\left(\frac{G'+G''}{2}\right)-\left(\frac{G'+G''}{2}-N\right)=N\ldots\ldots\ldots = \quad 11.17.46\ ,$$

$$\cot I=\sin(G'-N)\cot g'=\sin(G''-N)\cot g''=\cot 55^\circ\ 13'\tfrac{1}{2},$$

ce qui diffère très-peu de ce que nous avons trouvé sans rien négliger.

En comparant de même une équation géocentrique avec l'équation héliocentrique, nous aurions pareillement

$$\text{tang}\left(\frac{G+H}{2}-N\right)=\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}(G-H)\sin(g+h)}{\sin(g-h)},$$
$$\cot I=\sin(G-N)\cot g=\sin(H-N)\cot h.$$

Appliquons ces formules aux observations du 4 mai et à celles de la disparition observée du 3 au 15 octobre 1789; en choisissant le 9 octobre par un milieu, nous aurons

$$h=-\ 2^\circ\ 9',\qquad H=11^s\ 20^\circ\ 46',$$
$$\text{tang}\left(\frac{G+N}{2}-N\right)=\frac{\text{tang}(-9')\sin(-4^\circ\ 3'\ 30'')}{\sin 14'\ 30''}=\text{tang}\ 2^\circ\ 31',$$
$$N=11^s\ 18^\circ\ 6',\qquad I=38^\circ\ 54'.$$

La différence sur le nœud n'est que de 20', dont on ne peut répondre; l'inclinaison est encore plus forte de 5° 40'; mais le passage du plan par le soleil est bien plus incertain, et l'on voit que les observateurs différaient entr'eux de douze jours. Il est donc plus sûr de s'en tenir au passage du plan par la terre.

124. Pour déterminer à la fois E, ϵ, I et N, on réunirait les quatre observations de l'année, c'est-à-dire qu'on commencerait, comme ci-dessus, par trouver E, I et N; puis avec N et I, on chercherait ϵ par l'équation héliocentrique; mais on voit que ce serait peine perdue.

Dans l'équation $\sin E=\sin I\cos g\sin(G-N)-\cos I\sin g$, faites $G-N=0$, vous aurez $\sin E=-\cos I\sin g$. Ainsi l'élévation de la terre est de signe contraire à la latitude. En 1789 la latitude était australe; la

la terre était donc au-dessus de la face boréale quand on avait $G-N=o$, ou $G=N$, c'est-à-dire quand Saturne paraissait dans son nœud, ce qui avait lieu au commencement d'avril; en mai, à la disparition, la terre a passé à la face australe, E est devenue négative; en août la terre est revenue à la face boréale, qui était encore éclairée; le 9 octobre le soleil a passé à la face australe et la terre y est descendue le 31 janvier, et c'est la face australe qui a été vue depuis l'année 1790 jusqu'en 1803; depuis ce tems, nous voyons la face boréale.

125. Après avoir trouvé suffisamment bien l'inclinaison et les nœuds de l'anneau, il faut donner les moyens pour prédire les phénomènes. Ces moyens sont contenus dans l'équation fondamentale, mais elle n'admet pas une solution directe; les astronomes ne l'ont donc calculée que par tâtonnement. On peut cependant toujours rendre la solution directe pour le soleil, et abréger considérablement les essais pour la terre. Commençons par le soleil.

Dans l'équation $\sin(H-N)=\cot I \tang h$, mettons pour $\tang h$ sa valeur $\tang I' \sin(H-N')$; I' étant l'inclinaison de l'orbite de Saturne sur l'écliptique, et N' le nœud de cette orbite, nous aurons

$$\sin(H-N)=\cot I \tang I' \sin(H-N'),$$

ou

$$\sin(H-N)\tang I=\sin(H-N')\tang I',$$

et

$$\tang I:\tang I' :: \sin(H-N')\sin(H-N),$$

$$\sin(I+I'):\sin(I-I') :: \tang\tfrac{1}{2}(H-N'+H-N):\tang\tfrac{1}{2}(H-N'-H+N)$$

$$:: \tang\left(H-\frac{N+N'}{2}\right):\tang\tfrac{1}{2}(N-N'),$$

$$\tang\left(H-\frac{N+N'}{2}\right)=\frac{\tang\tfrac{1}{2}(N-N')\sin(I+I')}{\sin(I-I')},$$

après quoi,

$$H=\left(H-\frac{N+N'}{2}\right)+\frac{N+N'}{2},$$

ou bien

$$\tang I'\cot I=\frac{\sin(H-N)}{\sin(H-N')}=\frac{\sin H\cos N-\cos H\sin N}{\sin H\cos N'-\cos H\sin N'}=\frac{\tang H\cos N-\sin N}{\tang H\cos N'-\sin N'},$$

$$\tang I'\cot I\cos N'\tang H-\tang I'\cot I\sin N'=\tang H\cos N-\sin N,$$

$$\tang I'\cot I\cos N'\tang H-\tang H\cos N=\tang I'\cot I\sin N'-\sin N,$$

et

$$\text{tang}\,H = \frac{\text{tang}\,I'\cot I\sin N' - \sin N}{\text{tang}\,I'\cot I\cos N' - \cos N},$$

quantité presque constante.

Nous avons

$$I' = 2°30'$$
$$I = 31.20$$
$$I + I' = 33.50$$
$$I - I' = 28.50$$

$$N = 5^s 17° 21'$$
$$N' = 3.21.51$$
$$N - N' = 1.25.30$$
$$N + N' = 9.\ 9.12$$
$$\tfrac{1}{2}(N+N') = 4.19.36$$
$$\tfrac{1}{2}(N-N') = 0^s 27° 45'$$

C. sin(I—I')...... 0.3167157
sin(I+I')...... 9.7456828
tang ½ (N—N')...... 9.7210893

$$\text{tang}\left(H - \frac{N+N'}{2}\right) = 1.\ 1.17 \qquad 9.7834878$$
$$\frac{N+N'}{2} = 4.19.36$$
$$5.20.53$$
ou 11.20.53

Cette longitude appartient an 11 octobre; la disparition a été observée du 3 an 15, et nous avons ci-dessus supposé le 9; ainsi quatre logarithmes résolvent le problème, et quand on a calculé une Éphéméride, on voit à quel jour arrive le passage du plan par le soleil.

126. Ces longitudes $5^s\,20°\,53'$ et $11^s\,20°\,53'$ sont à fort peu près constantes, car les deux inclinaisons n'ont aucune variation connue qui soit bien sensible. Les deux nœuds ont pour variation commune le mouvement de précession qui disparaît dans (N—N'); il disparaîtra dans $\left(H - \frac{N+N'}{2}\right)$, en comptant H de l'équinoxe de 1789, ou bien les longitudes seront $5^s\,20°\,53' + 50''i$ et $11^s\,20°\,53' + 50''\,i$, i étant le nombre d'années écoulées depuis 1789; en 30 ans la précession est $1500'' = 25'$; ainsi à chaque révolution de Saturne, les longitudes augmenteront de 25'.

La première, de $5^s 20° 53' + 50''i$ indique le passage du soleil à la partie boréale.

La seconde, $11.20.53 + 50\,i$, le passage à la partie australe.

Nous verrons plus loin, que M. Flaugergues croit à une rétrogradation qui réduirait à 13″ le mouvement de 50″.

127. En développant l'équation $\tang I \cot I' = \frac{\sin(H-N')}{\sin(H-N)}$, on aurait

$$\tang H = \frac{\sin N}{\cos N'} \cdot \frac{\sin(N'-x)}{\sin(N-x)},$$

en cherchant d'abord un angle subsidiaire x par la formule

$$\tang x = \frac{\tang I \cot I' \sin N}{\cos N'};$$

ou bien encore

$$\tang H = \frac{\tang N' - \left(\frac{\tang I \cot I'}{\cos N'}\right) \sin N}{1 - \left(\frac{\tang I \cot I'}{\cos N'}\right) \cos N};$$

mais le procédé précédent est préférable de toute manière.

128. On ne pourrait éliminer $\tang g$ de l'équation $\sin(G-N) = \cot I \tang g$, sans introduire deux autres inconnues au lieu d'une; mais quand on a trouvé H, comme on vient de voir, on connait g à fort peu près; car la latitude géocentrique varie fort peu dans le cours d'une année, et le passage du plan par la terre précède celui du passage par le soleil, ou le suit de peu de mois; on a donc une valeur approchée de g qui donne $(G-N)$ à fort peu près. Ayant ainsi une première valeur de G, on a la valeur correspondante de g, avec laquelle on recommence le calcul.

Pour éviter ce petit calcul, j'ai dressé les tables qu'on verra ci-après.

Soit $(G-N) = a$, ou $G = N + a$,
$G = N + \text{arc.}\sin = \cot I \tang g$.

La table II donnera toutes les valeurs de a pour toutes les valeurs possibles de g; l'arc a est l'équation qu'il faut ajouter au nœud pour avoir G.

A cette table j'ai joint les parties proportionnelles pour les minutes.

La table première est la longitude du nœud N pour toutes les années depuis que l'anneau est connu.

129. Pour exemple de l'usage de ces tables, je prends l'année 1789, où tous les quatre phénomènes se rencontrent. En conséquence, j'ai ajouté une table du cours de Saturne en 1789; je l'ai prise dans le

Nautical Almanac, où l'on donne les lieux héliocentriques. Mais celui qui calcule une Éphéméride les a toujours, quoiqu'il ne les publie pas.

Nous savons, par la remarque ci-dessus, que le passage du plan par le soleil a lieu quand la longitude héliocentrique est de 11ˢ 20° 53′; nous voyons par la table IV, que cette longitude répond au 11 octobre, et que la latitude géocentrique était alors de — 2° 22′.

Avec cette latitude, la table II donne $a =$ 3° 54′
la table I 11.17.21
donc...... G = 11.21.15.

Cette longitude appartient au 14 mai; mais la latitude est 1° 56′.

Avec 1° 56′, table II .... $a =$ 3.11
table I........... N = 11.17.21
G = 11ˢ 20° 32′... table II, 4 mai.

Ainsi c'est le 4 mai que l'anneau a dû disparaître par le passage de la terre à la partie australe.

130. Mais la rétrogradation ramène la terre à la même longitude le 4 septembre; il y aurait une réapparition ce jour-là, si la latitude était restée la même. Elle est de 2° 22′, comme dans notre premier calcul; G serait donc encore 11ˢ 21° 15′, qui appartient au 25 août; mais la latitude n'est plus que 2° 21′.

$a =$ 3° 52′
N = 11.17.21
G = 11.21.13... ou 26 août.

La disparition a été observée du 24 au 29.

Saturne redevenant direct, se trouvera à la même longitude au commencement de février, avec une latitude — 2° 4′.

$a =$ 3° 24′
N = 11.17.21
G = 11ˢ 20° 45′.... 30 janvier.

Résumé.

Première disparition. Le 4 mai, la terre passe à la face australe.
Première réapparition. Le 26 août, la terre passe à la face boréale.
Deuxième disparition. Le 11 octob., le soleil passe à la face australe.
Deuxième réapparition. Le 30 janvier, la terre passe à la face australe.

Au nœud suivant, le lieu des rétrogradations aura changé à fort peu près comme le lieu des oppositions, c'est-à-dire, de 11 à 13' par an; ainsi en 1803, quand la longitude héliocentrique sera de $5^s\,21^\circ\,18'$, le soleil passera à la face boréale; le 2 août, la latitude géocentrique sera $+\,2^\circ\,5' = g$.............. $a = 3^\circ\,25'$

$$N = 5.17.32$$

Longitude du 24 août......... $G = 5.20.57$

la latitude sera pour lors $+2.0$.. $a = 0.\ 3.17$

Longitude du 23 août......... $G = 5.20.49.$

131. Ainsi la disparition aura lieu le 2 août, la réapparition le 23, et comme la planète a passé la rétrogradation, il n'y aura pas d'autre phénomène après cette époque; mais avant la rétrogradation, la planète s'était trouvée à fort peu près à même longitude, avec une latitude de $2^\circ\,3'$, qui donne...... $a = 0^s\ 3^\circ\,22'$

$$N = 5.17.32$$
$$G = 5.20.54.$$

Le plan de l'anneau n'aurait donc pas passé par le centre de la terre, mais seulement très-près; or nous ne pouvons pas répondre de $\frac{1}{2}$ degré sur la position du nœud. Dans le cas d'une erreur pareille, G pouvait être de $5^s\,20^\circ\,54'$ seulement, et alors l'anneau dut disparaître le 13 ou le 14. En effet, M. de Flaugergues en a fait l'observation, d'où il conclut une rétrogradation de 37″ dans le nœud, laquelle détruirait presque tout l'effet de la précession.

Saturne, aussitôt après, a commencé à rétrograder, et le 12 il est revenu à la même longitude, avec une latitude $2^\circ\,8'$.

$$a = 3^\circ\,30'$$
$$N = 5.17.\ 2$$
$$G = 5^s 20^\circ\,32.$$

132. Ainsi l'anneau a dû reparaître le 12 ou environ. M. Flaugergues l'a revu le 10. On aurait donc pu observer les quatre phénomènes au nœud ascendant; mais vers le 20 août Saturne n'était guères distant du soleil que de 1^s, et l'observation a été impossible. Les deux premières n'auraient pas eu lieu sans la rétrogradation du nœud; elles ont constaté ce mouvement, en supposant toutefois que le nœud ait été bien connu, ce qui peut encore paraître douteux. En attendant que ces élémens soient perfectionnés, les astronomes doivent se rendre attentifs quand Saturne approche de ses nœuds; mais s'il n'est pas voisin de sa rétrogradation, il n'y aura qu'une simple disparition; il y en aura deux s'il en est voisin, mais l'une des deux peut être incertaine; notre méthode les fera trouver avec la plus grande facilité.

133. Appliquons nos formules aux observations de M. Flaugergues.

1802 14 décembre 16^h $G = 5^s 20° 25' 47''$ $g' = 2° 0' 17''$
1803 14 juin 9 $H = 5.20.40.30$ $h = 2.8.13$
$G + H = 11.11. 6.17$ $g' + h = 4.8.30$
$\frac{1}{2}(G + H) = 5.20.33. 8$ $g' - h = -7.56$
$G - H = - 14.43$
$\frac{1}{2}(G - H) = - 7.21,5.$

$\sin(g'+h)$ 8.85867
C. $\sin(g'-h)$ .... − 2.63682
$\text{tang}\,\frac{1}{2}(G-H)$ .... − 7.33050
$\text{tang}\left(\frac{G+H}{2} - N\right) = 3° 49' 57''$ ...8.82599
$\frac{G+H}{2} = 5.20.33. 8$

5.16.43.11 .... 5.16.43.11
$G = 5.20.25.47$ $H = 5.20.40.30$
$\sin(G-H) = 3.42.36$...8.81095 $\sin(H-N) = 3.57.19$..8.83871
$\cos g$ .... 1.45589 $\cot h$ 1.42813
$\cot I = 28.24.40$...0.26684 $\cot I = 28.24.40$...0.26684

134. M. Flaugergues a préféré ces deux observations; mais nous avons remarqué que le passage par le soleil donne en général moins de précision. M. Flaugergues a conclu le nœud en $5^s 17° 11'$. Il n'a point parlé

de l'inclinaison. On voit que des arcs aussi petits que $g-h$ et $\frac{1}{2}(G-H)$ sont trop dépendans de l'exactitude des tables de Saturne; en changeant quelques secondes aux données, j'ai trouvé $N=5^s\,17^\circ\,9'$, à $2'$ près, comme M. Flaugergues, et $I=31^\circ\,26'\,30''$. On ne peut donc compter sur rien.

Voyons maintenant les deux passages de la terre.

1802...14 décembre 16^h...	$G'=5^s 20^\circ 25' 47''$	$g'=2.0.17$
1803...10 janvier 18...	$G''=5.20.34.15$	$g''=2.7.37$
	$60.\ 2$	$g'+g''=4.7.54$
	$\frac{1}{2}(G'+G'')=5.20.30.\ 1$	$g'-g''=-7.20$
	$G'-G''=-\ 8.28$	
	$\frac{1}{2}(G'-G'')=-\ 4.14.$	

$\sin(g'+g'')$	8.85763	$I=28.25$
C. $\sin(g'-g'')$	$-\ 2.67097$	$I=40.57$
$\text{tang}\frac{1}{2}(G'-G'')$	$-\ 7.09041$	$I=34.41$
$\left(\frac{G'+G''}{2}-N\right)=2^\circ\,22'\,54''$..	8.61901	
$\frac{1}{2}(G'+G'')=5.20.30.\ 1$		

$N=5.18.\ 7\ \ 7$		$5.18.\ 7.\ 7$	
$G'=5.20.25.47$		$G''-N=5.20.34.15$	
$G'-N=$ $2.18.40$...	5.60558	$G''=0.\ 2.27.\ 8$...	8.63130
$\cot g'$......	1.45589	$\cot g''$.......	1.43017
$\cot I=40^\circ\,57'\,30''$..	0.06147	$\cot I=40^\circ\,57'\,30''$...	0.09057

Tout ce qui paraît résulter de ces observations, c'est que le nœud est en $5^s\,17^\circ$ et quelques minntes de plus ou de moins, ou $5^s\,17^\circ\,20'$ par un milieu; quant à l'inclinaison, on n'y peut répondre de quelques degrés; c'est par les plus grandes ouvertures de l'ellipse qu'il convient de la calculer.

135. M. Flaugergues, comparant le nœud qu'il met en $5^s\,17^\circ\,21'$, avec le nœud qui résulterait des observations et des calculs de Lalande, en 1774, en déduit une rétrogradation de $37''$ par an; mais la différence observée paraît être du même ordre que l'erreur des observations.

La question est de nature à n'être pas décidée de sitôt. Au reste, on sait ce qu'il importe de savoir. L'existence de l'anneau de Saturne est constatée ; les phénomènes singuliers qu'il présente sont heureusement expliqués ; on peut les prédire et se préparer à l'observation, mais l'observation est difficile et incertaine.

136. En donnant sa méthode pour ces calculs (*Mém. de* 1716, p. 177), Maraldi en fait l'application à trois observations, en y employant deux lieux de Saturne observés, et le troisième tiré des tables. Ces observations sont plus favorablement placées ; appliquons-y nos formules.

Octobre 1714... $G' = 5^s 19^\circ 15'$ .... $g' = +\ 1^\circ 51'$

Mars........... $G'' = 5.20.14$ $\qquad g'' = \ 2.24$

$39^\circ 29'$ $\qquad g'+g'' = 4^\circ 15'$

$\frac{1}{2}(G'+G'') = 5^s 19^\circ 44' 30''$ $\qquad g'-g'' = -\ 33$

$G'-G'' = -\ 0.59$

$\frac{1}{2}(G'-G'') = -\ 0.29.30.$

Sin $(g'+g'')$............. 8.86987

C. sin $(g'-g'')$.............. 2.01777

tang $\frac{1}{2}(G'-G'')$.............. 7.93356

$\text{tang}\left(\frac{G'+G''}{2} - N\right) = \ 3^\circ 47' 25''$ ... 8.82120

$\frac{1}{2}(G'+G'') = 5.19.44.30$

$N = 5.15.57.\ 5$.... 5.15.57. 5

$G' = 5.19.15.\ 0$ $\qquad$ 5.20.14. 0

$G' - N = \ 3.17.55$ $\qquad$ 4.16.55.

Sin 3.17.55.... 8.75997 $\qquad$ Sin 4.16.55.... 8.87311

cot g'.......... 1.49080 $\qquad$ cot g''.......... 1.37766

cot I = 0.25077 $\qquad$ cot I = 29° 18′ 4″...0.25077

sin 4.16.55 $\qquad$ 8.87331

Ajoutons 1′ à g''............. cot g''..... 2.25....1.37455

I augmentera de 11′ 36″ $\qquad$ cot I..... 29° 29′ 40″...0.24786.

C′

$G' = 5^s 20^\circ 14'$ $\quad g' = 2^\circ 24'$
$G'' = \underline{5.19.52}$ $\quad g'' = \underline{2.\ 9}$
$G'-G'' = \quad 22$ $\quad g'+g'' = 4.33$
$\frac{1}{2}(G'-G'') = + \quad 11$ $\quad g'-g'' = +\ 0.15$
$\frac{1}{2}(G'+G'') = 5.20.\ 3.$

$\text{Sin}(g'+g'') + 8.89943$
$\text{C. sin}(g'-g'') + 2.36018$
$\text{tang}\frac{1}{2}(G'-G'') + \underline{7.50512}$
$\text{tang } 3^\circ 19' 46'' .. 8.76473$

$\frac{1}{2}(G'+G'') = 5.20.\ 3.\ 0$
$N = \underline{5.16.43.14} \ldots 5.16.43.14$
$G'' = \underline{5.19.52.\ 0} \quad \underline{5.20.14.\ 0} = G'$
$G''-N = \quad 3.\ 8.46 \quad 3.30.46 = G'-N.$

$\text{Sin } 3^\circ 8' 46'' \ldots\ldots 8.73943$ $\quad \text{sin } 3^\circ 30' 46'' \ldots\ldots 8.78726$
$\text{cot} g'' \ldots\ldots\ldots\ldots 1.42548$ $\quad \text{cot } g' \ldots\ldots\ldots\ldots 1.37766$
$\text{cot I} = 34^\circ 22' 25'' \ldots 0.16491 \ldots \text{cot I} = 34^\circ 22' 25'' \ldots 0.16492.$

Pour en déduire le lieu du nœud, Maraldi supposa l'inclinaison 31° 21', et il trouva $N = 5^s 16^\circ 12'$ et $5^s 16^\circ 17'$, milieu $5^s 16^\circ 14' \frac{1}{2}$.

Sans rien supposer, nous trouvons, par nos formules et les deux premières observations, $N = 5^s\ 19^\circ\ 44'\ 30''$, et ce résultat paraît assez sûr, parce que les arcs $(g'-g'')$ et $\frac{1}{2}(G'-G'')$ sont, l'un de 33', et l'autre de 29' 30", les plus grands que nous ayons encore rencontrés.

Avec ce nœud, nous trouvons $I = 29^\circ\ 18'\ 4''$, ce qui est bien peu; augmentons g'' de 1', l'inclinaison deviendra 29° 29' 40", plus forte de 11' 36"; mais une minute d'erreur dans une latitude observée est ce que nous pouvons supposer de plus fort; il paraît donc que l'inclinaison ne serait pas de 30° sur l'écliptique, à moins que la disparition n'ait été mal observée.

Par les deux dernières observations que préfère Maraldi, nous trouvons

$N = 5^s 16^\circ 43'$ $\quad I = 34^\circ 22' 26''$
ci-dessus......... $5.15.57$ $\quad I = 29.30$
milieu........... $5.16.20$ $\quad I = 31.56.13.$

137. Ce Mémoire de Maraldi est fort simple et fort clair; on y voit que le soleil doit être au moins élevé de 8′ sur l'anneau pour le rendre visible, mais cela dépend beaucoup des lunettes et de l'état de l'atmosphère.

La dissertation de Heinsius, *de Apparentiis Saturni*, *Lipsiæ* 1745, beaucoup plus longue, n'est pas aussi lumineuse. Il suppose, d'après Maraldi, l'inclinaison 30° sur l'orbite; il en déduit l'inclinaison sur l'écliptique 21° 23′ 17″. Pour déterminer la position apparente du plan, il emploie principalement la trigonométrie rectiligne. Ses méthodes pour trouver les instans des disparitions et réapparitions sont extrêmement compliquées; il enseigne aussi à calculer les ombres.

138. Duséjour a réduit toute cette théorie à une équation transcendante $a = \frac{n}{m} z + \cos z - 1$; il examine le cas où elle peut avoir 1.3.5.7, etc. racines réelles; par notre méthode nous n'avons aucun besoin du nombre de ces racines, nous déterminons tous les phénomènes, en quelque nombre qu'ils se rencontrent. Il trouve que pour Mercure, l'équation, qui a toujours trois racines, peut quelquefois en avoir cinq, que nous obtenons plus facilement par le tems et le lieu de la rétrogradation. Pour Vénus, la Terre, Mars, Jupiter et Uranus, le nombre des racines est 1 et 3; il faut toujours y ajouter la racine unique de l'équation solaire pour avoir le nombre total des phénomènes.

Cette partie de l'ouvrage est estimée des géomètres; elle est inutile pour la pratique.

139. Des calculs très-étendus qu'il a faits pour appliquer ses formules aux observations de 1773 principalement, il résulte que l'inclinaison est entre 25° 55′ et 31° 28′, le nœud entre 5^s 16° 23′ et 5^s 16° 37′, l'élévation de la terre sur le plan +15′ 46″ et −7′ 9″, tout cela d'après la première disparition. La seconde a donné l'inclinaison entre 29° 50′ et 37° 8′, le nœud entre 5^s 17° 2′ et 5^s 17° 15′, l'élévation entre +17′ 21″ et −5′ 25″. On voit que ces méthodes pénibles ne donnent pas mieux que les nôtres.

L'incertitude vient évidemment du peu de précision des observations. Le milieu entre les six résultats que nous tirons des calculs précédens donne pour le nœud 5^s 17° 20′, et pour l'inclinaison, 31° 21′, ainsi que le supposait Maraldi, quoique, par d'autres observations rappor-

tées par Dnséjour, et dans lesquelles le bord de l'anneau touchait le bord du disque, cette inclinaison paraisse de 30° environ. M. Bessel la croit plus faible encore.

La solution graphique de Boscovich, tome V de ses Œuvres, est ingénieuse mais trop longue dans la pratique.

Lalande en promet une plus simple qne tout ce qui a précédé; mais je n'ai pu apercevoir de différence essentielle entre la sienne et celle de Maraldi.

140. L'anneau est sensiblement plan, Huygens le prouve en disant que s'il avait des éminences elles seraient éclairées qnand le reste de la surface est obscur. M. Messier a vu plusieurs de ces points, mais ils sont presque imperceptibles. On a remarqué plusieurs fois que l'nne des anses disparaît avant l'autre; cela pourrait indiquer que le plan n'est pas parfait, ou qu'il n'est pas dans toutes ses parties également propre à réfléchir la lumière du soleil. Cependant, comme il est indubitable qu'il y a nne rotation et même assez rapide, s'il y a une anse plus élevée on plns réfléchissante, elle devrait changer de place rapidement; l'anse orientale à 10^h du soir, serait occidentale à 3^h du matin, si la rotation est de 10^h et quelques minutes, ainsi que MM. Herschel et Laplace l'ont tronvée simultanément, l'nn par observation, l'antre par la théorie. Cependant MM. Schroëter et Harding révoquent en donte cette rotation. Le 12 octobre on ne voyait à Paris qne l'anse occidentale. *Mém. de l'Acad., tome X, page* 583. Le 6 octobre 1773, on ne voyait à Cadix que l'anse occidentale. *Lalande*, 3373.

141. L'anneau est très-mince, et c'est ce qui le fait disparaître qnand nous le voyons par son épaisseur. Cependant M. Herschel assure qu'il ne le perd pas de vne quand il disparaît pour tous les antres astronomes. Mais alors il le voit comme un fil délié qui traverserait Saturne. Dans ces circonstances, il a déconvert deux nonveaux satellites qui circulent autour de l'anneau et dans son plan. Ces satellites lui paraissaient comme des perles enfilées par un fil très-mince. Ces perles changeaient de place et quittaient le fil dans leurs digressions. Ces satellites n'ont pas une seconde de diamètre, l'épaissenr de l'anneau est encore moindre.

Le rayon de la terre, vu du soleil, soutend un angle d'environ 9″; vn de Saturne, il ne paraîtrait pas d'une seconde; l'épaisseur de l'anneau est donc au plus égale an rayon de la terre.

TABLE Ire.

Longitude du nœud de l'anneaa.

Année.	Nœud.
1609	5s14°50′
1615	5.14.55
1621	5.15. 0
1627	5.15. 5
1633	5.15.10
1639	5.15.15
1645	5.15.20
1651	5.15.25
1657	5.15.30
1663	5.15 35
1669	5.15 40
1675	5.15.45
1681	5.15.50
1687	5.15.55
1693	5.16. 0
1699	5.16. 5
1705	5.16.10
1711	5.16.15
1717	5.16.20
1723	5.16.25
1729	5.16.30
1735	5.16.35
1741	5.16.40
1747	5.16.45
1753	5.16.50
1759	5.16.55
1765	5.17. 0
1771	5.17. 5
1777	5.17.10
1783	5.17.15
1789	5.17.20
1795	5.17.25
1801	5.17.30
1807	5.17.35
1813	5.17.40
1819	5.17.45
1825	5.17.50
1831	5.17.55
1837	5.18. 0
1843	5.18. 5
1849	5.18.10
1855	5.18.15
1861	5.18.20
1867	5.18.25
1873	5.18.30
1879	5.18.35
1885	5.18.40
1891	5.18.45
1897	5.18.50
1903	5.18.55

TABLE II.

Equation additive au nœud de l'anneau.

Latit.	Équat.	Diff.
0° 0′	0° 0′0	16.4
10	0.16.4	
20	0.32.8	
30	0.49.3	
40	1. 5.7	
50	1.22.1	
1. 0	1.38.6	
10	1.55.0	
20	2.11.5	
30	2.27.9	
40	2.44.4	
50	3. 0 8	
2. 0	3.17.3	
10	3.33.8	
20	3.50.3	
30	4. 6.7	
40	4.23.2	
50	4.39.7	16.5
3. 0	4.56.2	

La Table II sert à tronver les disparitions et réapparitions de l'anneau : elle a pour argument la latitude soit héliocentrique, soit géocentrique.

La face boréale est éclairée quand la longit. héliocent. est entre 5s20°53′ et 11s20°53′; la face australe, quand la longitude est entre 11s20°53′ et 5s20°53′.

TABLE III.

Équation additive aa nœud, pour trouver les istans où l'anneau touche le bord de Saturne.

Latit.	♄ > 7s	Diff.	♄ > 9s	♄ > 3s	♄ > 1s
−3° 0′	1s17°26′	24	4s12°34′	10s12°34′	7s17°26′
2.50	1.17.50	24	4.12.10	10.12.10	7.17.50
2.40	1.18.14	24	4.11.46	10.11.46	7.18.14
2.30	1.18.38	25	4.11.22	10.11.22	7.18.38
2.20	1.19. 3	25	4.10.57	10 10.57	7.19. 3
2.10	1.19.28	24	4.10.32	10.10.32	7.19.28
2. 0	1.19.52	25	4.10. 8	10.10. 8	7.19.52
1.50	1.20.17	26	4. 9.43	10. 9.43	7.20.17
1.40	1.20.43	26	4. 9.17	10. 9.17	7.20.43
1.30	1.21. 9	26	4. 8.51	10. 8.51	7.21. 9
1.20	1.21.35	26	4. 8.25	10. 8.25	7.21.35
1.10	1.22. 1	27	4. 7.59	10. 7.59	7.22. 1
1. 0	1.22.28	26	4. 7.32	10. 7.32	7.22.28
0.50	1.22.54	27	4. 7. 6	10. 7. 6	7.22.54
0 40	1.23.21	28	4. 6.39	10. 6.39	7.23.21
0.30	1.23.49	28	4. 6.11	10. 6.11	7.23.49
0.20	1.24.17	28	4. 5.43	10. 5.43	7.24.17
0.10	1.24.45	29	4. 5.15	10. 5.15	7.24.45
0. 0	1.25.14	29	4. 4.46	10. 4.46	7.25.14
+0.10	1.25.43	29	4. 4.17	10. 4.17	7.25.43
0.20	1.26.12	30	4. 3.48	10. 3.48	7.26.12
0.30	1.26.42	30	4. 3.18	10. 3.18	7.26.42
0.40	1.27.12	31	4. 2.48	10. 2.48	7.27.12
0.50	1.27.43	31	4. 2 17	10. 2.17	7.27.43
1. 0	1.28.14	32	4. 1.46	10. 1.46	7.28.14
1.10	1.28.46	32	4. 1.14	10. 1.14	7.28.46
1.20	1.29.18	33	4. 0.42	10. 0.42	7.29.18
1.30	1.29.51	34	4. 0. 9	10. 0. 9	7.29.51
1.40	2. 0.25	34	3.29.35	9.29.35	8. 0.25
1.50	2. 0.59	34	3.29. 1	9.29. 1	8. 0.59
2. 0	2. 1.33	36	3.28.27	9.28.27	8. 1.33
2.10	2. 2. 9	36	3.27 51	9.27.51	8. 2. 9
2.20	2. 2.45	37	3.27.15	9.27.15	8. 2.45
2.30	2. 3.22	38	3.26.38	9.26.38	8. 3.22
2.40	2. 4. 0	39	3.26. 0	9.26. 0	8. 4. 0
2.50	2. 4.39	40	3.25.21	9.25.21	8. 4.39
3. 0	2. 5.19		3.24.41	9.24.41	8. 5.19

La Table III est calculée sur les formules de l'article 118.

Soit $\sin E = \frac{17.941}{42} = \frac{\text{diam. Saturne}}{\text{diam. anneau}} = \sin I \cos g \sin(G-N) - \cos I \sin g$, d'où

$$\sin(G-N) = \frac{17.941}{42 \sin I \cos g} + \cot I \tan g = \frac{0.82145}{\cos g} + 1.64256 \tan g.$$

Dans cette Table, calculée depuis plus de 20 ans, je supposais $I = 31°\ 21'$ (139). On n'en saurait atteindre une extrême précision.

TABLE IV.

Lieux de Saturne en 1789 et 1790.

	Long. hél.	Lat. hél.	Longitude géocentr.	Lat. géo.		Long. hél.	Lat. hél.	Longitude géocentr.	Lat. géo.
Avril. 1	11^{s}14°32′	2° 0′A	11^{s}17° 4′	1°49′A	Octob. 1	11^{s}20°33′	2° 8′A	11^{s}18°29′	2°22′A
7	14.44	2. 0	17.44	1.50	7	20.44	2. 9	18. 5	2.22
13	14.56	2. 0	18.24	1.51	13	20.56	2. 9	17.43	2.22
19	15. 8	2. 0	19. 2	1.52	19	21. 8	2. 9	17.23	2.21
25	15.19	2. 1	19.38	1.53	25	21.20	2.10	17. 6	2.20
Mai. 1	15.31	2. 1	20.12	1.54	Nov. 1	21.34	2.10	16.51	2.19
7	15.43	2. 1	20.44	1.55	7	21.46	2.10	16.42	2.18
13	15.55	2. 2	21.13	1.56	13	21.58	2.10	16.36	2.17
19	16. 7	2. 2	21.40	1.58	19	22.10	2.11	16.34	2.16
25	16.18	2. 2	22. 4	1.59	25	22.22	2.11	16.36	2.15
Juin. 1	16.32	2. 3	22.28	2. 1	Déc. 1	22.34	2.11	16.42	2.14
7	16.44	2. 3	22.45	2. 2	7	22.46	2.11	16.52	2.13
13	16.56	2. 3	22.59	2. 4	13	22.58	2.12	17. 6	2.12
19	17. 7	2. 4	23. 9	2. 6	19	23. 9	2.12	17 23	2.11
25	17.19	2. 4	23.16	2. 7	25	23 21	2.12	17.42	2. 9
Juill. 1	17.31	2. 4	23.19	2. 9	Janv. 1	23.35	2.12	18.10	2. 8
7	17.43	2. 4	23.19	2.10	1790. 7	23.47	2.13	18.38	2. 7
13	17.55	2. 5	23.15	2.12	13	23.59	2.13	19.08	2. 6
19	18. 6	2. 5	23. 8	2.13	19	24.11	2.13	19.40	2. 5
25	18.18	2. 5	22.57	2.15	25	24.23	2.13	20.15	2. 4
Août. 1	18.32	2. 6	22.40	2.17	Févr. 1	24.37	2.14	20.49	2. 4
7	18.44	2. 6	22.23	2.18	7	24.49	2.14	21.38	2. 3
13	18.56	2. 6	22. 2	2.19	13	25. 1	2.14	22.18	2. 3
19	19. 8	2. 7	21.40	2.20	19	25.13	2.14	23. 0	2. 3
25	19.19	2. 7	21.15	2.21	25	25.25	2.15	11.23.43	2. 2
Sept. 1	19.33	2. 7	20.44	2.22					
7	19.45	2 7	20.17	2.22					
13	19.57	2. 8	19.49	2.23					
19	20. 9	2. 8	19.22	2.23					
25	20.21	2. 8	18.55	2.23					

On prendra pour argument de la Table III la latitude avec le signe +, quand la latitude géocentrique et la face visible de l'anneau seront de même dénomination; si elles sont de dénomination contraire, on prendra la latitude avec le signe —.

On prendra l'équation dans la colonne 1ere, 2e, 3e ou 4e, selon que la longitude géocentrique surpassera 7^s, 9^s, 5^s ou 1^s.

$(G-N)$ étant donné par la Table, on aura $G=(G-N)+N$, et par conséquent l'instant du contact de l'anneau et du disque, en cherchant dans une Éphéméride le jour auquel répond la longitude géocentrique G.

CHAPITRE XXX.

De l'Aberration et de la Parallaxe annuelle des Étoiles.

1. Tout ce que nous avons dit jusqu'à ce moment sur les étoiles et les planètes suppose instanée la transmission de la lumière, c'est-à-dire, que la vitesse de la lumière est comme infinie et qu'il n'y a aucun intervalle appréciable entre l'émission de la lumière que l'astre nous lance et l'impression que produit la lumière sur l'organe de la vue. Nous avons déjà remarqué (XXVI. 221), à l'occasion des éclipses, que cette question n'est pas indifférente dans le calcul des observations; il faut donc l'approfondir et la résoudre.

2. Supposons une étoile E (fig. 38) à une distance presqu'infinie de la terre. Nous avons vu que la distance des étoiles à la terre est extraordinairement grande, puisque les lignes menées de l'étoile à tous les points de l'orbite terrestre et qui doivent former un cône plus ou moins oblique suivant la latitude de l'étoile au-dessus de l'écliptique, sont sensiblement parallèles entre elles. Ainsi le rayon ET venu de l'étoile à la terre, peut représenter tous les rayons que la même étoile envoie à la terre pendant un tems quelconque.

3. Si la terre et l'étoile sont immobiles, le rayon de l'étoile viendra frapper en T l'œil de l'observateur, qui verra l'étoile dans la direction TE. Que le rayon n'ait employé qu'un tems infiniment petit à venir de l'étoile à la terre, ou bien qu'il ait employé une seconde, une minute, une heure, un mois, ou un an, peu importe, nous verrons toujours l'étoile sur la droite TE; il en résultera que la sensation que nous éprouvons et qui nous atteste l'existence de l'étoile en E, prouvera seulement que l'étoile était en E un an auparavant, si la lumière emploie un an à venir jusqu'à la terre; et que rien ne nous prouvera que l'étoile existe pour le moment, ou qu'elle soit restée en E.

4. Si l'étoile seule avait un mouvement, le rayon qui nous frappe actuellement nous indiquerait la position qu'avait l'étoile à l'instant où elle a lancé le rayon qui nous arrive; si le mouvement de l'étoile était m pour l'intervalle écoulé, nous nous tromperions de m sur le lieu de l'étoile; mais les étoiles n'ayant aucun mouvement sensible, cette erreur est nulle.

5. Supposons maintenant que la terre ait un mouvement de translation sur son orbite, si la vitesse de la lumière est tellement grande que la vitesse de la terre soit nulle en comparaison, tout se passera encore comme dans l'hypothèse de la terre en repos.

Mais si ces deux vitesses sont comparables, et si, par exemple, la vitesse de la terre en un tems dt est représentée par la droite Tt (fig. 39), et la vitesse de la lumière pendant le même tems par la droite AT, voici ce qui doit arriver.

Le globule lumineux viendra avec une vitesse AT frapper l'œil, et l'œil viendra avec une vitesse tT frapper le rayon ou le globule; le premier choc ferait voir l'étoile sur TA, le second la ferait voir sur TC; car l'observateur venant de t en T avec la vitesse tT, il est frappé comme si la lumière venait de C en T avec la vitesse CT; il en doit résulter, selon la loi de la composition des forces, une sensation mixte suivant la direction TB de la diagonale du parallélogramme ABCT; ainsi l'étoile paraîtra en B et sa position apparente B fera avec la position vraie A l'angle ATB. Or, $\tang \text{ATB} = \frac{\text{AB}}{\text{AT}} = \frac{\text{TC}}{\text{TA}} = \frac{\text{vitesse de la terre}}{\text{vitesse de la lumière}}$.

Ainsi dans le cas du mouvement de la terre, *l'étoile sera portée en avant d'une quantité ATB dans le sens et dans le plan où la terre se meut*. Il reste en conséquence à chercher par observation si cet angle est sensible.

6. Cette composition de forces suffit pour expliquer l'effet des mouvemens simultanés de la lumière et de la terre, mais Bradley qui a découvert ce mouvement, qu'il a désigné sous le nom d'*aberration*, expliquait la chose d'une manière qui est au fond la même, quoiqu'elle en diffère par la forme.

Si la terre est immobile, pour voir l'étoile il faudra diriger une lunette TL suivant la ligne TE, le rayon lumineux enfilera le tube, en suivra l'axe et viendra à l'œil en T.

Mais à mesure que la lumière pénètre dans le tube, le tube lui-même

s'avauce avec uue vitesse comparable à celle de la lumière, le globe lumineux au lieu de suivre l'axe s'approchera du tube, ou plutôt le tube s'approchera du rayon lumineux, le choquera, absorbera la lumière ou la réfléchira, et elle ne vieudra plns à l'œil. Pour éviter ce choc contre le tube, il faudra incliner le tube suivant *t*A parallèle à la diagonale, de sorte que *t*A soit l'axe du tube, la lumière entrera en A dans le tube par l'axe; quand la lumière sera en *b*, le poiut *c* de l'axe sera arrivé eu *b*; puisque A*b* : *bc* :: A*t* : *t*T; quand la lumière sera en *d*, le point *e* de l'axe sera arrivé en *d*, et ainsi de suite jusqu'à ce que la lumière étant en T, le poiut *t* de l'axe y sera de même : ainsi la lumière en suivant réellement la route AT, aura toujours été dans l'axe du tube, mais l'observateur jugera que l'étoile est dans la ligne *t*A ou dans la parallèle TB. C'est là ce qu'ou appelle *aberration.*

7. Avaut de développer toutes les conséquences de ce priucipe pour apprendre à calculer les effets de l'aberratiou sur la position des étoiles, voyons ce qui doit arriver aux planètes.

Uue planète eu *p* (fig. 40) se mouvaut avec la vitesse *p*P dans le tems *dt* envoie uu rayou *p*R, ce rayou, participant au mouvement *p*P, au lieu de suivre la route *p*R, arrivera par la diagonale *p*T à la terre immobile en T, et l'observateur verra la planète sur le rayon T*p*; il la jugera en *p* quand elle sera véritablement en P; il se trompera donc sur le lieu de la planète de l'angle *p*TP, c'est-à-dire, de tout le mouvemeut de la plauète pendant le tems que la lumière emploie à venir de la plauète à la terre. Ainsi, même dans l'hypothèse de Tycho ou de Ptolémée, l'aberration aurait lieu pour la planète.

Supposons maintenant, que pendant le même tems *dt* la terre vieune de *t* en T avec la vitesse *t*T; la vitesse *p*T combiuée avec la vitesse *t*T = T*e* produira une sensatiou composée suivant la diagonale T*q*; on jugera la planète au point *q* sur la droite T*q*, tandis qu'elle sera véritablemeut en P, on se trompera donc de l'angle PT*q* qui est égal au mouvement de la planète plus le mouvemeut de la terre. On a la somme des mouvemens, dans le cas de la figure 40, parce que les mouvemens *t*T et *p*P sont en sens contraire. Si l'uu des deux mouvemens était négatif, ou que les deux mouvemens eussent lieu dans le même sens (fig. 41), l'aberratiou serait la différence des mouvemeus, et eu général l'aberration est égale au mouvement relatif.

On aurait la même chose en transportant à la planète en sens contraire le

le mouvement de la terre allant de t en T; on supposera que la planète aille de q en p pour remplacer le mouvement de la terre, mais elle va par son propre mouvement de p en P; ainsi le mouvement total est qP et l'aberration est l'angle qTP, ou le mouvement géocentrique de la planète pour la terre qui se croit immobile.

8. Soit l le tems que la lumière met à venir du soleil à la terre dans sa moyenne distance $= 1$, m le mouvement géocentrique de la planète pendant 1″, D sa distance à la terre; si on suppose que le mouvement de la lumière soit uniforme, on aura $1 : l :: D : Dl$; Dl sera le tems que la lumière mettra à venir de la planète à la terre. Le mouvement géocentrique pendant le tems $D.l$ sera $D.lm$, donc l'aberration sera $= Dlm$, c'est-à-dire, autant de fois le mouvement géocentrique pour 1″ de tems, que la lumière emploie de secondes à venir de la planète à la terre.

Cette formule donnera l'aberration en longitude, si m est le mouvement relatif en longitude; ce sera l'aberration en latitude, en ascension droite, en déclinaison, selon que m sera le mouvement en latitude, en ascension droite ou en déclinaison.

9. On a trouvé par les observations que $l = 8' 13''$ de tems, ou 493″, et voici comment on a fait cette découverte importante qui est de Roemer.

Soit S (fig. 42) le soleil, ♃ Jupiter avec le cône d'ombre qu'il projette derriere lui, a un satellite qui soit hors du cône d'ombre; à l'instant même où il sort du cône, il est frappé des rayons que le soleil envoie sans cesse, il nous réfléchit cette lumière, mais cette lumière mettrait $5,2 \times 493''$ à revenir au soleil ou 2564″, puisque la distance de Jupiter au soleil est de 5,2. Si la terre est en e à une distance du satellite $= 5,2$, nous apercevrons le satellite 2564″ après sa sortie du cône d'ombre; si la terre est en T, nous verrons le satellite un peu plus tôt; si elle était en t, nous le verrions un peu plus tard.

On a remarqué que les immersions et les émersions des satellites se voyaient plus tôt que ne l'indiquait le calcul, quand la terre était à une moindre distance de Jupiter; qu'elles se voyaient plus tard quand elle était à une distance plus grande que la moyenne. Car les tables des satellites ayant été composées sur un grand nombre d'éclipses, s'accordaient mieux avec l'observation quand la distance était moyenne, parce que les erreurs en plus et en moins s'étaient compensées; et nous verrons

plus loin qu'en comparant un millier d'éclipses du premier satellite, observées vers T et t, j'ai trouvé le tems que la lumière mettait à parcourir Tt; d'où j'ai conclu qu'elle employait 493″,2 à parcourir le demi-grand axe de l'orbite terrestre.

Or, en 493″,2, le soleil par son mouvement moyen décrit 20″,25; ainsi l'aberration moyenne du soleil est de 20″,25, sa longitude est toujours plus grande de 20″,25 qu'elle ne nous paraît, parce que le soleil s'est avancé de 20″,25 pendant le tems que la lumière a parcouru la distance moyenne, et nous le voyons toujours où il était 8′ 13″ avant le tems de l'observation.

10. Pour une planète quelconque, en la supposant à la distance 1, l'aberration est donc toujours le mouvement géocentrique qu'elle a eu en 493″,2. Au lieu du mouvement m pour une seconde, si nous mettons M, mouvement pour une heure, nous aurons $m = \frac{M}{3600}$, et l'expression 493″,2mD deviendra

$$\frac{493'',2\,MD}{3600} = 0.137MD = 0.03425(4MD) = 0.03425[(M+D)^2-(M-D)^2].$$

Lambert l'a mise sous cette forme pour que la table fût d'un usage plus commode. Dans cette formule, la distance moyenne du soleil qui est 1 comptera pour 1″, parce que le mouvement M est exprimé en secondes. Si l'on veut que M soit en minutes, le nombre M sera 60 fois moindre; il faudra que le facteur constant soit 60 fois plus fort, l'expression sera

$$2.055[(M+D)^2-(M-D)^2],$$

et la distance 1 comptera pour une minute. Si l'on veut que M soit le mouvement pour 24 heures, il faudra diviser par 24 le coefficient constant, et l'on aura $0.085625[(M+D)^2-(M-D)^2]$; la distance 1 comptera pour une minute, et l'aberration sera toujours exprimée en secondes de degré. Enfin si, comme Lambert, on veut que la distance moyenne soit 10′ au lieu de 1′, il faudra diviser le coefficient par 10, et l'on aura

$$\text{aberrat. en secondes} = 0.0085625[(M+D)^2-(M-D)^2].$$

Cette dernière transformation était au moins inutile pour la table que

j'aurais construite sur la formule $0.085625[(M+D)^2-(M-D)^2]$. A défaut de table, je préfère la formule $0.137\,MD$, M étant le mouvement horaire exprimé en secondes.

La table de Lambert est dans le Recueil des Tables de l'Académie de Berlin, tome III, p. 162.

11. Passons au développement de ces principes généraux en les appliquant aux divers cas qui se présentent dans la pratique.

Soit EC (fig. 43) l'écliptique, IS un grand cercle quelconque passant par l'étoile S et coupant l'écliptique en I, nommons I son inclinaison SIC; soit Tt le chemin de la terre pendant 493″ de tems.

Abaissons sur SI l'arc perpendiculaire TX, la distance de la terre à ce plan SI sera $(v \sin TX) = v \sin I \sin IT$. Si la terre avance en t la distance sera tx, la distance aura augmenté de $tu = d(v \sin TX)$, l'étoile qui est poussée dans le sens où va la terre d'une quantité égale et parallèle, paraîtra donc en S′, de sorte que $SS' = tu$ sera l'aberration par rapport à ce cercle IS, quel qu'il soit : ainsi la formule générale d'aberration sera $\quad d(v \sin TX) = d(v \sin I \sin IT)$,

ou aberration .... $= v dIT \sin I \cos IT + dv \sin I \sin IT$

$$= v du \sin I \cos IT + dv \sin I \sin IT \qquad (A).$$

Cette formule renferme toutes les règles de l'aberration des fixes, il ne s'agit que de la développer.

12. On a d'abord (XXI. 42) entre le mouvement vrai et le mouvement moyen de la terre, l'équation $du = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}} dm}{v^2}$, et par conséquent

$$v du = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\, dm}{v} = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}} dm\,(1-e\cos u)}{1-e^2} = \frac{dm}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\,(1-e\cos u)$$

$$= dm\,(1+\tfrac{1}{2}e^2)(1-e\cos u) = dm(1-e\cos u+\tfrac{1}{2}e^2-\tfrac{1}{2}e^3\cos u)$$

$$= 20'',250 - 0'',3402 \cos u + 0'',00285 - 0'',00004813 \cos u$$

$$= 20'',253 - 0'',34 \cos u;$$

donc

$$v du = 20'',253 - 0'',34 \cos(\odot - \Upsilon),$$

♈ étant la longitude de l'apogée, ou bien

$$vdu = 20'',253 + 0'',34 \cos(\odot - \pi), \qquad (A')$$

π étant la longitude du périgée.

On a ensuite

$$dv = d\left(\frac{1-e^2}{1-e\cos u}\right) = d(1 + e\cos u) = -\,edu \sin u,$$

en négligeant les e^2 qui, comme on vient de le voir, sont insensibles; on a donc

$$dv = -\,0'',34 \sin(\odot - \Upsilon) = +\,0'',34 \sin(\odot - \pi) \ldots\ldots\ldots\ldots (A'')$$

$$\text{aberr.} = [20'',253 + 0'',34 \cos(\odot - \pi)] \sin I \cos IT$$
$$+\,0'',34 \sin(\odot - \pi) \sin I \sin IT \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$

Il ne reste qu'à substituer pour sin I cos IT et sin I sin IT leurs valeurs éventuelles.

13. Supposons d'abord que le cercle IS (fig. 44) soit un cercle de latitude; dans ce cas l'inclinaison $I = 90°$, on aura $\sin I = 1$, $IS = \lambda$ = latitude de l'étoile, IT = longitude de la terre moins longitude de l'étoile $= (♁ - E)$, et la formule (B) deviendra

$$SS' = [20'',253 + 0'',34\cos(\odot - \pi)]\cos(♁ - E) + 0'',34\sin(\odot - \pi)\sin(♁ - E)$$

et comme $♁ = \odot + 180°$, on aura

$$SS' = 20'',253 \cos(180° + \odot - E) + 0'',34 \cos(180° - \pi + E),$$

ou bien

$$SS' = -\,20'',253 \cos(\odot - E) - 0'',34 \cos(\pi - E);$$

mais

$$Ii = \text{aberr. en long.} = \frac{SS'}{\cos IS} = \frac{-20'',253\cos(\odot - E) - 0'',34\cos(\pi - E)}{\cos\lambda}.$$

En négligeant le petit terme dv dépendant de l'ellipticité, vous aurez la formule ordinaire. Ce petit terme est sensiblement constant, on peut le négliger sans autre inconvénient que de supposer la longitude moyenne plus forte qu'elle n'est de $\frac{0'',34 \cos(\pi - E)}{\cos\lambda}$.

Le coefficient $0'',34$ est environ $\frac{1}{60}$ du coefficient $20'',253$, ainsi dans le cas où l'on aurait une table du terme $20'',253 \cos(\odot - E)$, on entrerait de nouveau dans la table avec $(\pi - E)$ au lieu de $(\odot - E)$ et l'on prendrait le $\frac{1}{60}$ du nombre ainsi trouvé.

Cette aberration s'applique à la longitude moyenne, suivant la règle algébrique des signes, et l'on a la longitude apparente.

14. Supposons maintenant que le cercle IS soit perpendiculaire au cercle de latitude PSL (fig. 45) de l'étoile S; l'inclinaison I sera égale à $SL = \lambda$, car les angles S et L étant droits I sera le pôle de SL, et on aura $IL = IS = 90°$. Ainsi

$$IT = IL - TL = 90° - (E - \text{♁}) = 90° - E + 180° + \odot = \odot - E - 90°,$$

et par conséquent on aura (A)

$$\begin{aligned} -\text{aberr. latit.} &= v du \sin\lambda \cos(\odot - E - 90°) + dv \sin\lambda \sin(\odot - E - 90°) \\ &= v du \sin\lambda \cos[90° - (\odot - E)] - dv \sin\lambda \sin[90° - (\odot - E)] \\ &= v du \sin\lambda \sin(\odot - E) - dv \sin\lambda \cos(\odot - E); \end{aligned}$$

et en substituant les valeurs de $v du$ et de dv données par les équations (A'), (A''), on aura

$$\begin{aligned} -\text{aberr. latit.} = [20'',253 + 0'',34 \cos(\odot - \pi)] \sin\lambda \sin(\odot - E) \\ - 0'',34 \sin(\odot - \pi) \sin\lambda \cos(\odot - E), \end{aligned}$$

donc

$$\text{aberr. latit.} = 20'',253 \sin(E - \odot) \sin\lambda + 0'',34 \sin(E - \pi) \sin\lambda.$$

Le dernier terme est encore constant et insensible à fort peu près.

Il faut toujours placer la terre T dans le premier quart après l'intersection I.

15. En négligeant les termes dépendans de l'ellipticité on a prouvé que l'étoile, en vertu de l'aberration, décrivait une ellipse dont les demi-axes étaient $20'',25$ et $20'',25 \sin\lambda$: en supposant $\lambda = 90°$, cette ellipse devient un cercle. En effet dans ce cas, l'orbite de la terre étant circulaire, la courbe d'aberration devient un cercle parallèle à l'écliptique, au lieu que pour toute autre latitude λ, ce cercle se projette oblique-

ment sur la voûte céleste et doit se changer en ellipse. Cependant, si $\lambda = 0$, cette ellipse se réduit à une ligne droite; en effet l'étoile ne doit jamais sortir de l'écliptique, puisque la terre ne s'éloigne ni ne s'approche jamais du plan de l'écliptique et qu'elle y est sans cesse.

Presque tous les astronomes, à l'exemple de Clairaut, se sont servis de cette ellipse pour trouver les règles d'aberration en ascension droite et en déclinaison; mais elles se trouveront plus simplement et plus exactement par notre formule générale (B).

16. Soit EC l'écliptique (fig. 46), EQ l'équateur, PSI un cercle de déclinaison passant par l'étoile, T la terre, SS′ parallèle à l'équateur sera l'aberration en ascension droite sur le parallèle de l'étoile, $ab = \frac{SS'}{\cos aS} = \frac{SS'}{\cos D}$ sera l'aberration sur l'équateur.

Mais on a (A),

$$\begin{aligned}SS' &= vdu \sin I \cos IT + dv \sin I \sin IT\\ &= vdu \sin I \cos(ET - EI) + dv \sin I \sin(ET - EI)\\ &= vdu \sin I(\cos ET \cos EI + \sin ET \sin EI)\\ &\qquad + dv \sin I(\sin ET \cos EI - \cos ET \sin EI);\end{aligned}$$

et comme

$$\sin I \sin EI = \sin Ea = \sin Æ, \quad \text{et} \quad ET = \text{longitude de la terre} = ♁,$$

et

$$\sin I \cos EI = \sin I \sin EI \cot EI = \sin Æ \cos\omega \cot Æ = \cos\omega \cos Æ,$$

on aura en substituant ces valeurs

$$\begin{aligned}SS' &= vdu \cos ♁ \cos\omega \cos Æ + vdu \sin ♁ \sin Æ + dv \sin ♁ \cos\omega \cos Æ\\ &\qquad - dv \cos ♁ \sin Æ\\ &= - vdu \cos \odot \cos Æ \cos\omega - vdu \sin Æ \sin\odot - dv \cos Æ \sin\odot \cos\omega\\ &\quad + dv \sin Æ \cos\odot\\ &= -[20'',253 + 0'',34 \cos(\odot - \pi)] \cos\omega \cos Æ \cos\odot\\ &\quad - 0'',34 \sin(\odot - \pi) \cos\omega \cos Æ \sin\odot\\ &\quad - [20'',253 + 0'',34 \cos(\odot - \pi)] \sin Æ \sin\odot\\ &\quad + 0'',34 \sin(\odot - \pi) \sin Æ \cos\odot\end{aligned}$$

$$= -20'',253[\cos\omega\cos Æ\cos\odot+\sin Æ\sin\odot]$$

$$-0'',34\left\{\begin{array}{l}+\cos\omega\cos Æ\cos\odot\cos(\odot-\pi)\\+\cos\omega\cos Æ\sin\odot\sin(\odot-\pi)\\+\quad\sin Æ\sin\odot\cos(\odot-\pi)\\-\quad\sin Æ\cos\odot\sin(\odot-\pi)\end{array}\right\}$$

$$= -20'',253[\cos\omega\cos Æ\cos\odot+\sin Æ\sin\odot]$$
$$-0'',34[\cos\omega\cos Æ\cos\pi+\sin Æ\sin\pi];$$

et par conséquent

$$\text{aberration en ascension droite} = -\frac{20'',25(\cos\omega\cos Æ\cos\odot+\sin Æ\sin\odot)+0'',34(\cos\omega\cos Æ\cos\pi+\sin Æ\sin\pi)}{\cos D}$$

les derniers termes sont encore presque constans et insensibles.

17. Soit enfin (fig. 47) ETC l'écliptique, EQ l'équateur, Sa le cercle de déclinaison de l'étoile S, IVSCQ un cercle perpendiculaire au cercle de déclinaison, on aura les angles $S=a=90°$, et les côtés $SV=Va=aQ=SQ=90°$, les points Q et V sont les pôles de Sa, enfin les angles $V=Q=D$.

On a dans ce cas $IT=IE+ET$ et en substituant dans la formule

$$-\text{aberration en déclinaison} = vdu\sin I\cos IT+dv\sin I\sin IT,$$

on aura

$$-\text{aberr. déclin.} = vdu\sin I(\cos IE\cos ET-\sin IE\sin ET)$$
$$+dv\sin I(\sin IE\cos ET+\cos IE\sin ET)$$

$$= vdu\sin I(-\cos IE\cos\odot+\sin IE\sin\odot)$$
$$+dv\sin I(-\sin IE\cos\odot-\cos IE\sin\odot);$$

mais

$$\sin V : \sin IE :: \sin I : \sin VE,$$

ou

$$\sin I\sin IE=\sin V\sin VE=\sin D\cos Æ;$$

de plus

$$\sin I\cos IE=\sin I\sin IE\cot IE=\sin D\cos Æ\cot IE;$$
$$\cos c\cos a'=\cot c''\sin c-\sin a'\cot a''$$

ou

$$\sin Æ \cos \omega = \cot IE \cos Æ - \sin \omega \cot(180° - D);$$

donc

$$\cos Æ \cot IE = \sin Æ \cos \omega - \sin \omega \cot D,$$

donc

$$\sin I \cos IE = \cos \omega \sin D \sin Æ - \sin \omega \cos D.$$

Snbstituons ces valeurs de sin I sin IE et de sin I cos IE, la formule viendra

$$\begin{aligned} &- \text{aberration déclinaison} \\ &= vdu(-\cos\odot\cos\omega \sin D \sin Æ + \cos\odot \sin\omega \cos D + \sin\odot \sin D \cos Æ) \\ &+ dv(-\cos\odot \sin D \cos Æ - \sin\odot\cos\omega \sin D \sin Æ + \sin\odot \sin\omega \cos D). \end{aligned}$$

Si l'on fait pour abréger,

$$vdu = a + b\cos(\odot - \pi), \quad dv = b\sin(\odot - \pi), \quad (A', A'')$$

on aura

$$\begin{aligned} &- \text{aberration déclinaison} \\ &= a(-\cos\odot\cos\omega \sin D \sin Æ + \cos\odot\sin\omega \cos D + \sin\odot\sin D\cos Æ) \\ &+ b\cos(\odot - \pi)(-\cos\odot\cos\omega\sin D\sin Æ + \cos\odot\sin\omega\cos D + \sin\odot\sin D\cos Æ) \\ &+ b\sin(\odot - \pi)(-\cos\odot\sin D\cos Æ - \sin\odot\cos\omega\sin D\sin Æ + \sin\odot\sin\omega\cos D). \end{aligned}$$

En écrivant seulement les termes qui multiplient b sous cette forme

$$\begin{aligned} &- b\cos\omega\sin D\sin Æ[\cos\odot\cos(\odot - \pi) + \sin\odot\sin(\odot - \pi)] \\ &+ b\sin\omega\cos D[\cos\odot\cos(\odot - \pi) + \sin\odot\sin(\odot - \pi)] \\ &+ b\sin D\cos Æ[\sin\odot\cos(\odot - \pi) - \cos\odot\sin(\odot - \pi)], \end{aligned}$$

on aura

$$-b\cos\omega\sin D\sin Æ\cos\pi + b\sin\omega\cos D\cos\pi + b\sin D\cos Æ\sin\pi,$$

et par conséquent, en remettant les valeurs numériques de a et de b, on aura

$$\begin{aligned} \text{aberr. décl.} = &+ 20'',253\sin D(\cos\omega\sin Æ\cos\odot - \cos Æ\sin\odot) \\ &- 20'',253\sin\omega\cos\odot\cos D - 0'',34\sin\omega\cos\pi\cos D \\ &+ 0'',34\sin D(\cos\omega\sin Æ\cos\pi - \cos Æ\sin\pi). \end{aligned}$$

Cette démonstration serait de deux tiers moins longue, si l'on négligeait l'ellipticité à l'exemple de tous les astronomes.

J'ai

J'ai démontré toutes ces formules d'une autre manière dans la Connaissance des Tems de l'an X, pag. 346; mais cette manière est plus complète et plus élémentaire.

18. Toutes ces démonstrations partent du même principe et n'exigent qu'une attention, c'est de placer dans la figure la terre ou T dans le premier quart, et dans l'angle aigu I du cercle IS afin que IT ne soit pas un arc négatif, ce qui rendrait la règle des signes plus compliquée. L'élimination de I et de IT, très-facile pour la longitude et même pour la latitude, se fait encore assez aisément pour l'ascension droite par le triangle rectangle EI*a* (fig. 46); elle est un peu plus longue pour la déclinaison, parce que le triangle IVE (fig. 47) est obliquangle; il faut songer d'ailleurs que IVE est obtus nécessairement; après cela, le calcul analytique est uniforme, mais un peu long.

19. On remarquera que les termes dépendans de l'ellipticité sont de même forme et de même signe que les termes principaux; qu'ils diffèrent pour chaque étoile, mais sont constans pour la même, et qu'on en ferait aisément des tables générales à deux entrées pour l'ascension droite et la déclinaison. Mon avis serait qu'on les négligeât, mais il était curieux de démontrer qu'on le pouvait sans inconvénient, ce que personne n'a fait, que je sache, avant moi, ni depuis.

20. Quoique ces formules soient les plus naturelles qu'on puisse avoir, le calcul en serait long si l'on avait beaucoup d'étoiles à réduire. Je les ai mises en tables générales, qui serviront pour toutes les étoiles, voyez le dernier volume des Éphémérides de Lalande; j'en ai tiré de particulières pour quelques centaines d'étoiles et m'en suis servi pour vérifier les tables de Mezger; MM. Burckhardt, de Zach et Cagnoli se sont servi de mes formules pour un nombre plus grand de tables particulières. MM. de Zach et Gauss en ont aussi fait usage pour des tables générales de différentes formes.

21. Dans la formule d'aberration en longitude (n° 13). Supposez $E=\odot$ et $\lambda=0$, c'est-à-dire une étoile qui accompagnerait partout le soleil, la formule servira pour le soleil et deviendra

$$-20'',253-0'',34\cos(\odot-\pi);$$

c'est celle que j'ai donnée dans la Connaissance des Tems de 1794, j'y étais déjà parvenu par une autre voie.

Pour faire une table de $\frac{-20'',253\cos(E-\odot)-0'',34\cos(E-\pi)}{\cos\lambda}$, on fait d'abord abstraction de $\cos\lambda$ et l'on calcule le premier terme de degré en degré; les nombres qu'on y prend avec l'argument $(E-\odot)$ ou $(\odot-E)$, ce qui est indifférent pour un cosinus, se multiplient ensuite par $\text{séc}\,\lambda$.

On entre ensuite dans la même table avec $(E-\pi)$ ou $(\pi-E)$, et l'on multiplie par $\text{séc}\,\lambda$.

Pour éviter cette multiplication, faites $\frac{1}{\cos\lambda}=n\cos A$, la formule deviendra

$$-20'',253\,n\cos A\cos(E-\odot)$$
$$=-20'',253\,\frac{n}{2}\,[\cos(E-\odot-A)+\cos(E-\odot+A)].$$

On calcule une table subsidiaire de $\cos\lambda=\frac{1}{n\cos A}$, il faut que $n\cos A>1$, ce qui est toujours possible. M. de Zach a fait $n=10$, et $n=100$ quand λ approche de $90°$.

22. La formule

$$\text{aberration en latitude}=20'',253\sin\lambda\sin(E-\odot)$$
$$=20'',253\sin\lambda\cos[90°-(E-\odot)]=20'',253\sin\lambda\cos(E-\odot-90°)$$
$$=-20'',253\sin\lambda\cos(E-\odot+90°).$$

Par ce moyen la même table sert pour la longitude et la latitude. On multiplie par $\sin\lambda$ pour la latitude et par $\text{séc}\,\lambda$ pour la longitude. L'on peut éviter la multiplication en transformant $20'',253\sin\lambda\sin(E-\odot)$ en $10'',1265[\cos(E-\odot-\lambda)-\cos(E-\odot+\lambda)]$; mais on a deux argumens à former, deux nombres à prendre, l'avantage est médiocre ou nul.

23. La formule d'aberration en ascension droite peut s'écrire ainsi en omettant d'abord $\frac{1}{\cos D}=\text{séc}\,D$ (16)

$$-20'',253(\cos\omega\cos Æ\cos\odot+\sin Æ\sin\odot)$$
$$=-\frac{20'',253}{2}\{\cos\omega[\cos(\odot-Æ)+\cos(\odot+Æ)]+\cos(\odot-Æ)-\cos(\odot+Æ)\}$$
$$=-20'',253\left[\cos(\odot-Æ)\frac{(1+\cos\omega)}{2}+\cos(\odot+Æ)\left(\frac{\cos\omega-1}{2}\right)\right]$$
$$=20'',253\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\cos(\odot+Æ)-20'',253\cos^2\tfrac{1}{2}\omega\cos(\odot-Æ).$$

Soit $\omega=23°\,28'$, on aura

$$\text{aberr. asc. droite}=\frac{0'',837\cos(Æ+\odot)-19'',416\cos(Æ-\odot)}{\cos D}.$$

On peut renfermer cette formule dans deux petites tables commodes.

L'aberration en déclinaison se divise en deux parties, la seconde est

$$-20'',253\sin\omega\cos\odot\cos D=-10'',1265\sin\omega[\cos(\odot-D)+\cos(\odot+D)]$$
$$=-4'',033\cos(\odot-D)-4'',033\cos(\odot-D).$$

La première

$$20'',253\sin D(\sin Æ\cos\omega\cos\odot-\sin\odot\cos Æ)$$
$$=+\frac{20'',253}{2}\sin D\cos\omega[\sin(Æ+\odot)+\sin(Æ-\odot)]$$
$$-\frac{20'',253}{2}\sin D[\sin(Æ+\odot)-\sin(Æ-\odot)]$$
$$=-0'',837\sin D\sin(Æ+\odot)+19'',416\sin D\sin(Æ-\odot)$$
$$=-19'',416\sin D\cos(Æ-\odot+90°)+0'',837\sin D\cos(Æ+\odot+90°).$$

Cette partie se trouvera donc par les tables qui servent pour l'ascension droite. Ainsi l'aberration en ascension droite et en déclinaison peuvent se trouver par trois petites tables qui tiennent dans une page. Je les ai données dans la Connaissance des Tems de 1788. (Voyez Astron. de Lalande, tome III, p. 112.)

24. J'ai aussi montré comment on pourrait décomposer en quatre, les deux termes qui dépendent de sin D et éviter la multiplication; mais l'avantage me paraît nul.

$$\text{aberr. }Æ=-\left(\frac{20'',253}{\cos D}\right)\cos\omega\cos Æ\left(\cos\odot+\frac{\tang Æ}{\cos\omega}\sin\odot\right),$$

et en faisant $\frac{\tang Ⓡ}{\cos \omega} = \tang(Ⓡ + y)$,

$$\text{aberr. } Ⓡ = -\left(\frac{20'',253}{\cos D}\right)\frac{\cos \omega \cos Ⓡ}{\cos(Ⓡ + y)}[\cos\odot\cos(Ⓡ + y) + \sin\odot\sin(Ⓡ + y)]$$
$$= -\frac{20'',253 \cos\omega \cos Ⓡ \cos(Ⓡ + y - \odot)}{\cos D \cos(Ⓡ + y)}.$$

C'est la formule de La Caille : on cherche un angle $(Ⓡ + y)$ au moyen de $\tang(Ⓡ + y) = \frac{\tang Ⓡ}{\cos\omega}$, ou bien on calcule la série

$$y = \tang^2 \tfrac{1}{2}\omega \sin 2Ⓡ + \tfrac{1}{2}\tang^4 \tfrac{1}{2}\omega \sin 4Ⓡ + \text{etc.}$$

On calcule pour Ⓡ et D, d'espace en espace, comme de degré en degré, le coefficient $\frac{-20'',253 \cos\omega \cos Ⓡ}{\cos D \cos(Ⓡ + y)}$, et avec ce coefficient on trouve dans une seconde table l'aberration entière avec $(Ⓡ + y - \odot)$.

25. La Caille, qui était arrivé à ces formules par une voie toute différente, les a mises en tables dans ses *Astronomiæ fundamenta;* ces tables ont dû lui être d'un grand seconrs :

$$\text{aberr. décl.} = 20'',253(\cos\omega\sin D\sin Ⓡ - \sin\omega\cos D)\cos\odot$$
$$- 20'',253\sin D\cos Ⓡ\sin\odot$$
$$= 20'',253(\cos\omega\sin D\sin Ⓡ - \sin\omega\cos D)\left(\cos\odot - \frac{\sin D \cos Ⓡ \sin\odot}{\cos\omega\sin D\sin Ⓡ - \sin\omega\cos D}\right)$$
$$= 20'',253(\cos\omega\sin D\sin Ⓡ - \sin\omega\cos D)(\cos\odot - \tang x\sin\odot)$$
$$= 20'',253\frac{\sin D\cos Ⓡ}{\tang x}(\cos\odot - \tang x\sin\odot) = \frac{20'',253\sin D\cos Ⓡ\cos(\odot + x)}{\sin x};$$

mais il est aisé de voir que $x = EC$ (fig. 47) $= 180° - IE$; car nous avons fait

$$\tang x = \frac{\cos Ⓡ \sin D}{\cos\omega \sin D \sin Ⓡ - \sin\omega \cos D} = \frac{\cos Ⓡ}{\cos\omega \sin Ⓡ - \sin\omega \cot D};$$

donc

$$\cot x = \cos\omega \tang Ⓡ - \frac{\sin\omega \cot D}{\cos Ⓡ};$$

et par conséquent (17)

$$\cot x = \cot IE,$$

ou

$$x = 180° - IE = EC.$$

C'est encore la formule de La Caille qui l'avait mise en deux tables; l'une qui donnait le coefficient $\frac{20'',253 \sin D \cos Æ}{\sin x}$, et l'autre qui achevait l'opération.

Pour trouver IE, il avait fait une table; mais IE croît si rapidement que la table ne paraissait pas d'un usage bien sûr, par l'impossibilité de prendre les parties proportionnelles; il est vrai que le plus souvent une erreur sensible sur IE n'avait que des effets imperceptibles. Mes tables générales sont plus commodes que tout cela, quoiqu'elles donnent cette aberration en plusieurs parties.

26. Il nous reste à expliquer les tables de M. Gauss. Il n'en a pas donné la démonstration, mais elle découle aisément de nos formules.

$$\text{aberr. asc. droite} = -\left(\frac{20'',253}{\cos D}\right) \cos\omega \cos\odot \left(\cos Æ + \frac{\text{tang}\odot}{\cos\omega} \sin Æ\right),$$

et faisant $\frac{\text{tang}\odot}{\cos\omega} = \text{tang}\,(\odot + u)$,

$$\text{aberr. asc. droite} = -\left(\frac{20'',253}{\cos D}\right) \cos\omega \cos\odot \frac{\cos(\odot + u - Æ)}{\cos(\odot + u)}.$$

On voit que cette table a quelque analogie avec celle de La Caille. Chez La Caille nous corrigeons Æ, en prenant

$$Æ + \text{tang}^2 \tfrac{1}{2}\omega \sin 2Æ + \tfrac{1}{2} \text{tang}^4 \tfrac{1}{2}\omega \sin 4Æ + \text{etc.};$$

c'est-à-dire que nous prenons le point de l'écliptique qui a même ascension droite que l'étoile. M. Gauss mène par le lieu du soleil un cercle de latitude qui va couper l'équateur en un point dont l'ascension droite $= \odot + \text{tang}^2 \frac{1}{2}\omega \sin 2\odot + \text{etc.}$

La table de correction est la même dans les deux méthodes; ici la correction s'applique au lieu du soleil; La Caille l'appliquait à l'ascension droite de l'étoile, du reste la marche était la même.

La Caille avait mis ses tables en nombres pour y prendre presque à vue les aberrations, ce qui est certainement plus commode pour un astronome comme La Caille, qui observait beaucoup; les tables de M. Gauss sont en partie logarithmiques, et le calcul s'achève par les logarithmes, ce qui peut être plus exact, mais un peu plus long.

Pour la partie de l'aberration en déclinaison qui peut se trouver par

les tables de l'ascension droite, disposez ainsi la formule

$$+20'',253 \cos\omega \sin D \sin Æ \cos\odot - 20'',253 \sin D \cos Æ \sin\odot$$
$$= +20'',253 \cos\omega \sin D \cos\odot \left[\sin Æ - \left(\frac{\text{tang}\,\odot}{\cos\omega}\right) \cos Æ\right]$$
$$= +20'',253 \cos\omega \sin D \cos\odot (\sin Æ - \text{tang}\,(\odot + y) \cos Æ)$$
$$= -\frac{20'',253 \cos\omega \sin D \cos\odot \sin(\odot + y - Æ)}{\cos(\odot + y)},$$

ayant fait $\frac{\text{tang}\,\odot}{\cos\omega} = \text{tang}(\odot + y)$.

On voit qu'on peut prendre un arc auxiliaire par la formule

$$\frac{\text{tang}\,\odot}{\cos\omega} = \text{tang}(\odot + y);$$

de sorte que

$$\odot + y = \odot + \text{tang}^2 \tfrac{1}{2}\omega \sin 2\odot + \tfrac{1}{2} \text{tang}^4 \tfrac{1}{2}\omega \sin 4\odot + \text{etc.}$$

Ainsi la même table donnera u et y, $\odot + u = \odot + y$; et même les coefficiens ne diffèrent que par $\frac{1}{\cos D}$ qui est au premier, et sin D qui est au second, ensorte qu'en multipliant le premier par cosD sinD on a le second.

Par ce moyen les deux aberrations en ascension droite et en déclinaison se ramènent aux mêmes tables, ainsi que dans ma méthode. Cette méthode, en cela, l'emporte sur celle de La Caille, qui a de son côté l'avantage d'avoir l'aberration de déclinaison en un seul terme, au lieu que M. Gauss est encore obligé de chercher séparément les deux petits termes dépendans de $(\odot \pm D)$.

27. Pour calculer les tables particulières d'étoiles, ce que je connais de plus commode, après avoir tout essayé, ce sont mes grandes tables générales.

Pour un calcul isolé, je crois encore, quand on consent à se servir de tables de logarithmes, que le plus simple est d'en revenir à mes formules. On peut faire imprimer des cadres, où l'on place d'avance les logarithmes constans, et l'indication des quantités variables dans l'ordre le plus naturel, et l'on n'a plus que les logarithmes des quantités variables à placer: en voici le modèle.

Calcul de l'Aberration en Æ et en Déclinaison.

D = 67° 30′	Æ = 36° 40′	⊙ = 45° 36′
log 20″,253 cos ω — 1,26901	20″,253 — 1,30649	log 20″,253 sin ω — 0,90651
Compl. logcos D... 0,41716	 0,41716	log cos D..... 9,58284
log cos Æ,....... 9,90424	... sin Æ... 9,77609	log cos ⊙.... 9,84489
log cos ⊙........ 9,84489	... sin ⊙... 9,85399	— 2″,159...= 0,33424
— 27″,246.......= 1,43530	— 22″580 = 1,35373	— 10″,724... 2ème terme
— 22″,580		
— 49″,826 = aberr. Æ		+ 7″,172... 3ème terme
+ 1,26901	— 1,30649	— 5″,711 = aberr. décl.
sin D...... 9,96562	 9,96562	
sin Æ..... 9,77609	cos Æ.... 9,90424	total, 11 logarithmes
cos ⊙..... 9,84489	sin ⊙..... 9,85399	à chercher.
+ 7″,172 = 0,85561	— 10″,724 = 1,03034	

L'avantage est qu'on n'a nul argument à former. Dans le type on ne placerait que les cinq logarithmes constans et l'on imprimerait tout ce qui est en lettres, laissant en blanc la place des logarithmes et des nombres variables.

28. Voilà tout ce qu'on a pu imaginer pour faciliter le calcul de l'aberration; au coefficient 20″,25 près, qui a été donné par les satellites, tout le reste dépend de la théorie mathématique; car le coefficient 0″,34 = 20″,25 × excentricité de la terre. Ainsi l'on aurait pu d'avance tracer toutes les règles de l'aberration et chercher par observation ce coefficient.

Notre formule (23)

$$\sin D[19'',416 \sin(Æ - \odot) - 0'',837 \sin(Æ + \odot)] - 8'' \cos\odot \cos D$$

appliquée à la polaire se réduit à

$$19'',408 \sin(Æ - \odot) - 0'',837 \sin(Æ + \odot) - 0'',233 \cos\odot.$$

Le premier terme tout seul donne déjà une variation de 38″,8 en six mois pour la distance polaire et zénitale, ce qui explique les observa-

tions de Picard et de Flamsteed. Supposons donc qu'on eût trouvé 39″, la théorie donnait

$$19'',5 = a \cos^2 \tfrac{1}{2}\omega = a \cos^2 11^\circ\, 44',$$

et

$$a = \frac{19'',5}{\cos^2 11^\circ\, 44'} = 20'',34;$$

ces observations suffisaient donc si l'on eût connu la théorie.

Supposons qu'on veuille employer la déclinaison des astres auprès du zénit, comme Bradley, pour y faire servir un secteur d'un rayon plus grand que celui des grands quarts de cercle; et pour éviter d'ailleurs l'inconstance des réfractions à de petites hauteurs. La formule (17).

$$\text{aberr. décl.} = a \cos\omega \sin D \sin \text{Æ} \cos\odot - a \sin D \cos \text{Æ} \sin\odot - a \sin\omega \cos D \cos\odot$$

nous avertirait de ne pas choisir une étoile trop voisine de l'équateur, parce que les deux termes les plus forts ont le facteur $\sin D$: ainsi les étoiles près du zénit étaient convenables. Bradley pouvait choisir des étoiles dont la déclinaison était de 69°, le sinus étant 0,9, on pouvait observer neuf dixièmes de l'effet ou $1\frac{8}{10}$ en doublant comme nous allons dire.

Il fallait en outre que $\cos \text{Æ} \sin\odot$ fût une fraction considérable, il fallait par conséquent observer une étoile voisine des équinoxes pendant que le soleil était aux solstices; en supposant ces deux conditions remplies, la formule se réduisait à $a \sin D$.

En différentiant la formule précédente, nous aurions directement le lieu du soleil au *maximum :* car en divisant tout par $d\odot$, on a

$$0 = -a \cos\omega \sin D \sin \text{Æ} \sin\odot - a \sin D \cos \text{Æ} \cos\odot + a \sin\omega \cos D \sin\odot,$$

ce qui donne

$$\cot\odot = \frac{\sin\omega \cos D - \cos\omega \sin D \sin \text{Æ}}{\sin D \cos \text{Æ}} = \frac{\sin\omega \cot D - \cos\omega \sin \text{Æ}}{\cos \text{Æ}} = -\cot IE = \cot EC;$$

donc

$$\odot = 180^\circ - IE \quad (\text{fig. } 47).$$

Le *maximum* d'aberration en déclinaison a donc lieu quand le soleil se trouve à 180° de l'intersection I, ou dans les deux nœuds du cercle perpendiculaire au cercle de déclinaison et le *maximum* $\frac{20'',253 \sin D \cos \text{Æ}}{\sin x}$,

nous

(25) nous dit de prendre une étoile voisine des équinoxes. Ces étoiles passeront au méridien long-tems après le soleil; nous les observerons à deux époques de l'année éloignées d'environ six mois; la différence entre les deux observations sera à peu près $2a \sin D \cos Æ \cos(\odot + x)$, puisque ce cosinus changera de signe. Ainsi divisant la différence observée par $\sin D \cos Æ \cos(\odot + x)$, nous aurons $2a$ avec tout l'avantage possible.

En général, soit la différence observée de déclinaison $D - D'$, nous aurons $D - D' = fa + f'a$, donc $a = \frac{D - D'}{f + f'}$.

29. Bradley ayant ainsi observé plusieurs étoiles remarquables, trouva les quantités suivantes,

Étoiles.	D—D′	$2a$
γ Dragon.......	39″	40″4
ζ Dragon.......	59	40.2
η Gr. Ourse.....	36	40.4
α Cassiopée.....	34	40.8
τ Persée.......	25	41.0
α Persée.......	23	40.2
35 de la Giraffe....	19	40.2
la Chèvre.....	16	40.0
Milieu... 40″4	Moitié... 20″2	

En rejetant les deux dernières étoiles comme moins concluantes, on aurait 40″,5 par un milieu entre les six autres, ou 20″,25 pour la valeur de a.

Les satellites de Jupiter m'ont donné 20″,25, ainsi des observations de deux genres bien différens, nous ont conduits à deux résultats identiques; il reste donc prouvé, par le fait, que la vitesse de la lumière est telle, qu'elle vient à nous du soleil en 8′ 13″, quand le soleil est à sa moyenne distance; que l'aberration moyenne du soleil est de 20″,25; et que le coefficient constant de l'aberration est 20″,25; enfin que la terre se meut autour du soleil, et que l'idée de Copernic est appuyée sur des faits incontestables.

30. Dès que la brillante découverte de Bradley fut connue, M. Le Monnier s'empressa de répéter à Paris et à Amiens, avec le secteur du *cercle polaire*, ces observations de distance au zénit sur plusieurs étoiles; et ses observations confirmèrent pleinement la découverte et la théorie avec laquelle s'accordent également les observations faites depuis cette époque. Des variations de 40″ dans la déclinaison de la polaire, observées par Picard et Flamstéed, avaient été la première cause de ces recherches. En effet la polaire, dont la déclinaison est de plus de 88° et l'ascension droite fort petite, était une des étoiles qui devait avoir l'aberration la plus sensible ou de près de 20″. J'ai observé cette étoile dans ses passages du soir, à Paris en hiver; Méchain l'a observée dans l'été dans la position contraire, nos résultats devaient différer de près de 40″, si l'aberration n'existait pas; ils s'accordent parfaitement, donc l'aberration existe, donc elle est telle que nous l'avons supposée dans nos calculs.

31. Plusieurs planètes sont affectées sensiblement par l'aberration; j'ai calculé un très-grand nombre d'observations de planètes; en les comparant aux tables, j'ai toujours soigneusement calculé l'aberration, et j'ai remarqué constamment que les erreurs des tables eussent été bien plus considérables et plus irrégulières, si j'eusse négligé l'aberration; enfin l'aberration est prouvée par toutes les observations exactes qu'on a faites depuis 80 ans, il n'est plus permis de la révoquer en doute, non plus que les conséquences qui s'en déduisent. Et en effet, aucun astronome n'a réclamé, et de toutes les découvertes dont s'honore l'esprit humain, il n'y en a pas une seule qui ait été moins contestée à sa naissance ni plus complètement confirmée par les observations postérieures. Ainsi l'aberration a décidé la question du mouvement de la terre et du mouvement progressif de la lumière; elle a donné la mesure de ce mouvement et constaté pleinement ce qu'ont donné les éclipses des satellites, avec cette différence seulement, que les satellites par eux-mêmes ne prouveraient rien en faveur du système de Copernic, puisque l'équation de la lumière ne leur est pas moins nécessaire dans le système de Tycho.

Aberration des Planètes.

32. Nous avons vu (nº 10) que l'aberration pour une planète quelconque a pour expression — 0.137 D.M; D étant la distance de la

planète à la terre et M son mouvement horaire; il nous reste maintenant à mettre dans cette expression la valeur analytique de M, car nous verrons que la distance D disparaîtra d'elle-même.

33. Soit R le rayon vecteur de la terre, r celui de la planète, L sa latitude géocentrique, D sa distance à la terre, D cos L sera la distance réduite à l'écliptique. Suivant cette notation, les formules (XXVII. 27) deviendront

$$D \sin L = r \sin \lambda \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$R \sin T = r \cos \lambda \sin P \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

$$D \cos L = R \cos T + r \cos \lambda \cos P \text{ ou } D \cos L - R \cos T = r \cos \lambda \cos P \; (3),$$

$$180° = S + T + P, \text{ d'où } 0 = dS + dT + dP \text{ et } dP = -dS - dT \; (4).$$

Soit, de plus,

G = longitude géocentrique de la planète.
φ = longitude héliocentrique sur l'écliptique.
Π = longitude héliocentrique de la planète sur l'orbite.
$\text{♁} = \text{longit. héliocent. terre} = 180° + \odot;\; d\odot = d\text{♁} \ldots\ldots (5),$
$S = \varphi - \text{♁};\; dS = d\varphi - d\text{♁} = d\varphi - d\odot \ldots\ldots\ldots (6),$
$G = \odot - T;\; dG = d\odot - dT = M \ldots\ldots\ldots\ldots (7),$
$G = \varphi + P;\; dG = d\varphi + dP \text{ et } dP = dG - d\varphi \ldots\ldots (8),$
I = inclinaison de l'orbite.
C = argument de latitude sur l'écliptique.
C' = argument de latitude sur l'orbite.

$$\operatorname{tang} C = \cos I \operatorname{tang} C' \quad \text{et} \quad dC = \frac{dC' \cos I \cos^2 C}{\cos^2 C'} \ldots\ldots\ldots\ldots (9),$$

$$\cos C' = \cos C \cos \lambda \quad \text{ou} \quad \cos C = \frac{\cos C'}{\cos \lambda}; \quad \frac{\cos C}{\cos C'} = \frac{1}{\cos \lambda} \ldots\ldots (10).$$

Le mouvement du nœud étant insensible en un jour, ainsi que le mouvement du périhélie, nous aurons

$$d\varphi = dC = \frac{dC' \cos I \cos^2 C}{\cos^2 C'} = \frac{d\Pi \cos I}{\cos^2 \lambda} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11),$$

$$d\Pi = \frac{d\varphi \cos^2 \lambda}{\cos I} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12),$$

$$\sin \lambda = \sin I \sin C' \quad \text{et} \quad d\lambda = \frac{dC' \sin I \cos C'}{\cos \lambda} = \frac{d\Pi \sin I \cos C'}{\cos \lambda} \ldots (13).$$

34. Différentions l'équation (2) $R \sin T = r \cos\lambda \sin P$, nous aurons

$$dR\sin T + dT.R\cos T = dr\cos\lambda\sin P + dP.r\cos\lambda\cos P - d\lambda.r\sin\lambda\sin P;$$

ou (4) $=dr\cos\lambda\sin P + r\cos\lambda\cos P(-dS - dT) - d\lambda.r\sin\lambda\sin P,$
$=dr\cos\lambda\sin P - r\cos\lambda\cos P dS - r\cos\lambda\cos P dT - d\lambda.r\sin\lambda\sin P,$

et (6) $=dr\cos\lambda\sin P - r\cos\lambda\cos P dT - r\cos\lambda\cos P(d\phi - d\odot) - d\lambda.r\sin\lambda\sin P$

$$(R\cos T + r\cos\lambda\cos P)dT = dr\cos\lambda\sin P - r\cos\lambda\cos P d\phi + r\cos\lambda\cos P d\odot - dR\sin T - d\lambda.r\sin\lambda\sin P$$

(3) $D\cos L dT = dr\cos\lambda\sin P - r\cos\lambda\cos P d\phi + (D\cos L - R\cos T)d\odot - dR\sin T - r\sin\lambda\sin P d\lambda$

$$D\cos L dT - D\cos L d\odot = dr\cos\lambda\sin P - r\cos\lambda\cos P d\phi - R\cos T d\odot - dR\sin T - r\sin\lambda\sin P d\lambda$$

$$D\cos L(dT - d\odot) = -R\cos T d\odot - dR\sin T - r\cos\lambda\cos P d\phi + dr\cos\lambda\sin P - r\sin\lambda\sin P d\lambda.$$

Par la formule (7) $dT - d\odot = -M = -$ mouvement horaire géocentrique; D est la distance, ainsi pour avoir l'aberration en longitude, il ne reste qu'à multiplier le second membre par $\frac{0,137}{\cos L}$; on a donc

$$\text{aberr. long.} = \left(\frac{0,137}{\cos L}\right)\left\{\begin{array}{l} -R\cos T d\odot - dR\sin T - r\cos\lambda\cos P d\phi \\ \qquad + dr\cos\lambda\sin P - r\sin\lambda\sin P d\lambda \end{array}\right\}$$

cette équation s'applique à la longitude vraie pour la convertir en longitude apparente.

55. Soit 1 le demi-grand axe de l'orbite terrestre, B le demi-petit axe, E l'excentricité, dM le mouvement horaire moyen du soleil, nous aurons (XXI.42),

$$d\odot = \left(\frac{BdM}{R^2}\right),$$

$$Rd\odot = \frac{BdM}{R} = \left(\frac{BdM(1+E\cos V)}{B^2}\right) = \left(\frac{dM}{B}\right)(1+E\cos V) = \left(\frac{dM}{B}\right) + \left(\frac{EdM}{B}\right)\cos V,$$

V étant l'anomalie vraie du soleil comptée du périgée.

$$B^2 = R + ER\cos V,$$

donc

$$0 = dR + EdR\cos V - ER\sin V dV,$$

donc

$$dR = \frac{R.E\sin V dV}{1+E\cos V} = \frac{R.E\sin V dM.B}{(1+E\cos V)R^2} = \frac{B.E\sin V dM}{(1+E\cos V)R}$$
$$= \frac{B.E\sin V dM(1+E\cos V)}{B^2(1+E\cos V)} = \frac{E\sin V dM}{B} = \left(\frac{EdM}{B}\right)\sin V.$$

Soient a, b, e, dm et u les demi-axes, l'excentricité, le mouvement horaire moyen et l'anomalie vraie de la planète, nous aurons

$$du = d\Pi = \frac{abdm}{r^2}$$
$$rd\Pi = \frac{abdm}{r} = \frac{abdm(a+e\cos u)}{b^2} = \left(\frac{dm}{b}\right)(a^2+ae\cos u)$$
$$\frac{rd\Pi}{\cos\lambda} = \left(\frac{dm}{b\cos\lambda}\right)(a^2+ae\cos u) = \left(\frac{r}{\cos\lambda}\right).\frac{d\varphi\cos^2\lambda}{\cos I} = \frac{rd\varphi\cos\lambda}{\cos I};$$

donc

$$r\cos\lambda\, d\varphi = \left(\frac{dm}{b}\right)\left(\frac{\cos I}{\cos\lambda}\right)(a^2+ae\cos u) = \left(\frac{a^2dm}{b}\right)\left(\frac{\cos I}{\cos\lambda}\right)+\left(\frac{aedm}{b}\right)\left(\frac{\cos I}{\cos\lambda}\right)\cos u$$
$$dr = \frac{aedm\sin u}{b} \quad \text{et} \quad dr\cos\lambda = \left(\frac{aedm\cos\lambda}{b}\right)\sin u$$
$$rd\lambda = \frac{rd\Pi\sin I\cos C'}{\cos\lambda} = \frac{r\sin I\cos C'}{\cos\lambda}.\frac{abdm}{r^2} = \frac{\sin I\cos C'}{\cos\lambda}\,\frac{abdm}{r}$$
$$= \frac{\sin I\cos C'}{\cos\lambda}.\frac{abdm(a+e\cos u)}{b^2}$$
$$= \frac{dm\sin I\cos C'}{b\cos\lambda}(a^2+ae\cos u) = \frac{a^2dm\sin I\cos C'}{b\cos\lambda}+\frac{aedm\sin I\cos C'\cos u}{b\cos\lambda}.$$

36. Portons toutes ces valeurs dans l'équation (34) qui deviendra

$$\text{aberr. long.} = \left(\frac{0{,}137}{\cos L}\right)\left\{\begin{array}{l} -\left(\frac{dM}{B}\right)\cos T-\left(\frac{EdM}{B}\right)\cos V\cos T-\left(\frac{EdM}{B}\right)\sin V\sin T \\ -\left(\frac{a^2dm}{b}\right)\left(\frac{\cos I}{\cos\lambda}\right)\cos P-\left(\frac{aedm}{b}\right)\left(\frac{\cos I}{\cos\lambda}\right)\cos u\cos P \\ +\left(\frac{aedm\cos\lambda}{b}\right)\sin u\sin P-\frac{a^2dm\sin I\sin\lambda\cos C'\sin P}{b\cos\lambda} \\ -\frac{aedm\sin I\sin\lambda\cos C'\cos u\sin P}{b\cos\lambda} \end{array}\right\}$$

$$= \frac{0{,}137}{\cos L}\left\{-\left(\frac{dM}{B}\right)\cos T-\left(\frac{EdM}{B}\right)\cos(V-T)\right\}$$
$$+\left(\frac{0.137}{\cos L\cos\lambda}\right)\left\{\begin{array}{l} -\left(\frac{a^2dm\cos I}{b}\right)\cos P-\left(\frac{aedm\cos I}{b}\right)\cos u\cos P+\left(\frac{aedm\cos^2\lambda}{b}\right)\sin u\sin P \\ -\left(\frac{a^2dm\sin^2 I}{b}\right)\sin C'\cos C'\sin P-\left(\frac{aedm\sin^2 I}{b}\right)\sin C'\cos C'\cos u\sin P \end{array}\right\}$$

la première partie qui ne dépend que de E, B, dM, T et de $V-T=\odot-\pi-T=(G-\pi)$ est commune à toutes les planètes; mettons-la à part pour ne nous occuper que du reste.

$$\text{aberr. long.}=+\left(\frac{0,137}{\cos L\cos\lambda}\right)\left\{\begin{array}{l}-\left(\frac{a^2dm\cos I}{b}\right)\cos P-\left(\frac{aedm}{b}\right)\cos u\cos P\\+\left(\frac{2aedm\sin^2\frac{1}{2}I}{b}\right)\cos u\cos P+\left(\frac{aedm}{b}\right)\sin u\sin P\\-\left(\frac{aedm\sin^2\lambda}{b}\right)\sin u\sin P-\left(\frac{a^2dm\sin^2 I}{2b}\right)\sin 2C'\sin P\\-\left(\frac{aedm\sin^2 I}{2b}\right)\sin 2C'\cos u\sin P\end{array}\right\}$$

$$=+\left(\frac{0,137}{\cos L\cos\lambda}\right)\left\{\begin{array}{l}-\left(\frac{a^2dm\cos I}{b}\right)\cos P-\left(\frac{aedm}{b}\right)\cos(u+P)\\-\left(\frac{a^2dm\sin^2 I}{2b}\right)\sin 2C'\sin P+\left(\frac{2aedm\sin^2\frac{1}{2}I}{b}\right)\cos u\cos P\\-\left(\frac{aedm\sin^2 I}{b}\right)\sin^2 C'\sin u\sin P-\left(\frac{aedm\sin^2 I}{2b}\right)\sin 2C'\cos u\sin P\end{array}\right\}$$

mais $u+P=\Pi-\pi'+P=\phi+\rho-\pi'+P=(G-\pi'+\rho)$; π et π' sont le périgée et le périhélie, et ρ la réduction de l'orbite à l'écliptique, et comme ρ n'entre que dans l'argument d'un terme assez petit, on pourra le négliger : ainsi la partie de l'aberration en longitude qui est propre à chaque planète a pour expression

$$+\left(\frac{0,137}{\cos L\cos\lambda}\right)\left\{\begin{array}{l}-\left(\frac{a^2dm\cos I}{b}\right)\cos P-\left(\frac{aedm}{b}\right)\cos(G-\pi'+\epsilon)\\+\left(\frac{2aedm\sin^2\frac{1}{2}I}{b}\right)\cos u\cos P-\left(\frac{aedm\sin^2 I}{b}\right)\sin^2 C'\sin u\sin P\\-\left(\frac{a^2dm\sin^2 I}{2b}\right)\sin 2C'\sin P-\left(\frac{aedm\sin^2 I}{2b}\right)\sin 2C'\cos u\sin P\end{array}\right\}.$$

37. Cette formule est asez compliquée, mais tous les coefficiens sont constans, et ceux qui dépendent de plusieurs argumens sont le plus souvent insensibles; on peut faire une table à double entrée de celui qui dépend de a^2 et qui est l'un des plus forts.

38. La formule entière se réduit à o au tems de la station, parce qu'alors le mouvement en longitude est nul et qu'il ne peut y avoir d'aberration. Ainsi quand la formule donnera l'aberration nulle, on pourra conclure que la planète est stationnaire; que la planète est rétrograde si l'aberration est positive, et directe si elle est négative.

Cette formule cependant ne résout que d'une manière indirecte le problème des stations.

39. Différentions les équations (1) et (3), nous aurons

$$dD\sin L + dLD\cos L = dr\sin\lambda + d\lambda r\cos\lambda,$$
$$dD\cos L - dLD\sin L = dR\cos T - dTR\sin T + dr\cos\lambda\cos P$$
$$- d\lambda r\sin\lambda\cos P - dPr\cos\lambda\sin P;$$

multipliez la première par $\cos L$, la seconde par $\sin L$, vous aurez

$$dD\sin L\cos L + dLD\cos^2 L = dr\sin\lambda\cos L + d\lambda r\cos\lambda\cos L,$$
$$dD\sin L\cos L - dLD\sin^2 L = dR\sin L\cos T - dTR\sin L\sin T$$
$$+ dr\cos\lambda\sin L\cos P - d\lambda r\sin\lambda\sin L\cos P - dPr\cos\lambda\sin L\sin P;$$

d'où

$$- dLD(\sin^2 L + \cos^2 L) = dR\sin L\cos T - dTR\sin L\sin T$$
$$+ dr\cos\lambda\sin L\cos P - d\lambda r\sin\lambda\sin L\cos P - dPr\cos\lambda\sin L\sin P$$
$$- dr\sin\lambda\cos L - d\lambda r\cos\lambda\cos L,$$
$$- dL.D = + \sin L\left\{\begin{matrix} dR\cos T - dT.R\sin T + dr\cos\lambda\cos P \\ - d\lambda r\sin\lambda\cos P - dPr\cos\lambda\sin P \end{matrix}\right\}$$
$$+ \cos L\{- dr\sin\lambda - d\lambda r\cos\lambda\}.$$

$$\text{aberr. latit.} = + 0{,}137\sin L\left\{\begin{matrix} dR\cos T - dT.R\sin T - dPr\cos\lambda\sin P \\ + dr\cos\lambda\cos P - d\lambda r\sin\lambda\cos P \end{matrix}\right\}$$
$$+ 0{,}137\cos L\{- dr\sin\lambda - d\lambda r\cos\lambda\}.$$

40. Mais

$$R\sin T dT + r\cos\lambda\sin P dP = R\sin T dT + R\sin T dP \ (2)$$
$$= R\sin T(dT + dP) = - R\sin T dS$$
$$= - R\sin T(d\phi - d\odot) = - R\sin T d\phi + R\sin T d\odot$$
$$= - r\cos\lambda\sin P d\phi + R\sin T d\odot$$
$$= \left(\frac{dM}{B}\right)\sin T + \left(\frac{EdM}{B}\right)\cos V\sin T - \left(\frac{a^2dm}{b}\right)\left(\frac{\cos I}{\cos\lambda}\right)\sin P$$
$$- \left(\frac{aedm}{b}\right)\left(\frac{\cos I}{\cos\lambda}\right)\cos u\sin P = - \alpha$$

$$dR \cos T = +\left(\frac{EdM}{B}\right) \cos T \sin V = +\beta$$

$$\cos\lambda \cos P dr = \left(\frac{aedm \cos\lambda}{b}\right) \cos P \sin u = \gamma$$

$$-r \sin\lambda \cos P d\lambda = -\frac{dm \sin I \sin\lambda \cos C'}{b \cos\lambda}(a^2 + ae \cos u) \cos P$$

$$= -\frac{dm \sin^2 I \sin C' \cos C'}{b \cos\lambda}(a^2 + ae \cos u) \cos P$$

$$= -\frac{a^2 dm \sin^2 I \sin 2C' \cos P}{2b \cos\lambda} - \frac{aedm \sin^2 I \sin 2C' \cos u \cos P}{2b \cos\lambda} = \delta$$

$$-dr \sin\lambda = -\frac{aedm \sin u \sin I \sin C'}{b} = \epsilon$$

$$-rd\lambda \cos\lambda = -\frac{dm \sin I \cos\lambda \cos C'}{b \cos\lambda}(a^2 + ae \cos u) = -\left(\frac{a^2 dm \sin I}{b}\right) \cos C'$$

$$-\left(\frac{aedm \sin I}{b}\right) \cos C' \cos u = \zeta.$$

Portez les valeurs $+\alpha$, $+\beta$, $+\gamma$, $+\delta$, $+\epsilon$, $+\zeta$ dans la formule de l'article 39, alors

$$\text{aber. latit.} = +0{,}137 \sin L \left\{ \begin{array}{l} -\left(\frac{dM}{B}\right) \sin T - \frac{EdM}{B} \cos V \sin T \\ +\left(\frac{EdM}{B}\right) \cos T \sin V + \left(\frac{a^2 dm}{b}\right)\left(\frac{\cos I}{\cos\lambda}\right) \sin P \\ +\left(\frac{aedm}{b}\right)\left(\frac{\cos I}{\cos\lambda}\right) \cos u \sin P + \left(\frac{aedm \cos\lambda}{b}\right) \cos P \sin u \\ -\left(\frac{a^2 dm \sin^2 I}{2b \cos\lambda}\right) \sin 2C' \cos P - \left(\frac{aedm \sin^2 I}{2b \cos\lambda}\right) \sin 2C' \cos u \cos P \end{array} \right\}$$

$$+0{,}137 \cos L \left\{ -\left(\frac{aedm \sin I}{b}\right) \sin C' \sin u - \left(\frac{a^2 dm \sin I}{b}\right) \cos C' - \left(\frac{aedm \sin I}{b}\right) \cos C' \cos u \right\}$$

$$= +0{,}137 \sin L \left\{ -\left(\frac{dM}{B}\right) \sin T + \left(\frac{EdM}{B}\right) \sin (V - T) \right\}$$

$$+\frac{0{,}137 \sin L}{\cos\lambda} \left\{ \begin{array}{l} +\left(\frac{a^2 dm \cos I}{b}\right) \sin P + \left(\frac{aedm \cos I}{b}\right) \cos u \sin P \\ +\left(\frac{aedm}{b}\right) \cos P \sin u - \left(\frac{aedm \sin^2\lambda}{b}\right) \cos P \sin u \\ -\left(\frac{a^2 dm \sin^2 I}{2b}\right) \sin 2C' \cos P - \left(\frac{aedm \sin^2 I}{2b}\right) \sin 2C' \cos u \cos P \end{array} \right\}$$

$$+0{,}137 \cos L \left\{ -\left(\frac{aedm \sin I}{b}\right) \cos (C' - u) - \left(\frac{a^2 dm \sin I}{b}\right) \cos C' \right\}$$

$$= +0{,}137 \sin L \left\{ -\left(\frac{dM}{B}\right) \sin T + \left(\frac{EdM}{B}\right) \sin (G - \pi) \right\} \text{ quantités communes.}$$

+

$$+\frac{0,137\sin L}{\cos\lambda}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{a^2dm\cos I}{b}\right)\sin P+\left(\frac{aedm}{b}\right)\sin(u+P)\\ -\left(\frac{2aedm\sin^2\frac{1}{2}I}{b}\right)\cos u\sin P-\left(\frac{a^2dm\sin^2 I}{2b}\right)\sin 2C'\cos P\\ -\left(\frac{aedm\sin^2 I}{b}\right)\sin^2 C'\cos P\sin u-\left(\frac{aedm\sin^2 I}{2b}\right)\sin 2C'\cos u\cos P\end{array}\right\}$$

$$+0,137\cos L\left\{-\left(\frac{aedm\sin I}{b}\right)\cos(\pi'-\Omega)-\left(\frac{a^2dm\sin I}{b}\right)\cos C'\right\}$$

$$=+0,137\sin L\left\{-\left(\frac{dM}{B}\right)\sin T+\left(\frac{EdM}{B}\right)\sin(G-\pi)\right\}$$

$$+\left(\frac{0,137\sin L}{\cos\lambda}\right)\left\{\begin{array}{l}+\left(\frac{a^2dm\cos I}{b}\right)\sin P+\left(\frac{aedm}{b}\right)\sin(G-\pi'+\rho)\\ -\left(\frac{a^2dm\sin^2 I}{2b}\right)\sin 2C'\cos P-\left(\frac{2aedm\sin^2\frac{1}{2}I}{b}\right)\cos u\sin P\\ -\left(\frac{aedm\sin^2 I}{b}\right)\sin^2 C'\cos P\sin u-\left(\frac{aedm\sin^2 I}{2b}\right)\sin 2C'\cos u\cos P\end{array}\right\}$$

$$+0,137\cos L\left\{-\left(\frac{aedm\sin I}{b}\right)\cos(\pi'-\Omega)-\left(\frac{a^2dm\sin I}{b}\right)\cos C'\right\}.$$

41. En comparant cette formule avec celle de longitude, on voit que $\frac{1}{\cos L}$ est remplacé par $\sin L$, $\cos T$ par $\sin T$, $\cos(G-\pi)$ par $-\sin(G-\pi)$; $\cos P$ par $-\sin P$, $\cos(G-\pi'+\rho)$ par $-\sin(G-\pi'+\rho)$, $\sin P$ par $\cos P$. Du reste les coefficiens sont les mêmes; les deux derniers termes qui dépendent de $\cos L$ n'ont point leurs analogues pour la longitude.

42. Cette formule se réduit à 0 quand la latitude est stationnaire. Elle prouve que la station en latitude ne saurait coïncider avec la station en longitude, sans des hasards fort extraordinaires.

43. Mettons dans ces formules générales les valeurs particulières de a, b, c, dm, I, π' et Ω, nous aurons

FORMULE D'ABERRATION POUR LES PLANÈTES.

Termes communs à toutes les planètes.

Aberr. longit. $=$ séc L $[-20'',254\cos T-0'',34\cos(G+80°20')]$.
Aberr. latit. $=$ sin L $[-20'',254\sin T+0'',34\sin(G+80°20')]$.

MERCURE.

$$\text{Aberr. longit.} = + \frac{\text{séc}\,L}{\cos\lambda}\left[\begin{array}{l} -33'',016 \cos P - 6'',836 \cos(G - 74^\circ\, 40') \\ -\ 0'',247 \sin 2C' \sin P + 0'',051 \cos u \cos P \\ -\ 0'',102 \sin^2 C' \sin u \sin P - 0'',051 \sin 2C' \cos u \sin P \end{array}\right].$$

$$\begin{aligned} \text{Aberr. latit.} = {} & + \frac{\sin L}{\cos\lambda}\left[\begin{array}{l} +33'',016 \sin P + 6'',836 \sin(G - 74^\circ\, 40') \\ -\ 0'',247 \sin 2C' \cos P - 0'',051 \cos u \sin P \\ -\ 0'',102 \sin^2 C' \sin u \cos P - 0'',051 \sin 2C' \cos u \cos P \end{array}\right] \\ & + \cos L\,[\,-4'',054 \cos C' - 0'',733\,]. \end{aligned}$$

VÉNUS.

$$\text{Aberr. longit.} = + \frac{\text{séc}\,L}{\cos\lambda}\left[\begin{array}{l} -23'',773 \cos P - 0'',1632 \cos(G - 128^\circ\, 40') \\ -\ 0'',042 \sin 2C' \sin P + 0'',00029 \cos u \cos P \\ -0'',00057 \sin^2 C' \sin u \sin P - 0'',00028 \sin 2C' \cos u \sin P \end{array}\right].$$

$$\begin{aligned} \text{Aberr. latit.} = {} & + \frac{\sin L}{\cos\lambda}\left[\begin{array}{l} +23'',773 \sin P + 0'',1632 \sin(G - 128^\circ\, 40') \\ -0'',042 \sin 2C' \cos P - 0'',00029 \cos u \sin P \\ -0'',00057 \sin^2 C' \sin u \cos P - 0'',00028 \sin 2C' \cos u \cos P \end{array}\right] \\ & + \cos L\,[\,-1'',41 \cos C' - 0'',00056\,] \end{aligned}$$

MARS.

$$\text{Aberr. longit.} = + \frac{\text{séc}\,L}{\cos\lambda}\left[\begin{array}{l} -16'',471 \cos P - 1'',535 \cos(G + 27^\circ\, 36') \\ -0'',0086 \sin 2C' \sin P + 0'',0008 \cos u \cos P \\ -0'',0016 \sin^2 C' \sin u \sin P - 0'',0008 \sin 2C' \cos u \sin P \end{array}\right].$$

$$\begin{aligned} \text{Aberr. latit.} = {} & + \frac{\sin L}{\cos\lambda}\left[\begin{array}{l} +16'',471 \sin P + 1'',535 \sin(G + 27^\circ\, 36') \\ -0'',0086 \sin 2C' \cos P - 0'',0008 \cos u \sin P \\ -0'',0016 \sin^2 C' \sin u \cos P - 0'',0008 \sin 2C' \cos u \cos P \end{array}\right] \\ & + \cos L\,[\,-0'',532 \cos C' - 0'',0123\,]. \end{aligned}$$

VESTA.

$$\text{Aberr. longit.} = \frac{\text{séc}\,L}{\cos\lambda}\left[\begin{array}{l} -13'',115 \cos P - 1'',028 \cos(G + 109^\circ\, 40') \\ -0'',102 \sin 2C' \sin P + 0'',008 \cos u \cos P \\ -0'',0158 \sin^2 C' \sin u \sin P - 0''079 \sin 2C' \cos u \sin P \end{array}\right].$$

$$\begin{aligned} \text{Aberr. latit.} = {} & \frac{\sin L}{\cos\lambda}\left[\begin{array}{l} +13'',115 \sin P + 1'',028 \sin(G + 109^\circ\, 40') \\ -0'',102 \sin 2C' \cos P - 0'',008 \cos u \sin P \\ -0'',0158 \sin^2 C' \sin u \cos P - 0'',079 \sin 2C' \cos u \cos P \end{array}\right] \\ & + \cos L\,[\,-1'',64 \cos C' + 0'',107\,]. \end{aligned}$$

JUNON.

$$\text{Aberr. longit.} = \frac{\text{séc}\,L}{\cos\lambda}\left[\begin{array}{l} -12'',130 \cos P - 1'',186 \cos(G - 53^\circ\, 15') \\ -0'',319 \sin 2C' \sin P + 0'',031 \cos u \cos P \\ -0'',061 \sin^2 C' \sin u \sin P - 0'',050 \sin 2C' \cos u \sin P \end{array}\right].$$

$$\text{Aberr. latit.} = \frac{\sin L}{\cos \lambda}\left[\begin{array}{l} +\,12'',130 \sin P + 1'',186 \sin(G - 53^\circ\,15') \\ -\,0'',319 \sin 2C' \cos P - 0'',031 \cos u \sin P \\ -\,0'',061 \sin^2 C' \sin u \cos P - 0'',03 \sin 2C' \cos u \cos P \end{array}\right]$$

$$+ \cos L\,[-\,2'',817 \cos C' + 0'',126].$$

CÉRÈS.

$$\text{Aberr. longit.} = \frac{\text{séc} L}{\cos \lambda}\left[\begin{array}{l} -\,11'',974 \cos P - 0'',3456 \cos(G - 146^\circ\,36') \\ -\,0'',207 \sin 2C' \sin P + 0'',006 \cos u \cos P \\ -\,0'',0118 \sin^2 C' \sin u \sin P - 0'',059 \sin 2C' \cos u \sin P \end{array}\right].$$

$$\text{Aberr. latit.} = \frac{\sin L}{\cos \lambda}\left[\begin{array}{l} +\,11'',974 \sin P + 0'',3456 \sin(G - 146^\circ\,36') \\ -\,0'',207 \sin 2C' \cos P - 0'',006 \cos u \sin P \\ -\,0'',0118 \sin^2 C' \sin u \cos P - 0'',059 \sin 2C' \cos u \cos P \end{array}\right]$$

$$+ \cos L\,[-\,2'',246 \cos C' - 0'',0262].$$

PALLAS.

$$\text{Aberr. longit.} = \frac{\text{séc} L}{\cos \lambda}\left[\begin{array}{l} -\,10'',0595 \cos P - 1'',081 \cos(G - 121^\circ\,10') \\ -\,1'',973 \sin 2C' \sin P + 0'',1914 \cos u \cos P \\ -\,0'',349 \sin^2 C' \sin u \sin P - 0'',174 \sin 2C' \cos u \sin P \end{array}\right].$$

$$\text{Aberr. latit.} = \frac{\sin L}{\cos \lambda}\left[\begin{array}{l} +\,10'',0595 \sin P + 1'',081 \sin(G - 121^\circ\,10') \\ -\,1'',973 \sin 2C' \cos P - 0'',1914 \cos u \sin P \\ -\,0'',349 \sin^2 C' \sin u \cos P - 0'',174 \sin 2C' \cos u \cos P \end{array}\right]$$

$$+ \cos L\,[-\,6'',945 \cos C' - 0'',384].$$

JUPITER.

$$\text{Aberr. longit.} = \frac{\text{séc} L}{\cos \lambda}\left[\begin{array}{l} -\,8'',889 \cos P - 0'',428 \cos(G - 11^\circ\,10') \\ -\,0'',00234 \sin 2C' \sin P + 0'',00013 \cos u \cos P \\ -\,0'',00023 \sin^2 C' \sin u \sin P - 0'',00012 \sin 2C' \cos u \sin P \end{array}\right].$$

$$\text{Aberr. latit.} = \frac{\sin L}{\cos \lambda}\left[\begin{array}{l} +\,8'',889 \sin P + 0'',428 \sin(G - 11^\circ\,10') \\ -\,0'',00234 \sin 2C' \cos P - 0'',00013 \cos u \sin P \\ -\,0'',00023 \sin^2 C' \sin u \cos P - 0'',00012 \sin 2C' \cos u \cos P \end{array}\right]$$

$$+ \cos L\,[-\,0'',204 \cos C' - 0'',000523].$$

SATURNE.

$$\text{Aberr. latit.} = \frac{\text{séc} L}{\cos \lambda}\left[\begin{array}{l} -\,6'',564 \cos P - 0'',369 \cos(G - 88^\circ\,10') \\ -\,0'',00622 \sin 2C' \sin P + 0'',00035 \cos u \cos P \\ -\,0'',0007 \sin^2 C' \sin u \sin P - 0'',00035 \sin 2C' \cos u \sin P \end{array}\right].$$

$$\text{Abarr. latit.} = \frac{\sin L}{\cos \lambda}\left[\begin{array}{l} +\,6'',564 \sin P + 0'',369 \sin(G - 88^\circ\,10') \\ -\,0'',00622 \sin 2C' \cos P - 0'',00035 \cos u \sin P \\ -\,0'',0007 \sin^2 C' \sin u \cos P - 0'',00035 \sin 2C' \cos u \cos P \end{array}\right]$$

$$+ \cos L\,[-\,0'',286 \cos C' - 0'',0148].$$

URANUS.

$$\text{Aberr. longit.} = \frac{\text{séc L}}{\cos\lambda}\left[\begin{array}{l} -4'',63 \cos P - 0'',216 \cos(G + 22^\circ\, 38') \\ -0'',00042 \sin 2C' \sin P + 0'',000035 \cos u \cos P \\ -0'',00067 \sin^2 C' \sin u \sin P - 0'',00034 \sin 2C' \cos u \sin P \end{array}\right].$$

$$\text{Aberr. latit.} = \frac{\sin L}{\cos\lambda}\left[\begin{array}{l} +4'',63 \sin P + 0'',216 \sin(G + 22^\circ\, 38') \\ -0'',00042 \sin 2C' \cos P - 0'',000035 \cos u \sin P \\ -0'',00067 \sin^2 C' \sin u \cos P - 0'',00034 \sin 2C' \cos u \cos P \end{array}\right]$$

$$+ \cos L\,[-0'',063 \cos C' + 0'',000477].$$

On voit que pour chaque planète il n'y a guère que deux ou trois termes qui méritent qu'on les calcule. Nous avons donné les formules complètes afin qu'on puisse conserver ce qu'on jugera nécessaire. Par quelques simplifications, dont l'effet est insensible, j'ai réduit ces formules en tables qui ont paru en 1792, Connaissance des tems de 1794; mais alors nous avions quatre planètes de moins, et je supposais l'aberration moyenne de 20″ au lieu de 20″,25.

Aberration pour les Comètes.

44. Soit u l'anomalie parabolique, h la distance périhélie; on aura les formules suivantes, qui seront démontrées au chapitre des comètes,

$$du = \frac{209'',035 \cos^4 \frac{1}{2} u}{h^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad 0,137\, du = \frac{28'',64 \cos^4 \frac{1}{2} u}{h^{\frac{3}{2}}} \ldots\ldots\ldots (1),$$

$$r = \frac{h}{\cos^2 \frac{1}{2} u} = h + h \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} u,$$

$$dr = 2h \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u\, d(\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u) = \frac{h \operatorname{tang} \frac{1}{2} u\, du}{\cos^2 \frac{1}{2} u} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

$$0.137\, dr = \frac{h \operatorname{tang} \frac{1}{2} u}{\cos^2 \frac{1}{2} u} \cdot \frac{28'',64 \cos^4 \frac{1}{2} u}{h^{\frac{3}{2}}} = \frac{14'',32 \sin u}{h^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

$$0.137\, d\lambda = \frac{0.137 \sin I \cos C'\, du}{\cos\lambda} = \frac{28'',64 \sin I \cos C' \cos^4 \frac{1}{2} u}{h^{\frac{3}{2}} \cos\lambda} \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Portons ces valeurs dans la formule 34, nous aurons, en omettant les termes communs à toutes les comètes comme à toutes les plsnètes,

$$-\left(\frac{0.137}{\cos L}\right) r \cos\lambda \cos P\, d\varphi = -\left(\frac{0.137}{\cos L}\right) \frac{h}{\cos^2 \frac{1}{2} u} \cos\lambda \cos P \cdot \frac{du \cos I}{\cos^2\lambda}$$

$$= -\left(\frac{28'',64 \cos I}{h^{\frac{1}{2}}}\right) \frac{\cos^2 \frac{1}{2} u \cos P}{\cos\lambda \cos L}$$

$$+\left(\frac{0.137}{\cos L}\right)\cos\lambda\sin P\,dr = \frac{\cos\lambda\sin P}{\cos L}\cdot\frac{14'',32\sin u}{h^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \left(\frac{14'',32}{h^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\cos\lambda\sin u\sin P}{\cos L}$$

$$-\left(\frac{0.137}{\cos L}\right) r\sin\lambda\sin P\,d\lambda = -\frac{h\sin I\sin C'\sin P}{\cos^2\frac{1}{2}u\cos L}\cdot\frac{28'',64\sin I\cos C'\cos^4\frac{1}{2}u}{h^{\frac{3}{2}}\cos\lambda}$$

$$= -\left(\frac{14'',32\sin^2 I}{h^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\sin 2C'\cos^2\frac{1}{2}u\sin P}{\cos\lambda\cos L}.$$

Ainsi au total, l'aberration en longitude pour les comètes,

$$= -\frac{20'',254\cos T}{\cos L} - \frac{0'',34\cos(G-\varpi)}{\cos L} - \left(\frac{28'',64\cos I}{h^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\cos^2\frac{1}{2}u\cos P}{\cos\lambda\cos L}$$

$$+\left(\frac{14'',32}{h^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\cos\lambda\sin u\sin P}{\cos L} - \left(\frac{14'',32\sin^2 I}{h^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\sin 2C'\cos^2\frac{1}{2}u\sin P}{\cos\lambda\cos L}.$$

Pour la latitude, nous aurons par la formule (39) en développant comme à l'article 40, et faisant abstraction des termes communs,

$$+0.137\sin L.r\cos\lambda\sin P\,d\varphi = +0.137\sin L\frac{h\sin P\cos\lambda}{\cos^2\frac{1}{2}u}\cdot\frac{du\cos I}{\cos^2\lambda}$$

$$= +\left(\frac{28'',64\cos I}{h^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\sin L\cos^2\frac{1}{2}u\sin P}{\cos\lambda}.$$

Le terme $+\;0.137\sin L\cos\lambda\cos P\,dr = \sin L\cos\lambda\cos P.\frac{14'',32\sin u}{h^{\frac{1}{2}}}$

$$= \left(\frac{14'',32}{h^{\frac{1}{2}}}\right)\sin L\cos\lambda\sin u\cos P.$$

Le terme $-\;0.137\sin L.r\sin\lambda\cos P\,d\lambda = -\sin L.\frac{h\sin I\sin C'\cos P}{\cos^2\frac{1}{2}u}\times$

$$\frac{28'',64\sin I\cos C'\cos^4\frac{1}{2}u}{h^{\frac{3}{2}}\cos\lambda} = -\left(\frac{14'',32\sin^2 I}{h^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\sin L\sin 2C'\cos^2\frac{1}{2}u\cos P}{\cos\lambda}.$$

Le terme $-\;0.137\cos L\sin\lambda\,dr = -\cos L\sin I\sin C'.\left(\frac{14'',32\sin u}{h^{\frac{1}{2}}}\right)$

$$= -\left(\frac{14'',32\sin I}{h^{\frac{1}{2}}}\right)\cos L\sin C'\sin u.$$

Le terme $-\;0.137\cos L.r\cos\lambda\,d\lambda = \cos\lambda\cos L.\frac{28'',64\sin I\cos C'\cos^4\frac{1}{2}u}{h^{\frac{1}{2}}\cos^2\frac{1}{2}u\cos\lambda}$

$$= -\left(\frac{28'',64\sin I}{h^{\frac{1}{2}}}\right)\cos L\cos C'\cos^2\frac{1}{2}u.$$

Ces deux derniers termes

$$= -\left(\frac{14'',32 \sin I \cos L}{h^{\frac{1}{2}}}\right)(\sin C' \sin u + 2\cos^2 \tfrac{1}{2} u \cos C')$$

$$= -\left(\frac{14'',32 \sin I \cos L}{h^{\frac{1}{2}}}\right)(\sin C' \sin u + \cos C' + \cos C' \cos u)$$

$$= -\left(\frac{14'',32 \sin I \cos L}{h^{\frac{1}{2}}}\right)[\cos C' + \cos(C' - u)]$$

$$= -\left(\frac{14'',32 \sin I}{h^{\frac{1}{2}}}\right)\cos L \cos C' - \left(\frac{14'',32 \sin I}{h^{\frac{1}{2}}}\right)\cos L \cos(\pi' - \Omega).$$

Au total, l'aberration en latitude, pour les comètes,

$$= -20'',254 \sin L \sin T + 0'',34 \sin L \sin(G + 80° 20') \text{ termes communs}$$
$$+ \left(\frac{28'',64 \cos I}{h^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\sin L \cos^2 \frac{1}{2} u \sin P}{\cos \lambda} + \left(\frac{14'',32}{h^{\frac{1}{2}}}\right)\sin L \cos \lambda \sin u \cos P$$
$$- \left(\frac{14'',32 \sin^2 I}{h^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{\sin L \sin 2C' \cos^2 \frac{1}{2} u \cos P}{\cos \lambda} - \left(\frac{14'',32 \sin I}{h^{\frac{1}{2}}}\right)\cos L \cos C'$$
$$- \left(\frac{14'',32 \sin I}{h^{\frac{1}{2}}}\right)\cos L \cos(\pi' - \Omega).$$

Aberration diurne.

45. Le mouvement diurne de la terre autour de son axe doit aussi produire une aberration qu'il faut évaluer.

Pour comparer cette aberration à celle qui est produite par le mouvement annuel, il faut connaître le rapport entre ces deux mouvemens. En effet, la vitesse de la lumière étant toujours la même, l'aberration ne peut varier qu'en raison des divers mouvemens de la terre.

Soit r le rayon du globe terrestre, R celui de l'orbite annuelle, π la parallaxe du soleil, on aura $r = R \sin \pi$, ou $R = \frac{r}{\sin \pi}$.

Le mouvement annuel de la terre pour 8′ 13″,2 sera

$$R \sin 20'',25 = \frac{r \sin 20'',25}{\sin 8'',6}.$$

Le mouvement diurne sur l'équateur est pour le même tems

$$r \sin 15(8' \ 13'',2) = r \sin \tfrac{6^o}{4} (8' \ 13'',2) = r \sin \left(\frac{8^o \ 13' \ 12''}{4}\right)$$
$$= r \sin (2^o \ 3' \ 18'') ;$$

le rapport des deux monvemens sera donc

$$\frac{r \sin 2^o \ 3' \ 18'' \sin 8'',6}{r \sin 20'',25} = \frac{8'',6 \sin 2^o \ 3' \ 18''}{20'',25};$$

et si l'aberration annuelle $= 20'',25$, l'aberration diurne sera

$$8'',6 \sin 2^o \ 3' \ 18'' = 0'',30622.$$

Ce sera le *maximum* de l'aberration ponr un lieu situé sur l'équateur; mais ponr un lieu qni a nne latitude H, le cercle du monvement diurne sera plus petit, en raison du cosinus de la latitude, et l'aberration sera $0'',30622 \cos H$.

46. Soit IQ (fig. 48) l'équateur, P le pôle, ISP un méridien ou cercle de déclinaison, S un astre quelconque, PT le méridien de l'observatenr, T' le lieu de l'observateur sur son parallèle; on aura, suivant notre formule, l'aberration en ascension droite $= \frac{0'',31 \cos H \sin I \cos IT}{\cos D} = \frac{0'',31 \cos H \cos P}{\cos D}$; car IT est la mesure de l'angle IPT = angle horaire.

Soit IS (fig. 49) un cercle perpendiculaire an cercle de déclinaison, IT l'équateur, APT l'angle horaire oriental. L'aberration en déclinaison

$$= -0'',31 \cos H \sin I \cos IT = -0'',31 \cos H \sin D \sin P,$$

quantité très-peu sensible et dont personne ne fait usage.

Aberration de la Lune.

47. La distance de la lune n'est que $\frac{\sin 8'',6}{\sin 57'}$ de celle du soleil; si la lumière met 8' 13",2 à venir du soleil, elle ne mettra que 1",24 à venir de la lune; l'aberration moyenne de la lune sera son mouvement pendant 1",24, ou de six à neuf dixièmes de seconde : on peut donc

dire que la lune nous paraît toujours moins avancée de $0'',8$ en longitude qu'elle n'est véritablement.

Les tables renferment l'effet de cette aberration ; on peut dire qu'elle est calculée d'avance, que les tables nous donnent les longitudes apparentes. Nous n'avons aucun besoin d'y songer.

Aberration du Soleil.

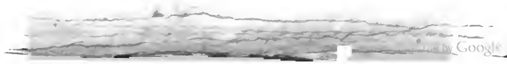
48. Les tables la renferment aussi, et nous n'avons aucun besoin de nous en embarrasser ; les tables nous donnent les lieux apparens du soleil, dont nous avons besoin dans toutes nos observations et nos calculs.

Clairaut a dit qu'on avait tort de négliger l'aberration en déclinaison, qui peut aller à 7 ou 8″ ; mais en calculant la déclinaison par la longitude apparente, on a réellement la déclinaison apparente ; ainsi on ne commet pas l'erreur qui nous est reprochée par Clairaut ; il n'y a qu'une circonstance où l'on soit obligé de tenir compte de l'aberration du soleil, c'est quand on s'en sert pour le lieu géocentrique des planètes ; on ajoute alors $20'',254 + 0'',34 \cos(\odot - \pi)$ au lieu tabulaire du soleil.

Parallaxe annuelle des Étoiles.

49. Il est donc démontré par les phénomènes de l'aberration que la terre tourne autour du soleil, on ne voit aucun autre moyen d'expliquer les mouvemens apparens des étoiles qui sont si bien d'accord avec les formules que nous avons données ; les étoiles ont donc une parallaxe annuelle ; il faut savoir en calculer les effets presqu'imperceptibles afin de choisir les circonstances qui pourront les manifester.

Soit P le pôle de l'écliptique TC (fig. 50), T le lieu de la terre ou sa longitude héliocentrique, E celui d'une étoile quelconque, CE sera la latitude de cette étoile, C marquera sa longitude, comme T marque celle de la terre. La parallaxe doit agir dans le plan du grand cercle TE qui passe par les lieux de la terre et de l'étoile, et dont le centre est celui du soleil. L'étoile sera portée de E quelque part en e ; $Ee = \varpi \sin Te$ sera la parallaxe de l'étoile. Pour trouver les parallaxes de longitude et de latitude, menons par le lieu apparent e, le cercle de latitude Pec, Pe sera la distance polaire apparente, $Cc = CPe$ sera la parallaxe de longitude.



longitude. $Pm = Pe$ et menons le petit arc em;

$$Cc = \text{parall. longit.} = \Pi = \frac{em}{\cos Cc} = \frac{Ee \sin E}{\cos\lambda} = \frac{\varpi \sin TE \sin E}{\cos\lambda} = \frac{\varpi \sin TC}{\cos\lambda}$$
$$= \frac{\varpi \sin(E - \text{♁})}{\cos\lambda} = -\frac{\varpi \sin(E - \odot)}{\cos\lambda},$$

$$Em = \text{parall. latit.} = \pi = em \cot E = \varpi \sin TC \cos TE \,\text{tang}\, CTE$$
$$= \frac{\varpi \sin TC \cos TC \cos CE \,\text{tang}\, CE}{\sin TC} = \varpi \sin CE \cos TC$$
$$= \varpi \sin\lambda \cos(E - \text{♁}) = -\varpi \sin\lambda \cos(E - \odot).$$

50. Ces formules entièrement conformes à celles auxquelles les astronomes sont parvenus par d'autres voies, négligent les puissances supérieures de $\sin\varpi$, mais elles sont d'une exactitude très-suffisante, puisque l'on doute encore si ϖ n'est pas imperceptible. Veut-on des formules rigoureuses, nous les trouverons parmi celles du chap. XV; il ne s'agit que d'y démêler celles qui conviennent à la circonstance présente. Or je vois que le pôle de l'écliptique remplace ici le pôle de l'équateur; que la terre remplace le zénit; que la distance polaire de ce zénit $= TP = 90° = 90° - H$, et que H dans nos formules deviendra o.

La parallaxe de l'angle TPE se calculera par la formule d'ascension droite, or (XV. 13)

$$\text{tang}\,\Pi = \frac{\left(\frac{\sin\varpi \cos H}{\sin\Delta}\right)\sin P}{1 - \left(\frac{\sin\varpi \cos H}{\sin\Delta}\right)\cos P}$$

et cette expression devient

$$\text{tang}\,\Pi = \frac{\left(\frac{\sin\varpi}{\cos\lambda}\right)\sin(E - \text{♁})}{1 - \left(\frac{\sin\varpi}{\cos\lambda}\right)\cos(E - \text{♁})};$$

car

$$\Delta = 90° - CE = (90° - \lambda).$$

Et

$$\Pi = \left(\frac{\sin\varpi}{\cos\lambda}\right)\frac{\sin(E - \text{♁})}{\sin 1''} + \left(\frac{\sin\varpi}{\cos\lambda}\right)^2 \frac{\sin 2(E - \text{♁})}{\sin 2''} + \text{etc.}$$
$$= -\left(\frac{\sin\varpi}{\cos\lambda}\right)\frac{\sin(E - \odot)}{\sin 1''} + \left(\frac{\sin\varpi}{\cos\lambda}\right)^2 \frac{\sin 2(E - \odot)}{\sin 2''} - \text{etc.}$$

51. La formule

$$\begin{aligned}\sin\pi &= \sin\varpi \sin H \sin(\Delta' + \pi) \\ &\quad - \sin\varpi \cos H \,\text{séc}\,\tfrac{1}{2}\Pi \cos(P + \tfrac{1}{2}\Pi) \cos(\Delta + \pi) \text{ (XV. 16)}\end{aligned}$$

deviendra par les mêmes considérations

$$\sin\pi = -\sin\varpi \,\text{séc}\,\tfrac{1}{2}\Pi \cos(P + \tfrac{1}{2}\Pi) \sin(\lambda - \pi);$$

mais si π s'applique à la latitude

$$\begin{aligned}\sin\pi &= +\sin\varpi \,\text{séc}\,\tfrac{1}{2}\Pi \cos(E - \text{♁} + \tfrac{1}{2}\Pi) \sin(\lambda - \pi) \\ &= -\sin\varpi \sin(\lambda - \pi) \,\text{séc}\,\tfrac{1}{2}\Pi \cos(E - \odot + \tfrac{1}{2}\Pi),\end{aligned}$$

expression exacte et très-simple dans laquelle on peut négliger $\tfrac{1}{2}\Pi$, mettre les arcs au lieu des sinus et faire

$$\pi = -\varpi \sin(\lambda - \pi) \cos(E - \odot),$$

supprimez π dans l'angle $(\lambda - \pi)$, vous aurez la formule ordinaire.

52. Comme les parallaxes de longitude et de latitude se calculent ici par les formules d'ascension droite et de déclinaison de la parallaxe diurne, réciproquement les parallaxes annuelles d'ascension droite et de déclinaison se calculeront par les formules de parallaxe diurne en longitude et en latitude avec les attentions que nous allons exposer. Parmi toutes mes formules je choisirai de préférence celles dont j'ai éliminé le nonagésime, comme les plus commodes pour notre objet. J'ai dit (XXVII. 61) que l'on avait les formules suivantes

$$\Pi = \left(\frac{\varpi}{\cos\lambda}\right)(\cos H \sin\text{☾} \cos M - \cos\omega \cos H \cos\text{☾} \sin M - \sin\omega \cos\text{☾} \sin H)$$

et

$$\begin{aligned}\pi &= \varpi(\cos\omega \sin H \cos\lambda - \sin\omega \cos H \cos\lambda \sin M) \\ &\quad - \varpi \sin\lambda(\cos H \cos\text{☾} \cos M + \cos\omega \cos H \sin\text{☾} \sin M - \sin\omega \sin\text{☾} \sin H) \\ &\quad - \tan^2\tfrac{1}{2}\Pi \sin 2\lambda - \tfrac{1}{2}\tan^4\tfrac{1}{2}\Pi \sin 4\lambda - \text{etc.}\end{aligned}$$

Nous avons déjà vu que $\cos H = 1$ et $\sin H = 0$.

M asc. dr. du milieu du ciel ou du zénit devient longit. de la terre, ou ♁,

☾ longitude de l'astre devient ici son ascension droite Æ,

λ latitude de l'astre devient sa déclinaison D,

ω reste l'obliquité de l'écliptique, mais comme l'équateur est au-dessous de l'écliptique, cet angle est négatif pour passer de l'écliptique à l'équateur, au lieu que dans les usages ordinaires, pour passer de l'équateur à l'écliptique, on le fait positif, ainsi sin ω change de signe et cos ω garde le sien. Cela posé, nous aurons

$$\Pi = \left(\frac{\varpi}{\cos D}\right)(\sin Æ \cos ♁ - \cos\omega \cos Æ \sin ♁)$$

$$= -\frac{\varpi}{\cos D}(\sin Æ \cos\odot - \cos\omega \cos Æ \sin\odot)$$

$$\pi = +\varpi \cos D \sin\omega \sin ♁ - \varpi \sin D(\cos Æ \cos ♁ + \cos\omega \sin Æ \sin ♁) - \tang^2 \tfrac{1}{2}\Pi \sin 2D - \text{etc.}$$

Il faut changer tous les signes pour substituer $\odot$ à ♁, mais il faut aussi les changer tous pour que π qui est la parallaxe de distance polaire devienne celle de latitude, ces changemens se compensent, excepté dans les termes où entre $\frac{1}{2}\Pi$; et la parallaxe annuelle en latitude sera

$$\pi = +\varpi \sin\omega \cos D \sin\odot - \varpi \sin D(\cos Æ \cos\odot + \cos\omega \sin Æ \sin\odot) + \tang^2 \tfrac{1}{2}\Pi \sin 2D.$$

53. Comparons ces formules à celles d'aberration, en mettant a pour 20",253

$$\text{aberr. longit.} = -\left(\frac{a}{\cos\lambda}\right)\cos(E - \odot);$$

$$\text{parall. longit.} = -\left(\frac{\sin\varpi}{\cos\lambda}\right)\sin(E - \odot);$$

$$\text{aberr. latit.} = +a \sin\lambda \sin(E - \odot);$$

$$\text{parall. latit.} = -\varpi \sin\lambda \cos(E - \odot).$$

Ces formules ont une analogie remarquable, et montrent tout d'abord l'erreur de Flamstéed qui voulait attribuer à la parallaxe les irrégularités produites par l'aberration; il est visible que la parallaxe sera nulle quand l'aberration sera au *maximum*, et réciproquement.

Supposons $\varpi = a$, c'est-à-dire une étoile qui ait 20",253 de parallaxe annuelle. Les mêmes tables serviraient à trouver l'aberration et la parallaxe de l'étoile; si ces tables sont calculées pour l'aberration, il suffira, pour y prendre la parallaxe, d'ajouter 90° à la longitude vraie du soleil,

qui leur sert d'argument. Car

$$-\left(\frac{a}{\cos\lambda}\right)\cos(\mathrm{E}-\odot-90^\circ)=-\left(\frac{a}{\cos\lambda}\right)\cos[90^\circ-(\mathrm{E}-\odot)]$$
$$=-\left(\frac{a}{\cos\lambda}\right)\sin(\mathrm{E}-\odot)=-\left(\frac{\varpi}{\cos\lambda}\right)\sin(\mathrm{E}-\odot),$$

par l'hypothèse, puisque nous supposons $\varpi=a$.

$$+a\sin\lambda\sin(\mathrm{E}-\odot-90^\circ)=-a\sin\lambda\sin[90^\circ-(\mathrm{E}-\odot)]$$
$$=-a\sin\lambda\cos(\mathrm{E}-\odot)=-\varpi\sin\lambda\cos(\mathrm{E}-\odot).$$

54. Ce que nous disons des tables d'aberration en longitude et en latitude s'applique de même à celles d'aberration en ascension droite et en déclinaison; il suffira d'ajouter 90° au lieu du soleil et de multiplier par $\left(\frac{\varpi}{20'',253}\right)$ l'aberration trouvée de cette manière pour avoir la parallaxe; pour le prouver, ajoutons 90° au lieu du soleil dans mes formules d'aberration, et nous retrouverons les formules ci-dessus.

$$\Pi=-\left(\frac{\varpi}{\cos\mathrm{D}}\right)[\cos\omega\cos\mathrm{AR}\cos(\odot+90^\circ)+\sin\mathrm{AR}\sin(\odot+90^\circ)]$$
$$=-\left(\frac{\varpi}{\cos\mathrm{D}}\right)(-\cos\omega\cos\mathrm{AR}\sin\odot+\sin\mathrm{AR}\cos\odot)\text{(comme ci-dessus)}$$
$$=-\left(\frac{\varpi}{\cos\mathrm{D}}\right)\left\{-\frac{\cos\omega}{2}[\sin(\mathrm{AR}+\odot)-\sin(\mathrm{AR}-\odot)]+\tfrac{1}{2}\sin(\mathrm{AR}+\odot)+\tfrac{1}{2}\sin(\mathrm{AR}-\odot)\right\}$$
$$=-\left(\frac{\varpi}{\cos\mathrm{D}}\right)\left[\left(\frac{1-\cos\omega}{2}\right)\sin(\mathrm{AR}+\odot)+\left(\frac{1+\cos\omega}{2}\right)\sin(\mathrm{AR}-\odot)\right]$$
$$=-\left(\frac{\varpi}{\cos\mathrm{D}}\right)[0.0415\sin(\mathrm{AR}+\odot)+0.9585\sin(\mathrm{AR}-\odot)]$$

$$\pi=+\varpi\sin\mathrm{D}[\cos\omega\sin\mathrm{AR}\cos(\odot+90^\circ)-\cos\mathrm{AR}\sin(\odot+90^\circ)]$$
$$-\varpi\sin\omega\cos\mathrm{D}\cos(\odot+90^\circ)$$
$$=+\varpi\sin\mathrm{D}(-\cos\omega\sin\mathrm{AR}\sin\odot-\cos\mathrm{AR}\cos\odot)+\varpi\sin\omega\cos\mathrm{D}\sin\odot$$
$$=-\varpi\sin\mathrm{D}(\cos\omega\sin\mathrm{AR}\sin\odot+\cos\mathrm{AR}\cos\odot)+\varpi\sin\omega\cos\mathrm{D}\sin\odot,$$

comme ci-dessus,

$$=-\varpi\sin\mathrm{D}\left[\left(\frac{\cos\omega}{2}\right)\cos(\mathrm{AR}-\odot)-\left(\frac{\cos\omega}{2}\right)\cos(\mathrm{AR}+\odot)+\tfrac{1}{2}\cos(\mathrm{AR}-\odot)+\tfrac{1}{2}\cos(\mathrm{AR}+\odot)\right]$$
$$+\varpi\sin\omega\cos\mathrm{D}\sin\odot$$
$$=-\varpi\sin\mathrm{D}\left[\left(\frac{1+\cos\omega}{2}\right)\cos(\mathrm{AR}-\odot)+\left(\frac{1-\cos\omega}{2}\right)\cos(\mathrm{AR}+\odot)\right]$$
$$+\varpi\sin\omega\cos\mathrm{D}\sin\odot$$

$$= -\varpi \sin D\,[\cos^2 \tfrac{1}{2}\omega \cos(Æ - ☉) + \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega \cos(Æ + ☉)] + \varpi \sin\omega \cos D \sin ☉$$

$$= -\varpi \sin D\,[0.0415 \cos(Æ + ☉) + 0.9585 \cos(Æ - ☉)] + 0.3982\,\varpi \cos D \sin ☉.$$

Ainsi par deux routes différentes nous arrivons aux mêmes formules de parallaxe.

Il est visible que si l'on choisit une étoile dont la déclinaison soit considérable, il n'y aura guère de sensible que le terme

$$0.9585\,\varpi \sin D \cos(Æ - ☉)$$

et son analogue pour l'ascension droite. Si au contraire, on prend une étoile voisine de l'équateur la parallaxe sera peu de chose.

55. Les astronomes ont fait jusqu'ici des efforts presque inutiles pour découvrir une parallaxe aux étoiles. On a cru apercevoir que la Lyre en avait une de 2 à 4″, on a cru en voir une de 4 à 5″ à quelques étoiles de Cassiopée dont la déclinaison est de 60° environ. Je n'en ai trouvé aucune aux étoiles circompolaires qui nous ont servi à déterminer les différences des parallèles entre Dunkerque, Paris, Evaux, Carcassonne et Barcelone. On n'a guère cherché que la parallaxe de déclinaison, cependant la parallaxe d'ascension droite $\left(\frac{\varpi}{\cos D}\right) 0.9585 \sin(Æ - ☉)$ peut être encore plus considérable, et n'exige pas pour être observée des instrumens aussi grands ni aussi parfaits. Il est peu vraisemblable que toutes les étoiles soient à la même distance de la terre; il est naturel de penser que les étoiles de neuvième et dixième grandeur qu'on voit dans toutes les parties du ciel sont plus loin de nous que les étoiles de première grandeur dont on fait un usage continuel. En observant au méridien la Lyre, la Chèvre, le Cigne, Aldébaran, Sirius, Régulus et autres belles étoiles, on pourrait observer presqu'en même tems quelques-unes des étoiles télescopiques qui les entourent, le terme $\left(\frac{\varpi}{\cos D}\right) 0.9585 \sin(Æ - ☉)$ serait bien plus sensible pour l'étoile brillante que pour les autres, et s'il y avait une parallaxe de 3 à 4″ pour la belle étoile, il serait bien difficile qu'elle ne se décelât enfin quand on aurait un certain nombre de ces comparaisons. On a des tables d'aberration pour toutes ces étoiles, on en déduirait facilement des tables

de parallaxe; en supposant 1, 2, 3, 4 et 5″ de parallaxe absolue, chaque jour on prendrait dans ces tables la parallaxe d'ascension droite, sans y rien négliger, et l'on verrait facilement la parallaxe qui s'accorderait mieux avec les différences observées d'ascension droite. Il semble qu'on ne sera jamais bien sûr de la parallaxe des étoiles tant que les ascensions droites ne confirmeront pas les résultats tirés des déclinaisons.

Si les déclinaisons s'observent au secteur, on peut douter que dans les observations faites à six mois de distance le secteur ait conservé bien invariablement la même position. Si c'est au cercle entier dont l'axe est censé invariable, on peut, ce me semble, élever les mêmes doutes; il semble que les variations en ascension droite observées à cinq fils, pendant un mois dans des saisons contraires, auraient plus de certitude; si la position des étoiles ne permet pas de doubler l'effet de la parallaxe en ajoutant le *maximum* négatif au *maximum* positif, on aura au moins l'un des deux que l'on pourra comparer à l'observation faite au tems où la parallaxe est nulle.

56. A l'instant où je lis cette feuille, j'apprends que M. Pond, successeur de M. Maskelyne à l'observatoire de Greenwich, a fait une longue suite d'observations de la Lyre avec un nouveau cercle de Troughton, dans la vue de s'assurer si cette belle étoile a réellement une parallaxe. Or le résultat auquel il est parvenu et dont il croit pouvoir répondre, est que cette parallaxe, si elle existe, ne saurait surpasser 0″26, et qu'elle est par conséquent dans la limite des erreurs possibles. Ainsi rien ne nous autorise encore à reconnaître une parallaxe sensible dans aucune étoile.

57. Nous avons négligé dans les formules de parallaxe le petit terme qui dépend de l'excentricité de l'orbite terrestre, et qui n'est au plus que $\frac{1}{60}$ du terme principal; il est évident qu'il doit être insensible, il est d'ailleurs à très-peu près constant, comme pour l'aberration. On peut donc le négliger sans scrupule; on pourrait d'ailleurs en tenir compte bien facilement s'il n'était pas d'une petitesse à échapper toujours aux observations les plus précises.

CHAPITRE XXX.

De la Nutation.

1. Après avoir expliqué d'une manière si heureuse les irrégularités que présentent les déclinaisons des étoiles, Bradley sentit le besoin de confirmer son ingénieuse théorie par une longue suite d'observations; il eut la satisfaction de trouver successivement toutes les variations dont nous venons de donner les formules; mais il ne tarda pas à reconnaître que l'aberration n'était pas la seule cause qui pût altérer les positions des étoiles. Il en découvrit une autre, dont les effets de moitié moins sensibles, suivaient une marche beaucoup plus lente.

Les déclinaisons augmentaient ou diminuaient progressivement d'une quantité qui pouvait aller à 9″ en plus ou en moins, et dont la période lui parut de 18 ans.

En remarquant que l'aberration revenait périodiquement chaque année, il avait été conduit à penser qu'elle dépendait du mouvement annuel de la terre; en observant que la nouvelle inégalité revenait au bout de 18 ans, il dut penser aussitôt à la révolution des nœuds de la lune, qui s'accomplit en 18 ans et contre l'ordre des signes.

Newton avait parlé d'une *nutation*, ou balancement de l'axe terrestre qui devait avoir une période de six mois, mais il la jugeait à peu près insensible. *Princip. mathém.*, livre III, prop. 21. Flamstéed avait désespéré d'en déterminer la quantité avec les instrumens qu'on avait alors: Roëmer avait promis une théorie des mouvemens de l'axe terrestre appuyée sur les observations, mais elle n'a jamais paru.

2. Nous n'entreprendrons pas d'exposer ici les calculs analytiques de ce déplacement, ils supposent des connaissances qui ne sont pas indispensables à l'astronome. Quand nous avons déterminé, par observation, les phénomènes de la précession qui étaient très-sensibles, nous nous sommes bornés à chercher des formules qui représentassent les

observations, ces formules nous ont conduits à supposer un mouvement conique dans l'axe de l'équateur autour des pôles de l'écliptique. Nous en ferons de même pour la nutation, qui est une dépendance du mouvement de précession. Nous renverrons, pour l'explication complète, aux ouvrages de D'Alembert, d'Euler et des géomètres qui les ont suivis. Nous nous bornerons à quelques raisonnemens simples qui auraient pu mettre les astronomes sur la voie et les guider dans leurs observations.

Dès qu'il fut démontré que la terre était un sphéroïde aplati, Newton vit que la précession observée depuis si long-tems était une suite nécessaire de cet aplatissement. Ce mouvement de précession est-il uniforme, doit-il être sujet à quelqu'inégalité? la réponse à cette question n'était pas douteuse, mais quelles seront ces inégalités? c'était un problème qui surpassait les forces de l'analyse au tems de Newton; on peut cependant se faire une idée des phénomènes.

3. Si la terre est sphérique, l'attraction d'un corps céleste quelconque A sur la terre (fig. 51) se bornerait à diminuer la distance des centres AC. Un point quelconque *a* du globe terrestre aura toujours son point correspondant *b* qui sera semblablement placé dans la sphère et relativement à la ligne AC; la ligne *ab* qui les joint s'avancera parallèlement à elle-même vers A, l'axe PP′, quelle que soit sa position relativement au corps A, s'avancera parallèlement à lui-même et n'aura aucun mouvement angulaire. Si la terre est un sphéroïde aplati EPQ (fig. 52) dont EQ est l'équateur et PP′ l'axe, l'anneau PQP′*a*P sera plus fortement attiré que l'anneau PEP′*b*P′ la partie CQ s'élevera vers AC, l'axe PP′ prendra la position *pp*′; l'effet sera le même si le corps est en A′ dans la position diamétralement opposée, EC se rapprochera de CA′ et CQ de CA. Soit A le soleil, s'il y a quelqu'inégalité dans l'action solaire, elle se rétablira tous les six mois; elle sera la plus grande aux solstices, et nulle aux équinoxes parce qu'alors le soleil se trouve dans le plan de l'équateur. L'inégalité solaire dépendra donc principalement du double de la longitude du soleil.

4. Cette inégalité est trop faible pour être aperçue par les observations; mais elle est connue depuis long-tems, et dès 1770 Maskelyne en avait donné la table. Suivant les calculs d'Euler, si vous désignez par

par $d\omega$ la correction de l'obliquité et par $d\Upsilon$ celle des points équinoxiaux,

$$d\omega = +\ 0'',6 \cos 2☉ \quad \text{et} \quad d\Upsilon = -\ 1'',12 \sin 2☾.$$

Cette dernière peut se négliger parce qu'elle est commune à tous les astres dont elle augmente la longitude. La petitesse de l'autre et la brièveté de la période l'ont fait souvent négliger, mais il est bien aisé d'en tenir compte. Suivant le même géomètre, la lune doit aussi produire deux équations pareilles, mais elles sont plus petites et tout-à-fait insensibles

$$d\omega = 0'',036 \cos 2☾, \quad d\Upsilon = -\ 0'',1 \sin 2☾.$$

La nutation solaire se réduit à ces deux équations parce que l'orbite solaire ou terrestre est constante; ce n'est pas l'écliptique, mais l'équateur qui est déplacé par ces attractions. L'orbite de la lune au contraire change rapidement de position; il en peut résulter d'autres inégalités.

5. L'effet général de l'attraction serait de rapprocher l'équateur terrestre de l'écliptique, mais cet effet doit se combiner avec le mouvement de rotation de l'équateur (fig. 53).

Soit ♈A l'équateur, ♈E l'écliptique, AD le colure des solstices, AB le mouvement de rotation en un tems très-court; le mouvement AB se fait suivant l'ordre des signes. Soit BC le mouvement d'attraction dans le même tems. Le point A décrira la diagonale AC, l'équateur prendra la situation inclinée CA♈′; le point d'intersection de l'équateur et de l'écliptique aura rétrogradé de ♈ en ♈′, le colure AD aura pris la position AE, l'angle A♈′E sera sensiblement égal à l'angle A♈B, l'obliquité qui devait changer de la quantité BC restera la même et cette diminution sera changée en un mouvement rétrograde de l'équinoxe. Voilà ce qui produit la précession. Sauf les petites équations indiquées ci-dessus, ce mouvement de précession sera uniforme pour ce qui dépend du soleil. Le mouvement rétrograde ♈♈′ du point équinoxial suppose un mouvement circulaire du pôle de l'équateur autour du pôle de l'écliptique. C'est ce mouvement que nous avons reconnu (XVI. 85).

6. Soit (fig. 54) ☊ le lieu du nœud de la lune sur l'écliptique ♈E, l'orbite de la lune coupera l'équateur en un point F. Soit FA = 90°, l'équateur ♈FAB prendra la position inclinée CA♈′, l'équinoxe rétro-

gradera de Υ en Υ', l'obliquité actuelle $A\Upsilon E = \omega'$ se changera en $A\Upsilon' E = \omega''$, ω est l'obliquité moyenne. Le triangle $A\Upsilon\Upsilon'$ donne

$$\sin\Upsilon : \sin\Upsilon' :: \sin A\Upsilon' : \sin A\Upsilon,$$

ou

$$\sin\omega' : \sin\omega'' :: \sin A\Upsilon' : \sin A\Upsilon;$$

et

$$\frac{\text{tang}\frac{1}{2}(\omega' - \omega'')}{\text{tang}\frac{1}{2}(\omega' + \omega'')} = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}(A\Upsilon' - A\Upsilon)}{\text{tang}\frac{1}{2}(A\Upsilon' + A\Upsilon)} = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}(\Upsilon' b)}{\text{tang}\frac{1}{2}(A\Upsilon + \Upsilon' b + A\Upsilon)}$$

$$\frac{\text{tang}\frac{1}{2}(\Upsilon' b)}{\text{tang}(A\Upsilon + \frac{1}{2}\Upsilon\Upsilon'\cos\omega'')} = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}(\Upsilon\Upsilon'\cos\omega'')}{\text{tang}(\Upsilon F + 90^\circ + \frac{1}{2}\Upsilon\Upsilon'\cos\omega'')} = \frac{\text{tang}\frac{1}{2}(\Upsilon\Upsilon'\cos\omega'')}{-\cot(\Upsilon F + \frac{1}{2}\Upsilon\Upsilon'\cos\omega'')},$$

et sans erreur sensible

$$\omega' - \omega'' = \frac{\Upsilon\Upsilon'\cos\omega\,\text{tang}\,\omega}{-\cot\Upsilon F} = -\frac{\Upsilon\Upsilon'\sin\omega}{\cot\Upsilon F};$$

ou

$$\omega'' - \omega' = +\frac{\Upsilon\Upsilon'\sin\omega}{\cot\Upsilon F};$$

or le triangle $\Upsilon ☊ F$ donne en nommant I l'inclinaison de l'orbite lunaire

$$\cot\Upsilon F = \frac{\cos ☊ \cos\omega' + \sin\omega' \cot I}{\sin ☊};$$

donc

$$\omega'' - \omega' = +\frac{\Upsilon\Upsilon'\sin\omega\sin ☊}{\cos ☊ \cos\omega + \sin\omega\cot I} = \frac{\Upsilon\Upsilon'\,\text{tang}\,\omega\sin ☊}{\cos ☊ + \text{tang}\,\omega\cot I}.$$

Le dénominateur $\cos ☊ + \text{tang}\,\omega \cot I = \cos ☊ + \frac{\text{tang}\,\omega}{\text{tang}\,I}$ est toujours positif, car $\frac{\text{tang}\,\omega}{\text{tang}\,I} > 1$; dans le numérateur $\Upsilon\Upsilon'$ est toujours positif, car toujours Υ' sera au-dessous de Υ; donc $\omega'' - \omega'$ sera une quantité positive tant que $\sin ☊$ sera une quantité positive; ainsi l'obliquité de chaque moment ω' recevra de continuels accroissemens tant que $\sin ☊$ sera positif; ainsi l'obliquité ira en augmentant depuis l'instant où le nœud sera arrivé à 180° jusqu'à ce qu'il ait rétrogradé jusqu'à 0°. L'obliquité apparente la plus petite aura lieu quand le nœud sera à 180°, la plus grande aura lieu quand il sera à 0°. Il n'y a rien de semblable pour le soleil parce que $\sin ☊ = 0$; $\omega'' = \omega' = \omega$, l'obliquité est constante.

7. L'obliquité moyenne aura donc lieu quand le nœud sera en 90° ou 270°, et l'obliquité apparente sera $\omega' = \omega + a\cos ☊$, a étant un coefficient à déterminer. Il reste donc à voir par les observations si ce

effet l'obliquité apparente est la plus grande quand le nœud est à l'équinoxe du printems, et la plus petite quand il est à l'équinoxe d'automne; si elle est croissante tant que le nœud parcourt les signes septentrionaux et décroissante dans les signes méridionaux.

Ces aperçus insuffisans pour donner une théorie complète de la nutation sont au moins très-propres à en faire naître le soupçon et à guider l'observateur. En général on ne songe guère à creuser une théorie à moins que les observations n'aient fait découvrir une inégalité sensible. Les règles de calcul que Bradley et Machin avaient tirées de l'observation, étaient adoptées par tous les astronomes depuis plus de douze ans, quand les géomètres et D'Alembert le premier songèrent à ramener ces phénomènes au principe de l'attraction. Voyons par quel moyen Bradley fit cette seconde découverte.

8. Soit ♈E♎ l'équateur (fig. 55), ♈C♎ l'écliptique, PCE le colure des solstices et P le pôle.

En 1727 le nœud de l'orbite de la lune était en ♈ à 0° de longitude, le nœud descendant était en ♎ et l'orbite de la lune avait la position ♈I♎.

Bradley remarqua que le pôle P de l'équateur était descendu de P en A, ensorte que la déclinaison des étoiles situées sur le colure PE était augmentée de 9″, tandis que les étoiles qui étaient sur le prolongement EP vers le colure ♋ avaient diminué de 9″ en déclinaison; il en résultait que l'équateur ♈E♎ avait pris la position ♈E′♎, ensorte que EE′ était de 9″ ainsi que l'angle E♈E′, et que l'obliquité de l'écliptique était augmentée de 9″; ce qui est conforme à ce que nous avons établi ci-dessus (6).

A mesure que le nœud de là lune rétrogradait de 0^s à 9^s de longitude, les déclinaisons changeaient, comme si le pôle se relevait de A vers P; et quand le nœud fut arrivé à 9^s le pôle parut avoir repris la position P, ou plutôt il était arrivé en B, et les étoiles placées vers le colure des équinoxes avaient augmenté de 8 à 9″ en déclinaison.

Quand le nœud fut à 180° ou dans la balance en 1736, le pôle paraissait monté en C, ensorte que PC était de 9″ = PA.

Enfin le nœud continuant de rétrograder pendant 9 ans pour revenir en ♈, Bradley vit reparaître toutes les mêmes variations en ordre inverse et le pôle se retrouva en A comme en 1727.

Ayant continué ses observations, il vit reparaître encore les phéno-

mènes des premières années, il commença à compter sur la nouvelle découverte, il en fit part dès 1736 aux académiciens qui partaient pour mesurer le degré du nord.

9. Ce balancement du pôle de P en A et de A en C ne pouvait satisfaire aux observations des étoiles faites vers le colure des équinoxes, mais il fallait que le pôle décrivît un cercle autour de P sur le diamètre APC de 18″, et c'est en effet l'hypothèse imaginée par Machin et adoptée par Bradley; il supposa que le pôle rétrogradait de A en B, de B en C, de C en D, de D en A, se trouvant toujours plus avancé de 90° sur son petit cercle que le nœud de la lune sur l'écliptique, ensorte que l'angle ☊PA, qui était de 90° en 1727 conservait constamment cette valeur de 90°.

Voyons donc les conséquences qui résultent mathématiquement de cette hypothèse et calculons tous les effets de cette nutation.

Nous conserverons ce nom, qui est universellement adopté quoiqu'il ne soit pas fort juste pour exprimer un mouvement circulaire.

10. Supposons (fig. 56) le nœud ☊ dans le premier quart, comme nous faisons dans toutes nos formules; le pôle sera quelque part en O, de sorte que BPO $= 90° +$ ☊ et AO $=$ longitude du nœud.

Menons PO et prolongeons cet arc jusqu'à l'équateur en a, l'angle Pa♈ sera de 90° et l'arc ♈$a = 90° +$ ☊ : prenons aI $= 90°$, I sera le pôle de l'arc Pa, et ♈I $=$ longitude du ☊ dans le premier quart. Prolongeons Oa en b, ensorte que O$b = 90°$ et $ab =$ PO. Menons l'arc de grand cercle bE'I♈', ce sera la position de l'équateur quand le pôle est en O; bI sera de 90°, puisque les angles a et b sont chacun de 90°, et l'angle I sera $= ab = 9'' =$ PO.

Le point ♈′ sera l'intersection actuelle de l'équateur mobile bI avec l'écliptique immobile ♈C♎, l'angle C♈′b l'obliquité actuelle de l'écliptique, l'arc ♈♈′ le déplacement du point équinoxial sur l'écliptique, ou la quantité dont toutes les longitudes seront diminuées.

11. Dans le triangle ♈♈′I nous avons l'angle ♈ $= \omega = 23°28'$, l'angle I $= 9'' =$ PO $= ab$, enfin le côté ♈I $=$ longitude ☊.

Nous aurons

$$\cos \Upsilon\Upsilon'\mathrm{I} = \cos \Upsilon\mathrm{I} \sin \Upsilon \sin \mathrm{I} - \cos \Upsilon \cos \mathrm{I},$$

on

$$\cos(180^\circ - \mathrm{C}\Upsilon'\mathrm{I}) = -\cos\omega' = \cos\Omega \sin\omega \sin 9'' - \cos\omega \cos 9'',$$

ou

$$\cos\omega \cos 9'' - \cos\omega' = \sin 9'' \sin\omega \cos\Omega,$$

ou bien

$$\cos\omega - \cos\omega' = 2\cos\omega \sin^2 \frac{9''}{2} + \sin 9'' \sin\omega \cos\Omega;$$

et par conséqnent

$$2\sin\tfrac{1}{2}(\omega' - \omega) = \frac{2\cos\omega \sin^2\frac{9''}{2} + \sin 9'' \sin\omega \cos\Omega}{\sin\frac{1}{2}(\omega' + \omega)}.$$

Le premier terme étant insensible, il en résulte

$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega' - \omega) = \frac{\frac{1}{2}\sin 9'' \sin\omega \cos\Omega}{\sin\frac{1}{2}(\omega' + \omega)},$$

ou bien

$$\omega' - \omega = 9'' \cos\Omega.$$

Ce sera la correction de l'obliquité de l'écliptique.

12. On a dans le triangle $\Upsilon\Upsilon'\mathrm{I}$

$$\mathrm{tang}\,\Upsilon\Upsilon' = \frac{\sin\Omega}{\sin\omega \cot 9'' + \cos\omega \cos\Omega} = \frac{\mathrm{tang}\, 9'' \sin\Omega}{\sin\omega + \mathrm{tang}\, 9'' \cos\omega \cos\Omega}$$

$$= \frac{\mathrm{tang}\, 9'' \sin\Omega}{\sin\omega(1 + \mathrm{tang}\, 9'' \cot\omega \cos\Omega)} = \frac{\mathrm{tang}\, 9'' \sin\Omega}{\sin\omega}(1 - \mathrm{tang}\, 9'' \cot\omega \cos\Omega)$$

on

$$\Upsilon\Upsilon' = \frac{9'' \sin\Omega}{\sin\omega}.$$

Le même triangle donne

$$\mathrm{tang}\,\Upsilon'\mathrm{I} = \frac{\sin\Omega}{\sin 9'' \cot\omega + \cos 9'' \cos\Omega} = \frac{\mathrm{tang}\,\Omega}{\cos 9''}\left(1 - \frac{\mathrm{tang}\, 9'' \cot\omega}{\cos\Omega}\right)$$

$$\mathrm{tang}\,\Omega' = \mathrm{tang}\,\Omega + \mathrm{tang}\, 9'' \mathrm{tang}\, 4'',5 \,\mathrm{tang}\,\Omega - \frac{\mathrm{tang}\, 9'' \cot\omega \,\mathrm{tang}\,\Omega}{\cos\Omega}$$

$$\mathrm{tang}\,\Omega - \mathrm{tang}\,\Omega' = \frac{\mathrm{tang}\, 9'' \cot\omega \,\mathrm{tang}\,\Omega - \frac{1}{2}\mathrm{tang}^2 9'' \sin\Omega}{\cos\Omega}$$

$$\sin(\Omega - \Omega') = \mathrm{tang}\, 9'' \cot\omega \sin\Omega \left(\frac{\cos\Omega'}{\cos\Omega}\right) - \tfrac{1}{2}\mathrm{tang}^2 9'' \sin\Omega \cos\Omega'$$

$$\Omega - \Omega' = 9'' \cot\omega \sin\Omega.$$

On a donc sans erreur sensible les trois corrections suivantes :

$$\text{correct. d'obliquité} = +\,9''\cos\Omega = +\,\text{PO}\cos\Omega\,,$$
$$\text{correct. des points équin. sur l'éclip.} = -\frac{9''\sin\Omega}{\sin\omega} = -\,\text{PO coséc}\,\omega\sin\Omega$$
$$\text{correct. des points équin. sur l'équat.} = -9''\cot\omega\sin\Omega = -\text{PO}\cot\omega\sin\Omega\,.$$

Ce sont les formules connues; mais la manière dont nous y sommes arrivés montre ce qu'on y a négligé. Ces formules sont générales, quel que soit l'astre observé, la seconde s'applique à toutes les longitudes, la troisième à toutes les ascensions droites sans exception.

13. Soit maintenant une étoile quelconque S (fig. 56), mais toujours dans le premier quart; menons les cercles de déclinaison PShN, OSnH, les angles h et H sont droits et on aura

$$\text{tang}\,nh = \sin \text{S}h \,\text{tang}\,\text{S} = \sin \text{D}\,\text{tang}\,\text{S}$$
$$\text{tang}\,\text{NH} = \sin \text{SH}\,\text{tang}\,\text{S} = \sin \text{D}'\,\text{tang}\,\text{S}.$$

Mais le triangle PSO donne

$$\cot\text{PS}\cot\text{OPS} = \frac{\cot\text{OP}}{\sin\text{OPS}} - \frac{\cot\text{S}}{\sin\text{PS}};$$

d'où l'on tire

$$\text{tang}\,\text{S} = \frac{\sin\text{OPS}}{\sin\text{PS}\cot\text{PO} - \cos\text{PS}\cos\text{OPS}}$$
$$= \frac{\frac{\text{tang}\,\text{PO}\sin\text{OPS}}{\sin\text{PS}}}{1 - \cot\text{PS}\,\text{tang}\,\text{PO}\cos\text{OPS}} = \frac{\frac{\text{tang}\,\text{PO}}{\cos\text{D}}\sin(90^\circ - \text{I}h)}{1 - \text{tang}\,\text{PO}\,\text{tang}\,\text{D}\cos(90^\circ - \text{I}h)}$$
$$= \frac{\text{tang}\,\text{PO}}{\cos\text{D}}\cos\text{I}h + \text{tang}^2\text{PO}\frac{\text{tang}\text{D}}{\cos\text{D}}\sin\text{I}h\cos\text{I}h$$
$$= \frac{\text{tang}\,\text{PO}}{\cos\text{D}_{\prime}}\cos(\text{Æ} - \Omega) + \tfrac{1}{2}\,\text{tang}^2\text{PO}\,\frac{\text{tang}\text{D}}{\cos\text{D}}\sin 2(\text{Æ} - \Omega)$$
$$= \frac{\text{tang}\,\text{PO}}{\cos\text{D}}\cos(\text{Æ} - \Omega)$$

sans erreur sensible, et par conséquent

$$\text{tang}\,nh = \text{tang}\,\text{D}\,\text{tang}\,\text{PO}\cos(\text{Æ} - \Omega)\,,$$
$$\text{tang}\,\text{NH} = \frac{\sin\text{D}'}{\cos\text{D}}\,\text{tang}\,\text{PO}\cos(\text{Æ} - \Omega)\,;$$

mais on a

$$\frac{\sin D'}{\cos D} = \frac{\sin(D + dD)}{\cos D} = \frac{\sin D + dD \cos D}{\cos D} = \tang D + dD,$$

donc

$$\tang NH = \tang D \tang PO \cos(Æ - ☊) + dD \tang PO \cos(Æ - ☊);$$

et sans erreur sensible

$$NH = nh = PO \tang D \cos(Æ - ☊),$$

et la seconde correction d'ascension droite sera

$$= - PO \tang D \cos(Æ - ☊) = - 9'' \tang D \cos(Æ - ☊).$$

14. Enfin

$$\cos OS = \sin D' = \cos OPS \sin PO \sin PS + \cos PO \cos PS$$
$$= \sin(Æ - ☊) \sin PO \cos D + \cos PO \sin D;$$

et par conséquent

$$\sin D' - \sin D \cos PO = \sin PO \cos D \sin(Æ - ☊) = dD \cos D,$$

sans erreur sensible, ou

$$dD = D - D' = PO \sin(Æ - ☊):$$

ainsi

correct. totale d'asc. dr. $= - PO \cot\omega \sin ☊ - PO \tang D \cos(Æ - ☊)$
correct. totale de décl. $= + PO \sin(Æ - ☊)$,

le signe + indiquant un mouvement vers le nord.

Ces formules ont une analogie remarquable avec les formules de précession, et en effet la nutation en ascension droite et en déclinaison est la différentielle de la précession; aussi voyons-nous les sinus changés en cosinus, et réciproquement.

15. Ces formules représentent assez bien les observations de Bradley, cependant il remarquait lui-même que l'accord serait encore plus grand si l'on substituait une ellipse au petit cercle de nutation. Voyons quel changement cette nouvelle hypothèse apporte à nos formules.

L'ellipse BDF (fig. 57) sera la projection du cercle LOA, le point O aura sa projection en a, PO deviendra

$$Pa = \frac{PO \cos APO}{\cos APa} = \frac{PO \cos \Omega}{\cos \Omega'} = \frac{m \cos \Omega}{\cos \Omega'}.$$

Ob devient

$$ab = \frac{Ob.PD}{PO} = \frac{PO \sin \Omega . PD}{PO} = PD \sin \Omega = n \sin \Omega;$$

nous désignons par m et n le grand et le petit axe de l'ellipse.

On a aussi

$$\text{tang} APa = \frac{ab}{Pb} = \frac{PD \sin \Omega}{PO \cos \Omega} = \frac{PD}{PA} \text{tang} \Omega$$

ou

$$\text{tang} \Omega' = \frac{n}{m} \text{tang} \Omega.$$

Substituons maintenant ces quantités dans nos formules :

16. PO cos ☊ deviendra

$$Pa \cos \Omega' = \frac{PO \cos \Omega \cos \Omega'}{\cos \Omega'} = PO \cos \Omega = m \cos \Omega:$$

rien de changé dans la correction d'obliquité qui sera toujours $\frac{1}{2}$ grand axe cos ☊.

$$\text{correct. longit.} = -\frac{PO \sin \Omega}{\sin \omega'}$$

devient

$$-\frac{Pa \sin \Omega'}{\sin \omega'} = -\frac{m \cos \Omega}{\cos \Omega'} \frac{\sin \Omega'}{\sin \omega'} = -\frac{m}{\sin \omega'} \cos \Omega \text{ tang} \Omega'$$

$$= -\frac{m}{\sin \omega'} \cos \Omega . \frac{n \text{ tang} \Omega}{m} = -\frac{n \sin \Omega}{\sin \omega'},$$

expression tout aussi simple.

Il n'y a point de correction de latitude, non plus que pour la précession, parce que l'écliptique est immobile.

$$\text{Correct. d'ascens. droite} = -PO \text{ cotang } \omega \sin \Omega$$
$$- PO \text{ tang} D \cos (Æ - \Omega)$$

devient

devient

$$= -\text{P}a \text{ cotang } \omega \sin \Omega' - \text{P}a \text{ tang D} \cos(\text{Æ} - \Omega')$$
$$= -\text{PO} \frac{\text{cotang } \omega \sin \Omega' \cos \Omega}{\cos \Omega'}$$
$$- \text{PO tang D} \frac{\cos \Omega}{\cos \Omega'} (\cos \text{Æ} \cos \Omega' + \sin \text{Æ} \sin \Omega')$$
$$= -m \text{ cotang } \omega \cos \Omega \text{ tang } \Omega'$$
$$- m \text{ tang D} \cos \Omega (\cos \text{Æ} + \sin \text{Æ} \text{ tang } \Omega')$$
$$= -n \text{ cotang } \omega \sin \Omega - m \text{ tang D} \cos \text{Æ} \cos \Omega$$
$$- n \text{ tang D} \sin \text{Æ} \sin \Omega$$
$$= -n \text{ cotang } \omega \sin \Omega - \frac{m}{2} \text{ tang D} [\cos(\text{Æ} - \Omega) + \cos(\text{Æ} + \Omega)]$$
$$- \frac{n}{2} \text{ tang D} [\cos(\text{Æ} - \Omega) - \cos(\text{Æ} + \Omega)]$$
$$= -n \cot \omega \sin \Omega - \tfrac{1}{2}(m + n) \text{ tang D} \cos(\text{Æ} - \Omega)$$
$$- \tfrac{1}{2}(m - n) \text{ tang D} \cos(\text{Æ} + \Omega).$$

17. Pour le soleil, on a $\text{tang D} = \text{tang } \omega \sin \text{Æ}$, et en substituant dans la formule précédente, on aura

$$\text{nut.} = -n \text{ cotang } \omega \sin \Omega - \tfrac{1}{2}(m+n) \text{ tang } \omega \sin \text{Æ} \cos(\text{Æ} - \Omega)$$
$$- \tfrac{1}{2}(m - n) \text{ tang } \omega \sin \text{Æ} \cos(\text{Æ} + \Omega)$$
$$= - \left[\begin{array}{l} \tfrac{1}{2}(m+n) \sin(2\text{Æ} - \Omega) + \tfrac{1}{2}(m+n) \sin \Omega \\ + \tfrac{1}{2}(m-n) \sin(2\text{Æ} + \Omega) - \tfrac{1}{2}(m-n) \sin \Omega \end{array} \right] \frac{\text{tang } \omega}{2}$$
$$- n \text{ cotang } \omega \sin \Omega$$
$$= -n(\cot \omega + \tfrac{1}{2} \text{ tang } \omega) \sin \Omega - \frac{m+n}{4} \text{ tang } \omega \sin(2\text{Æ} - \Omega)$$
$$- \frac{m-n}{4} \text{ tang } \omega \sin(2\text{Æ} + \Omega).$$

18. La correction de déclinaison $\text{PO} \sin(\text{Æ} - \Omega)$, devient

$$\text{P}a \sin(\text{Æ} - \Omega'), \text{ ou } \frac{m \cos \Omega}{\cos \Omega'} (\sin \text{Æ} \cos \Omega' - \cos \text{Æ} \sin \Omega')$$
$$= m \cos \Omega \sin \text{Æ} - m \cos \text{Æ} \cos \Omega \text{ tang } \Omega'$$
$$= m \sin \text{Æ} \cos \Omega - n \cos \text{Æ} \sin \Omega$$
$$= \frac{m}{2} [\sin(\text{Æ} + \Omega) + \sin(\text{Æ} - \Omega)]$$
$$- \frac{n}{2} [\sin(\text{Æ} + \Omega) - \sin(\text{Æ} - \Omega)]$$
$$= \frac{m-n}{2} . \sin(\text{Æ} + \Omega) + \frac{m+n}{2} \sin(\text{Æ} - \Omega).$$

Ces formules élégantes sont de Lambert ; elles peuvent se renfermer dans des tables très-simples qui servent pour les ascensions droites et les déclinaisons, ainsi que mes tables d'aberration qui sont d'une forme semblable.

19. D'Alembert a démontré que $\frac{n}{m} = \frac{\cos 2\omega}{\cos \omega}$: portons ce rapport dans nos formules, nous aurons

$$\text{correct. asc. dr.} = \frac{n \sin \Omega}{\sin \omega} = \frac{m \cos 2\omega \sin \Omega}{\sin \omega \cos \omega} = 2m \operatorname{cotang} 2\omega \sin \Omega.$$

On aura aussi

$$m + n = m + m\frac{\cos 2\omega}{\cos \omega} = \frac{m}{\cos \omega}(\cos \omega + \cos 2\omega)$$
$$= \frac{2m}{\cos \omega} \cos \tfrac{1}{2}\omega \cos \tfrac{3}{2}\omega ;$$

donc

$$\frac{m+n}{2} = m \frac{\cos \frac{1}{2}\omega \cos \frac{3}{2}\omega}{\cos \frac{2}{2}\omega}.$$

Pareillement

$$m - n = m - \frac{m \cos 2\omega}{\cos \omega} = \frac{m}{\cos \omega}(\cos \omega - \cos 2\omega)$$
$$= \frac{2m}{\cos \omega} \sin \tfrac{3}{2}\omega \sin \tfrac{1}{2}\omega ;$$

donc

$$\frac{m-n}{2} = m \frac{\sin \frac{1}{2}\omega \sin \frac{3}{2}\omega}{\cos \frac{2}{2}\omega},$$

et par conséquent

$$\frac{m-n}{m+n} = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\omega \operatorname{tang} \tfrac{3}{2}\omega.$$

Ainsi toutes nos formules seront transformées de manière à n'avoir d'autre inconnue que le demi-grand axe de l'ellipse.

La nutation en déclinaison $m \cos \Omega \sin Æ - n \sin \Omega \cos Æ$ $= m(\cos \Omega \sin Æ - \frac{\cos 2\omega}{\cos \omega} \sin \Omega \cos Æ)$, étant différentiée par rapport à Ω, donne

$$d.\text{nut. en déclin.} = -m d\Omega (\sin \Omega \sin Æ + \frac{\cos 2\omega}{\cos \omega} \cos \Omega \cos Æ),$$

expression qui, étant égalée à zéro, donne

$$\operatorname{tang} \Omega = -\frac{\cos 2\omega}{\cos \omega} \operatorname{cotang} Æ, \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} Æ = -\frac{\cos 2\omega}{\cos \omega} \cot \Omega.$$

20. Au moyen de cette équation, on trouve le lieu du nœud qui rend *maximum* la nutation pour une étoile donnée. On trouve aussi quelles étoiles il faut observer pour avoir les plus grands effets de la nutation en déclinaison, quand le lieu du nœud est donné.

Supposons qu'on ait fait des observations à neuf ans de distance, on aura (en désignant par N la nutation correspondante à la déclinaison D, et par N′ la nutation correspondante à la déclinaison D′)

$$D + N = D + m\cos\Omega\sin AR - n\sin\Omega\cos AR,$$
$$D' + N' = D' - m\cos\Omega\sin AR' + n\sin\Omega\cos AR',$$

ou réduisant

$$N = \quad m\cos\Omega\sin AR - n\sin\Omega\cos AR,$$
$$N' = -m\cos\Omega\sin AR' + n\sin\Omega\cos AR',$$

d'où, multipliant par $\cos AR'$ et $\cos AR$,

$$N\cos AR' = \quad m\cos\Omega\sin AR\cos AR' - n\sin\Omega\cos AR\cos AR',$$
$$N'\cos AR = -m\cos\Omega\sin AR'\cos AR + n\sin\Omega\cos AR\cos AR',$$

et $$N\cos AR' + N'\cos AR = m\cos\Omega(\sin AR\cos AR' - \sin AR'\cos AR)$$
$$= m\cos\Omega\sin(AR - AR'),$$

d'où $$m = \frac{N\cos AR' + N'\cos AR}{\cos\Omega\sin(AR - AR')}.$$

De même, en multipliant par $\sin AR'$ et $\sin AR$,

$$N\sin AR' = \quad m\cos\Omega\sin AR\sin AR' - n\sin\Omega\cos AR\sin AR',$$
$$N'\sin AR = -m\cos\Omega\sin AR\sin AR' + n\sin\Omega\sin AR\cos AR'$$
$$N\sin AR' + N'\sin AR = n\sin\Omega(\sin AR\cos AR' - \cos AR\sin AR')$$
$$= n\sin\Omega\sin(AR - AR'),$$

et $$n = \frac{N\sin AR' + N'\sin AR}{\sin\Omega\sin(AR - AR')}.$$

Le diviseur $\sin(AR - AR')$ avertit de choisir des étoiles éloignées de 90° environ en ascension droite.

Par des moyens équivalens qu'il n'a point indiqués, Bradley trouvait

$m = 9''$ et $n = 8''$; il ignorait le rapport donné par la théorie qui ferait $n = 6'',7$. Mayer trouvait par la théorie, assez d'accord avec les observations, $m = 9'',65$; Maskelyne, $9'',55$; M. Laplace, $9'',58$ environ.

En adoptant $9'',6$, je trouve

$$d\omega = +\ 9'',6 \cos \Omega,$$
$$d\Upsilon = -\ 17'',946 \sin \Omega;$$
$$d\Upsilon' = -\ 16'',462 \sin \Omega,$$
$$d\Upsilon - d\Upsilon' = -\ 1'',484 \sin \Omega,$$
$$d\text{Æ} = \frac{-8'',3732 \cos(\text{Æ} - \Omega) - 1'',2268 \cos(\text{Æ} + \Omega)}{\text{cotang D}},$$
$$d\text{D} = +\ 8'',3732 \sin(\text{Æ} - \Omega) + 1'',2268 \sin(\text{Æ} + \Omega).$$

21. Lambert a fait sur ces dernières formules quatre petites tables qui servent pour tous les astres; cependant, pour composer mes tables générales de nutation, j'ai trouvé plus commode encore de faire

$$\text{nut. Æ} = \text{tang D}[m \cos \text{Æ} \cos \Omega - n \sin \text{Æ} \sin \Omega];$$

Ces tables donnent dans un seul terme la quantité

$$m \cos \text{Æ} \cos \Omega - n \sin \text{Æ} \sin \Omega;$$

il reste à multiplier par tang D:

$$\text{nut. déclin.} = m \sin \text{Æ} \cos \Omega - n \cos \text{Æ} \sin \Omega:$$

cette quantité est indépendante de la déclinaison. Ainsi toutes les étoiles qui ont la même ascension droite, ont la même nutation en déclinaison; et celles dont l'ascension droite diffère de 180° ont aussi la même nutation, mais de signe contraire.

Les étoiles qui diffèrent de 180° en Æ, et qui ont la déclinaison égale, l'une au nord et l'autre au sud, ont la même nutation en Æ. Si les déclinaisons sont de même dénomination et toujours égales, les nutations seront égales, mais de signe contraire.

22. En suivant les principes analogues à ceux que nous avons expliqués pour l'aberration, MM. de Zach et Gauss ont donné différentes formes aux tables. Les tables de M. Gauss ne sont au fond que celles de La Caille;

mais je préfère à tout, les tables générales où l'on prend à vue les quantités dont on a besoin, sans former aucun des argumens de M. de Zach, ni recourir aux logarithmes de M. Gauss. Si l'on consent à se servir des logarithmes, on fera tout aussi bien et aussi promptement par les formules ci-dessus (21).

23. La nutation qui dérange le pôle et l'équateur, affecte les planètes comme les étoiles. Quand on a déterminé par observation, le lieu d'une planète, ce ne peut jamais être que le lieu apparent; on en a pris la différence de passage ou de hauteur par rapport à une étoile dont on avait calculé le lieu affecté de l'aberration et de la nutation; le lieu de la planète est affecté de même de l'aberration et de la nutation qui lui convient, c'est le lieu apparent. Si l'on a mesuré directement la distance au zénit, ce ne peut être encore que la distance apparente : pour en conclure la longitude et la latitude vraie, il y a deux moyens.

Le premier serait de calculer l'aberration et la nutation de la planète en ascension droite et en déclinaison, d'en dépouiller le lieu observé qui deviendrait alors le lieu vrai en ascension droite et en déclinaison, et l'on chercherait ensuite la longitude et la latitude vraies, par l'obliquité vraie de l'écliptique; mais ce moyen ne serait pas le plus court.

Gardez l'ascension droite et la déclinaison telle que l'observation la donne, c'est-à-dire le lieu rapporté à l'équateur déplacé par le mouvement du pôle; calculez la latitude en employant l'angle apparent de l'écliptique avec l'équateur et l'équinoxe affecté de la nutation, vous aurez la longitude et la latitude rapportées à l'écliptique qui est immobile, seulement la longitude sera comptée de l'équinoxe apparent; ajoutez-y 17",946 sin ☊. La longitude et la latitude seront par là dépouillées des effets de la nutation, mais non de l'aberration; corrigez cette longitude et cette latitude de l'aberration de la planète calculée par nos formules prises avec un signe contraire, puisqu'il s'agit de réduire un lieu apparent au lieu vrai, ou bien conservez les signes de l'aberration, et appliquez-la au lieu de la planète calculé sur les tables; vous comparerez le lieu vrai tiré de l'observation, et le même lieu tiré du calcul, ou le lieu apparent observé avec le lieu apparent calculé, et la différence, qui sera la même dans les deux procédés, sera toujours l'erreur des tables.

24. M. Gauss a proposé de passer directement du lieu héliocentrique au lieu géocentrique rapporté à l'équateur. Le lieu héliocentrique est un

lieu vrai; le lieu géocentrique en ascension droite et en déclinaison sera aussi un lieu vrai. Pour le comparer au lieu observé, il faudra appliquer au lieu calculé, l'effet de l'aberration et de la nutation, ou bien dépouiller le lieu observé de ce double effet, en changeant les signes des formules.

Tout cela revient au même; mais il me semble que le procédé ordinaire des astronomes est plus simple, plus naturel et plus court; il consiste à calculer d'abord la longitude et la latitude pour en conclure ensuite l'ascension droite et la déclinaison, s'il est nécessaire : les formules sont plus commodes et plus faciles à retenir; c'est ce que nous allons examiner.

Soit Æ l'ascension droite, et D la déclinaison, X, Y, Z, x, y, z les trois coordonnées de la terre et de la planète, vous aurez

$$\text{tang}\,Æ = \frac{y-Y}{x-X}, \qquad \text{tang}\,D = \left(\frac{z-Z}{x-X}\right)\cos Æ = \left(\frac{z-Z}{y-Y}\right)\sin Æ.$$

Soit $\odot$ la longitude héliocentrique de la terre, ω l'obliquité, R le rayon vecteur de la terre, on aura

$$X = R\cos\odot, \quad Y = R\sin\odot\cos\omega, \quad Z = \sin\odot\sin\omega.$$

Soit r le rayon vecteur de la planète,

$$x = r\sin a\sin(A+t)\,; \qquad y = r\sin b\sin(B+t)\,;$$

$$z = r\sin c\sin(C+t)\,;$$

$$t = \text{longit. dans l'orbite} - \text{longit. } \Omega \text{ sur l'éclipt.} = \Pi - \Omega,$$

I est l'inclinaison, et Ω le nœud ascendant,

$$\text{cotang}\,A = -\cos I\,\text{tang}\,\Omega, \quad \cos a = \sin I\sin\Omega, \quad \sin a = \frac{\cos\Omega}{\cos A},$$

$$\text{cotang}\,B = \frac{-\sin I\,\text{tang}\,\omega + \cos I\cos\Omega}{\sin\Omega},$$

$$\cos b = -\cos I\sin\omega - \sin I\cos\omega\cos\Omega,$$

$$\sin b = \frac{\cos\omega\sin\Omega}{\sin B}, \quad \text{cotang}\,C = \frac{\sin I\,\text{cotang}\,\omega + \cos I\cos\Omega}{\sin\Omega},$$

$$\cos c = \cos I\cos\omega - \sin I\sin\omega\cos\Omega,$$

$$\sin c = \frac{\sin \omega \sin ☊}{\sin C}, \quad \cos(B - C) = -\cot b \, \text{cotang}\, c,$$

$$\sin(B - C) = \frac{\cos a}{\sin b \sin c},$$

$$\cos(C - A) = -\text{cotang}\, c \, \text{cotang}\, a, \quad \sin(C - A) = \frac{\sin b}{\sin a \sin c},$$

$$\sin(A - B) = \frac{\cos a}{\sin a \sin b}, \qquad \text{cotang}(A - B) = -\frac{\cos a \cos b}{\cos C},$$

$$\cos^2 a = \text{cotang}(A - B)\, \text{cotang}(C - A),$$

$$\cos^2 b = \text{cotang}(B - C)\, \text{cotang}(A - B),$$

$$\text{cotang}(B - C) = -\frac{\cos b \cos c}{\cos a}, \quad \text{cotang}(C - A) = -\frac{\cos c \cos a}{\cos I},$$

$$\cos^2 c = \text{cotang}(C - A)\, \text{cotang}(B - C),$$

$$\text{tang}\, Æ = \frac{y - Y}{x - X} = \frac{r \sin b \sin(B + t) - R \sin ♁ \cos \omega}{r \sin a \sin(A + t) - R \cos ♁},$$

$$\text{tang}\, D = \frac{[r \sin c \sin(C + t) - R \sin \omega \sin ♁] \cos Æ}{r \sin a \sin(A + t) - R \cos ♁}.$$

Ces formules heureusement ne sont pas toutes également nécessaires ; elles donnent Æ et D pour le centre de l'ellipsoïde terrestre.

Soit

ρ le rayon de la terre,

φ la latitude réduite au centre de l'ellipsoïde,

θ l'ascension droite du milieu du ciel,

$X' = X + \rho \cos\varphi \cos\theta$,

$Y' = Y + \rho \cos\varphi \sin\theta$,

$Z' = Z + \rho \sin\varphi$.

Ces dernières formules peuvent être utiles pour le calcul de la parallaxe.

25. Soit (fig. 58) ♋♈♑ l'écliptique, ♈QN l'équateur, P le pôle de l'équateur, E celui de l'écliptique, R☊u l'orbite d'une planète dont le nœud est en ☊.

E☊ $= 90°$, car cet arc est mené d'un point de l'écliptique à son pôle.

Du point ☊ comme pôle décrivez l'arc de grand cercle EPOu; le pôle de l'orbite sera sur cet arc ; soit p ce pôle, pE $=$ Ou $=$ O☊u $=$ I

sera l'inclinaison.

$$☊O = ☊Ep = 90° = ☊pE = ☊Ep = ☊pu.$$
$$☊E♑ = ☊♑ = ☊♈ + 90° = 90° + O♑;$$

d'où

$$O♑ = OE♑ = ♈☊ = \text{longit. } ☊$$
$$\text{longit. du point } O = \text{long. } ♑ + \text{long. } ☊ = 270° + ☊.$$

Menez l'arc E♈ qui sera de 90°; menez l'arc ♈pq, cet arc sera de 90° et l'angle Eqp sera droit. Le triangle rectangle pEq donnera

$$\sin pq = \cos p♈ = \cos a = \sin Ep \sin pEQ = \sin I \sin O♑ = \sin I \sin ☊;$$

ainsi l'arc p♈ est l'arc subsidiaire a de M. Gauss.

$$\cot Epq = \cos Ep \tang pEq = \cos I \tang ☊ = -\cot A.$$

L'angle Epq = ♈PO est supplément de l'angle A de M. Gauss. Ainsi A = Ep♈

$$\cos qEp = \cos ☊ = \cos pq \sin Epq = \sin a \sin A;$$

ou

$$\sin a = \frac{\cos ☊}{\sin A};$$

ce qui confirme les deux remarques précédentes.

26. Le triangle QEp (fig. 58 et 59) donne

$$\cos c \cos a' = \cot c'' \sin c - \sin a' \cot a''$$
$$-\cos I \cos ☊ = -\tang \omega \sin I - \sin ☊ \cot EpQ,$$

ou

$$\cot B = \cot EpQ = \frac{-\sin I \tang \omega + \cos I \cos ☊}{\sin ☊};$$

l'angle EpQ est donc l'angle B de M. Gauss.

Le même triangle donne, en faisant $b = p$Q

$$\cos b = \cos pQ = \cos pEQ \sin Ep \sin EQ + \cos Ep \cos EQ$$
$$= -\cos ☊ \sin I \cos \omega - \cos I \sin \omega;$$

pQ est donc l'arc b de M. Gauss.

$$\sin pQ : \sin EQ :: \sin pEQ : \sin EpQ = \frac{\sin EQ \sin pEQ}{\sin pQ} = \frac{\cos \omega \sin ☊}{\sin b},$$

ou $\quad \sin B = \frac{\cos \omega \sin ☊}{\sin b} \quad$ et $\quad \sin b = \frac{\cos \omega \sin ☊}{\sin B},$

c'est encore une des équations de M. Gauss.

27.

27. Le triangle PEp (fig. 58 et 60) donne en faisant $c = \mathrm{P}p$

$$\cos c = \cos \mathrm{P}p = \cos \mathrm{PE}p \sin \mathrm{PE} \sin \mathrm{E}p + \cos \mathrm{PE} \cos \mathrm{E}p$$
$$= -\cos \Omega \sin \omega \sin \mathrm{I} + \cos \omega \cos \mathrm{I};$$

Pp est donc l'arc c de M. Gauss. Le même triangle donne encore

$$\cot \mathrm{C} = \cot \mathrm{P}p\mathrm{E} = \frac{\cot \omega \sin \mathrm{I} + \cos \mathrm{I} \cos \Omega}{\sin \Omega}$$

$$\sin \mathrm{P}p : \sin \mathrm{PE}p :: \sin \mathrm{PE} : \sin \mathrm{P}p\mathrm{E} = \sin \mathrm{C} = \frac{\sin \mathrm{PE} \sin \mathrm{PE}p}{\sin \mathrm{P}p} = \frac{\sin \omega \sin \Omega}{\sin c},$$

ou

$$\sin c = \frac{\sin \omega \sin \Omega}{\sin \mathrm{C}}.$$

28. Ainsi nous nous sommes démontrés les formules qui servent à M. Gauss pour déterminer ses six angles auxiliaires. Ses autres formules ne sont que des combinaisons des précédentes. Ainsi

$$\mathrm{B} - \mathrm{C} = \mathrm{E}p\mathrm{Q} - \mathrm{P}p\mathrm{E} = \mathrm{P}p\mathrm{Q}.$$

Or le triangle PpQ donne

$$\cos \mathrm{PQ} = \cos \mathrm{P}p\mathrm{Q} \sin \mathrm{P}p \sin p\mathrm{Q} + \cos \mathrm{P}p \cos p\mathrm{Q}$$
$$0 = \cos \mathrm{P}p\mathrm{Q} \sin c \sin b + \cos c \cos b,$$

et

$$\cos \mathrm{P}p\mathrm{Q} = \cos(\mathrm{B}-\mathrm{C}) = -\frac{\cos b \cos c}{\sin b \sin c} = -\cot b \cot c$$

$$\sin \mathrm{PQ} : \sin \mathrm{P}p\mathrm{Q} :: \sin p\mathrm{Q} : \sin p\mathrm{PQ}$$
$$1 : \sin(\mathrm{B}-\mathrm{C}) :: \sin b : \frac{\sin pq}{\sin \mathrm{P}p} = \frac{\cos a}{\sin c},$$

et

$$\sin(\mathrm{B}-\mathrm{C}) = \frac{\cos a}{\sin b \sin c}$$

$$\cot(\mathrm{B}-\mathrm{C}) = \frac{\cos(\mathrm{B}-\mathrm{C})}{\sin(\mathrm{B}-\mathrm{C})} = -\frac{\cot b \cot c \sin b \sin c}{\cos a} = -\frac{\cos b \cos c}{\cos a}.$$

29. Dans le triangle rectangle Pqp

$$\tang pq = \tang \mathrm{P}p \cos \mathrm{P}pq = \tang c \cos \mathrm{P}pq,$$

et

$$\cos Ppq = \tang pq \cot c = \cot a \cot c$$
$$\cos Pp\gamma = -\cos Ppq = -\cot a \cot c = \cos(Ep\gamma - EpP)$$
$$= \cos(A - C) = \cos(C - A)$$
$$1 : \sin Ppq :: \cos pq : \cos pPq = -\cos pPQ$$
$$\sin Ppq = -\frac{\cos pPQ}{\cos pq} = -\frac{\cos pPQ}{\sin a};$$

mais

$$\cos pPQ = \frac{\cos pQ - \cos PQ \cos Pp}{\sin PQ \sin Pp} = \frac{\cos pQ}{\sin Pp} = \frac{\cos b}{\sin c};$$

donc

$$\sin Ppq = -\frac{\cos b}{\sin a \sin c} = \sin(A - C) \quad \text{et} \quad \sin(C - A) = \frac{\cos b}{\sin a \sin c}.$$

3o. $A = Ep\gamma$; $B = EpQ$; $A - B = Ep\gamma - EpQ = Qp\gamma$; le triangle $Q\gamma p$ donne

$$\cos Qp\gamma = \cos(A - B) = \frac{\cos Q\gamma - \cos pQ \cos p\gamma}{\sin pQ \sin p\gamma}$$
$$= -\cot pQ \cot p\gamma = -\cot b \cot a.$$

Le même triangle donne

$$\sin Q\gamma : \sin Qp\gamma :: \sin p\gamma : \sin pQ\gamma = \cos pQP$$

ou

$$1 : \sin(A - B) :: \sin a : \cos pQP$$

et

$$\sin(A - B) = \frac{\cos pQP}{\sin a}.$$

Le triangle pQP donne

$$\cos pQP = \frac{\cos pP - \cos PQ \cos pQ}{\sin PQ \sin pQ} = \frac{\cos Pp}{\sin pQ} = \frac{\cos c}{\sin b}$$

et

$$\sin(A - B) = \frac{\cos c}{\sin a \sin b}$$
$$\cot(A - B) = \frac{\cos(A - B)}{\sin(A - B)} = -\frac{\cot b \cot a \sin a \sin b}{\cos c} = -\frac{\cos a \cos b}{\cos c}$$
$$\cot(C - A) = \frac{\cos(C - A)}{\sin(C - A)} = -\frac{\cot a \cot c \sin a \sin c}{\cos b} = -\frac{\cos a \cos c}{\cos b}$$
$$\cot(A - B)\cot(B - C) = -\frac{\cos a \cos b}{\cos c} \times -\frac{\cos b \cos c}{\cos a} = \cos^2 b$$
$$\cot(A - B)\cot(C - A) = -\frac{\cos a \cos b}{\cos c} \times -\frac{\cos a \cos c}{\cos b} = \cos^2 a$$
$$\cot(B - C)\cot(C - A) = -\frac{\cos b \cos c}{\cos a} \times -\frac{\cos a \cos c}{\cos b} = \cos^2 c.$$

31. Soit Π le lieu de la planète sur son orbite

$$\Upsilon p\Pi = \Upsilon pP - Ep\Pi = A - (Ep\Omega - \Omega\Pi) = A - (90^\circ - t) = A + t - 90^\circ$$
$$Qp\Pi = A + t - 90^\circ - \Upsilon pQ = A + t - 90^\circ - (A - B) = B + t - 90^\circ$$
$$Pp\Pi = Ep\Pi - EpP = 90^\circ - t - C = 90^\circ - (C + t).$$

M. Gauss en conclut

$$x = r\sin a \sin(A + t)$$
$$y = r\sin b \sin(B + t)$$
$$z = r\sin c \sin(C + t).$$

Soit d'ailleurs Δ la distance de la planète à la terre

$$x - X = \Delta\cos D \cos \mathit{AR}$$
$$y - Y = \Delta\cos D \sin \mathit{AR}$$
$$z - Z = \Delta \sin D$$

$$\frac{\Delta\cos D \sin \mathit{AR}}{\Delta\cos D \cos \mathit{AR}} = \text{tang}\, \mathit{AR} = \frac{y - Y}{x - X}$$
$$\frac{\Delta \sin D}{\Delta\cos D \cos \mathit{AR}} = \frac{\text{tang}\, D}{\cos \mathit{AR}} = \frac{z - Z}{x - X}$$
$$\frac{\Delta \sin D}{\Delta\cos D \sin \mathit{AR}} = \frac{\text{tang}\, D}{\sin \mathit{AR}} = \frac{z - Z}{y - Y};$$

d'où

$$\text{tang}\, \mathit{AR} = \left(\frac{r\sin b \sin(B + t) - R\cos\omega \sin \text{♅}}{r\sin a \sin(A + t) - R\cos \text{♅}}\right)$$
$$\text{tang}\, D = \left(\frac{r\sin c \sin(C + t) - R\sin\omega \sin \text{♅}}{r\sin a \sin(A + t) - R\cos \text{♅}}\right)\cos \mathit{AR}$$
$$= \left(\frac{r\sin c \sin(C + t) - R\sin\omega \sin \text{♅}}{r\sin b \sin(B + t) - R\cos\omega \sin \text{♅}}\right)\sin \mathit{AR}.$$

32. Pour faciliter ces calculs, soit

$$\text{tang}\, F = \text{tang}\, I \cos\Omega$$

et

$$\text{tang}\, E = \frac{\text{tang}\, I}{\cos\Omega}$$

$$\cot B = \frac{-\sin I\, \text{tang}\,\omega + \cos I \cos\Omega}{\sin\Omega} = \frac{-\sin I\,(\text{tang}\,\omega - \cot I \cos\Omega)}{\sin\Omega}$$
$$= -\frac{\sin I\,(\text{tang}\,\omega - \cot E)}{\sin\Omega} = -\frac{(\sin\omega \sin E - \cos\omega \cos E)}{\sin\Omega \cos\omega \sin E}$$
$$= +\frac{\sin I \cos(E + \omega)}{\sin\Omega \cos\omega \sin E} = \frac{\text{tang}\, I \cos I \cos(E + \omega)}{\sin\Omega \cos\omega \sin E} = \frac{\text{tang}\, I \cos I \cos(E + \omega)}{\cos\Omega\, \text{tang}\,\Omega \cos\omega \sin E}$$
$$= \frac{\text{tang}\, E \cos I \cos(E + \omega)}{\text{tang}\,\Omega \cos\omega \sin E} = \frac{\cos I \cos(E + \omega)}{\text{tang}\,\Omega \cos\omega \cos E},$$

$$\cos b = -\cos I(\sin\omega + \text{tang}\, I \cos\Omega \cos\omega) = -\cos I(\sin\omega + \text{tang}\, F \cos\omega)$$

$$= -\frac{\cos I(\sin\omega \cos F + \sin F \cos\omega)}{\cos F} = -\frac{\cos I \sin(F+\omega)}{\cos F}$$

$$= -\frac{\cot I \sin I \sin(F+\omega)}{\cos F} = -\frac{\cos\Omega \cot F \sin I \sin(F+\omega)}{\cos F}$$

$$= -\frac{\sin I \cos\Omega \sin(F+\omega)}{\sin F},$$

$$\cot C = \frac{\sin I \sin(E+\omega)}{\sin\Omega \sin\omega \sin E} = \frac{\cos I \sin(E+\omega)}{\text{tang}\,\Omega \sin\omega \cos E},$$

$$\cos c = \frac{\cos I \cos(F+\omega)}{\cos F} = \frac{\sin I \cos\Omega \cos(F+\omega)}{\sin F}.$$

33. Malgré tous ces artifices de calcul et tous ces arcs subsidiaires, le calcul de Æ et de D n'emploie pas moins de 45 logarithmes, même en ne comptant que pour un seul chacun de ceux qui servent plusieurs fois. L'opération n'est pas la moitié aussi longue par la méthode ordinaire des astronomes, sans compter que la méthode proposée est plus obscure et plus sujette à erreur. Au reste voyez *Monatliche correspondenz*, mai 1804.

34. Nous avons suivi, dans ce qui précède, la marche de l'auteur dont nous voulions nous démontrer les formules; mais il semble qu'on peut arriver au même but d'une manière plus simple et plus naturelle.

Soit (fig. 61) Q♈N l'équateur dont P et P′ sont les pôles.

F♈L l'écliptique dont les pôles sont E et E′.

OI*zu*O′ l'orbite d'une planète dont le nœud ascendant est en I, et l'angle FIO = I l'inclinaison; l'arc ♈I sera la longitude du nœud ascendant = Ω.

Le cercle QPNP′ représentera le plan du cercle de déclinaison qui se confond avec le colure des solstices.

Le diamètre PP′ représentera le plan du cercle de déclinaison qui passe par les points équinoxiaux.

Le diamètre QN représentera le plan de l'équateur.

Soit T le lieu héliocentrique de la terre, R son rayon vecteur, ♈T = ♁ sa longitude héliocentrique.

La distance perpendiculaire de la terre au plan du colure sera

$$R \sin FT = R \cos \gamma T = R \cos ♁ = -R \cos\odot = X$$

ensorte que

$$-X = +R\cos\odot.$$

La distance de la terre au plan PP′ sera

$$R\sin T\Upsilon P\sin\Upsilon T = R\cos\omega\sin\zeta = -R\cos\omega\sin\odot = Y$$

et

$$-Y = +R\cos\omega\sin\odot.$$

La distance de la terre au plan de l'équateur sera

$$R\sin F\Upsilon Q\sin\Upsilon T = R\sin\omega\sin\zeta = -R\sin\omega\sin\odot = Z$$

et

$$-Z = +R\sin\omega\sin\odot.$$

Pour ces trois quantités, on observera la règle des signes de sinus et de cosinus $\odot$.

Dans le premier et le dernier quart de la longitude du soleil X est parallèle au rayon dirigé au point ♎; dans les deux autres, il se dirige parallèlement au rayon mené au point ♈.

Dans la première moitié de la longitude Y est parallèle au rayon, dirigé à 270° d'ascension droite; dans l'autre moitié Y est parallèle au rayon qui a 90° d'ascension droite.

Dans la première moitié de la longitude Z est au sud de l'équateur; Z est au nord dans l'autre moitié.

35. Soit Π la longitude héliocentrique de la planète dans son orbite, r son rayon vecteur, nous aurons de même

$$x = r\sin O\sin O\Pi = r\sin O\sin(OI - I\Pi) = r\sin a\sin(A - t)$$
$$= r\sin a\cos(zI + I\Pi) = r\sin a\cos(A' + t);$$

car l'arc perpendiculaire Υz partage en deux également l'arc OO′ qui est de 180°, ainsi $z\Pi = 90° - O\Pi$,

$$y = r\sin u\sin u\Pi = r\sin b\sin(uI + I\Pi) = r\sin b\sin(B + t)$$
$$z = r\sin y\sin y\Pi = r\sin c\sin(yI + I\Pi) = r\sin c\sin(C + t).$$

Nous faisons, comme on voit,

$$a = FOI,\quad b = Iu\Upsilon,\quad c = QyO,\quad A = OI,$$
$$A' = zI = 90° - A,\quad I\Pi = t,\quad uI = B \quad\text{et}\quad yI = C.$$

On observera de même la règle des signes. x positif sera parallèle au rayon 0° de l'équateur; x négatif se dirigera parallèlement au rayon 180°.

y positif est parallèle au rayon 90°; négatif il est parallèle au rayon 270°.

z positif est au nord de l'équateur; z négatif est au sud.

Or le triangle OIF rectangle en F donne

$$\cos O = \cos a = \sin I \cos FI = \sin I \sin \gamma I = \sin I \sin \Omega = \sin \gamma z;$$

le même triangle donne

$$\tang FI = \tang OI \cos I$$

et

$$\cot OI = \cos I \cot FI = \cos I \tang \gamma I = \cos I \tang \Omega = \tang Iz = \tang A' = \cot A;$$

il donne encore

$$\sin a = \frac{\sin FI}{\sin OI} = \frac{\cos \Omega}{\sin A} = \frac{\cos \Omega}{\cos A'} \quad \text{et} \quad \cos A = \cot I \cot a.$$

Le triangle $u\gamma I$ donne

$$\begin{aligned}\cos b = \cos u &= \cos \gamma I \sin I \sin I\gamma u - \cos I \cos I\gamma u \\ &= \cos \Omega \sin I \sin(\omega + 90°) - \cos I \cos(\omega + 90°) \\ &= \sin I \cos\omega \cos \Omega + \cos I \sin \omega,\end{aligned}$$

$$\sin uI : \sin I\gamma u :: \sin \Omega I : \sin b = \frac{\sin \Omega \cos \omega}{\sin B}$$

ou

$$\frac{\sin b}{\sin B} = \cos \omega \sin \Omega,$$

$$\cot B = \cot uI = \frac{\cos \gamma I \cos I + \sin I \cot(\omega + 90°)}{\sin \gamma I} = \frac{\cos \Omega \cos I - \sin I \tang \omega}{\sin \Omega}.$$

Le triangle $I\gamma y$ donne

$$\cos I y\gamma = - \cos c = \cos \Omega \sin I \sin\omega - \cos I \cos\omega,$$

$$\cos c = \cos I \cos \omega - \sin I \sin \omega \cos \Omega,$$

$$\sin \Omega : \sin c :: \sin C : \sin \omega,$$

$$\sin c \sin C = \sin\omega \sin \Omega,$$

$$\cot C = \cot yI = \frac{\cos \Omega \cos I + \sin I \cot \omega}{\sin \Omega}.$$

Les formules

$$\cos \Omega = \sin a \sin \mathrm{A} = \sin a \cos \mathrm{A}';$$
$$\frac{\sin b}{\sin \mathrm{B}} = \cos \omega \sin \Omega,$$
$$\sin c \sin \mathrm{C} = \sin \omega \sin \Omega$$

ne servent qu'à déterminer le quart où se trouve l'angle ou l'arc subsidiaire quand il y a quelqu'incertitude.

56. Soit maintenant (fig. 62) ♈A♋ le plan de l'équateur, ou un plan parallèle à l'équateur

$$\mathrm{AB} = \mathrm{FD} = \mathrm{HL} = \mathrm{X}, \qquad \mathrm{AC} = \mathrm{FE} = \mathrm{HG} = x,$$
$$\mathrm{AF} = \mathrm{BD} = \mathrm{CE} = \mathrm{Y}, \qquad \mathrm{AH} = \mathrm{BL} = \mathrm{CG} = y,$$
$$\mathrm{BC} = \mathrm{DE} = \mathrm{LG} = x - \mathrm{X}, \qquad \mathrm{EG} = \mathrm{LD} = \mathrm{HF} = y - \mathrm{Y};$$

$$\text{tang}\, \mathit{AR} = \text{tang}\, \mathrm{GDE} = \frac{\mathrm{GE}}{\mathrm{DE}} = \frac{y - \mathrm{Y}}{x - \mathrm{X}} = \frac{r \sin b \sin(\mathrm{B} + t) + \mathrm{R} \cos \omega \sin \odot}{r \sin a \cos(\mathrm{A}' + t) + \mathrm{R} \cos \odot}.$$

Imaginons DG et une droite $\mathrm{GM} = z - \mathrm{Z}$, perpendiculaire au plan ♈AH♋, ensorte que le triangle GDM soit relevé perpendiculairement sur le plan de la figure, GDM sera la déclinaison de la planète vue de la terre.

Or

$$\text{tang}\, \mathrm{GDM} = \text{tang}\, \mathrm{D} = \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{DG}} = \frac{z - \mathrm{Z}}{\mathrm{DE} \text{ séc } \mathrm{GDE}} = \frac{z - \mathrm{Z}}{\mathrm{GE} \text{ séc } \mathrm{DGE}}$$
$$= \frac{(z - \mathrm{Z}) \cos \mathit{AR}}{x - \mathrm{X}} = \frac{(z - \mathrm{Z}) \sin \mathit{AR}}{y - \mathrm{Y}}$$
$$= \left(\frac{r \sin c \sin(\mathrm{C} + t) + \mathrm{R} \sin \omega \sin \odot}{r \sin a \cos(\mathrm{A}' + t) + \mathrm{R} \cos \odot}\right) \cos \mathit{AR} = \left(\frac{r \sin c \sin(\mathrm{C} + t) + \mathrm{R} \sin \omega \sin \odot}{r \sin b \sin(\mathrm{B} + t) + \mathrm{R} \sin \omega \sin \odot}\right) \sin \mathit{AR}$$

$$\mathrm{GD} = \frac{\mathrm{DE}}{\cos \mathit{AR}} = \frac{\mathrm{GE}}{\sin \mathit{AR}} = \frac{x - \mathrm{X}}{\cos \mathit{AR}} = \frac{y - \mathrm{Y}}{\sin \mathit{AR}} = \text{distance réduite à l'équateur},$$
$$\mathrm{DM} = \frac{\mathrm{GD}}{\cos \mathrm{D}} = \frac{x - \mathrm{X}}{\cos \mathit{AR} \cos \mathrm{D}} = \frac{y - \mathrm{Y}}{\sin \mathit{AR} \cos \mathrm{D}} = \text{distance des centres.}$$

Ces formules sont équivalentes à celles de M. Gauss; nous les avons exposées avec détail parce que plusieurs astronomes font un fréquent usage de ces trois coordonnées; si je n'en ai point encore parlé, c'est que j'ai toujours trouvé plus commodes les solutions tirées de l'une et l'autre trigonométrie. Le beau Mémoire de M. Lagrange sur les

éclipses est tout fondé sur cette méthode des coordonnées. (Voyez Ephém. de Berlin, pour 1782.)

37. La trigonométrie va nous fournir, pour la déclinaison et l'ascension droite surtout, des formules qui me semblent préférables.

Nous avons (XVII. 36) $\text{tang}\,\text{Æ} = \cos\omega \,\text{tang}\,G - \frac{\sin\omega\,\text{tang}\,g}{\cos G}$; G et g étant la longitude et la latitude géocentrique. D'où (XXVII.31)

$$\text{tang}\,\text{Æ} = \cos\omega\left(\frac{R\sin\odot + r\cos\lambda\sin\Pi}{R\cos\odot + r\cos\lambda\cos\Pi}\right) - \frac{\sin\omega}{\cos G}\cdot\frac{r\sin\lambda\cos G}{R\cos\odot + r\cos\lambda\cos\Pi}$$
$$= \frac{R\cos\omega\sin\odot + r\cos\lambda\cos\omega\sin\Pi - r\sin\lambda\sin\omega}{R\cos\odot + r\cos\lambda\cos\Pi}$$

expression qui a l'avantage de n'employer que les rayons vecteurs avec les longitudes et latitudes héliocentriques.

38. Nous pouvons transformer autrement et faire

$$\text{tang}\,\text{Æ} = \cos\omega\,\text{tang}\,G - \frac{\sin\omega}{\cos G}\cdot\frac{\text{tang}\,\lambda\sin T}{\sin S}\ldots\ldots \quad (\text{XXVII}.29)$$
$$= \cos\omega\,\text{tang}\,G - \frac{\sin\omega}{\cos G}\cdot\frac{\text{tang}\,\lambda\sin(\odot - G)}{\sin(\Pi - \odot - 180^\circ)}$$
$$= \cos\omega\,\text{tang}\,G + \frac{\sin\omega\,.\,\text{tang}\,\lambda}{\sin(\Pi - \odot)}\left(\frac{\sin\odot\cos G - \cos\odot\sin G}{\cos G}\right)$$
$$= \cos\omega\,\text{tang}\,G - \frac{\sin\omega\,\text{tang}\,\lambda\cos\odot\,\text{tang}\,G}{\sin(\Pi - \odot)} + \frac{\sin\omega\,\text{tang}\,\lambda\sin\odot}{\sin(\Pi - \odot)}$$
$$= \left(\cos\omega - \frac{\sin\omega\,\text{tang}\,\lambda\cos\odot}{\sin(\Pi - \odot)}\right)\text{tang}\,G + \frac{\sin\omega\,\text{tang}\,\lambda\sin\odot}{\sin(\Pi - \odot)}$$
$$= \left(\cos\omega - \frac{\sin\omega\,\text{tang}\,\lambda\cos\odot}{\sin(\Pi - \odot)}\right)\frac{\sin\Pi\sin(\odot + u)}{\cos\odot\sin(\Pi + u)} + \frac{\sin\omega\,\text{tang}\,\lambda\sin\odot}{\sin(\Pi - \odot)};$$

quand on a fait

$$\text{tang}\,u = \left(\frac{r\cos\lambda}{R}\right)\frac{\sin\Pi}{\cos\odot}\ldots\ldots\ldots(\text{XXVII}.31),$$

cette expression est un peu plus commode que la précédente.

39. Pour trouver tang D par la trigonométrie, nous avons (XVII.36)

$$\sin D = \sin g\cos\omega + \cos g\sin\omega\sin G$$
$$\cos D = \frac{\cos G\cos g}{\cos \text{Æ}}$$

d'où

d'où

$$\tang D = \frac{\tang g \cos\omega \cos Æ}{\cos G} + \sin\omega \tang G \cos Æ$$

$$= \sin\omega \cos Æ \tang G + \frac{\cos\omega \cos Æ}{\cos G}\cdot\frac{\tang\lambda \sin(G-\odot)}{\sin(\Pi-\odot)}$$

$$= \sin\omega \cos Æ \tang G + \frac{\cos\omega \cos Æ \tang\lambda}{\sin(\Pi-\odot)}\left(\frac{\sin G\cos\odot - \cos G \sin\odot}{\cos G}\right)$$

$$= \sin\omega\cos Æ \tang G + \frac{\cos\omega\cos Æ \tang\lambda\cos\odot\tang G}{\sin(\Pi-\odot)} - \frac{\cos\omega\cos Æ\tang\lambda\sin\odot}{\sin(\Pi-\odot)}$$

$$= \cos\omega\cos Æ\left(\tang\omega + \frac{\tang\lambda\cos\odot}{\sin(\Pi-\odot)}\right)\tang G - \cos\omega\cos Æ\left(\frac{\tang\lambda\sin\odot}{\sin(\Pi-\odot)}\right)$$

$$= \cos\omega\cos Æ\left(\tang\omega + \frac{\tang\lambda\cos\odot}{\sin(\Pi-\odot)}\right)\frac{\sin\Pi\sin(\odot+u)}{\cos\odot\sin(\Pi+u)}$$
$$- \cos\omega\cos Æ\left(\frac{\tang\lambda\sin\odot}{\sin(\Pi-\odot)}\right)$$

ou

$$\tang D = \cos\omega\cos Æ\left(\tang\omega + \frac{\tang\lambda\sin\odot}{\sin(\Pi-\odot)}\right)\left(\frac{R\sin\odot + r\cos\lambda\sin\Pi}{R\cos\odot + r\cos\lambda\cos\Pi}\right)$$
$$- \cos\omega\cos Æ\left(\frac{\tang\lambda\sin\odot}{\sin(\Pi-\odot)}\right).$$

40. Ces formules sont moins expéditives que la méthode purement trigonométrique; mais si l'on veut des formules générales, je ne vois rien de mieux que celles qui suivent

$$\tang u = \left(\frac{r\cos\lambda}{R}\right)\frac{\sin\Pi}{\cos\odot}; \qquad \tang G = \frac{\sin\Pi}{\cos\odot}\cdot\frac{\sin(\odot+u)}{\sin(\Pi+u)}$$

$$\tang g = \frac{\tang\lambda\sin(G-\odot)}{\sin(\Pi-\odot)}; \qquad \tang Æ = \cos\omega\tang G - \frac{\sin\omega\tang g}{\cos G};$$

$$\cos D = \frac{\cos G\cos g}{\cos Æ};$$

ou

$$\sin D = \sin g\cos\omega + \cos g\sin\omega\sin G,$$

pour le cas, assez fréquent, où $\cos D$ ne promettrait pas assez de précision.

41. Appliquons ces formules à un même exemple, en continuant les

calculs du chapitre XXVII. Soit donc

$I = 3° 23' 30''$, $☊ = 2^s 15° 0' 26''$, $\Pi = 3^s 13° 30' 0''$,
$\lambda = 1° 37' 10''$ B, $\odot = 1^s 25° 0' 0''$, $G = 75° 10' 10''$,
$g = 0° 44' 1''$, $\log R = 0.00651$, $\log r = 9.85750$,
$\log r \cos\lambda = 9.85733$, $\Pi - ☊ = t = 28° 32' 5''$.

Commençons par la méthode qui nous a donné déjà G et g,

tang g.....	8.10740	cos g......	9.99996
C. sin G.....	0.01471	cos G.....	9.40818
tang φ = 0° 45′ 32″	8.12211	cos H = 75° 10′ 14″	9.40814
ω = 23. 28. 0			
cos($\omega + \varphi$) = 24. 13. 32...	9.95996...	sin.............	9.61313
tang H.....	0.57715...	sin.............	9.98529
tang Æ = 73° 48′ 38″...	0.53711	sin D = 23° 22′ 10″	9.59842

Voilà onze logarithmes nouveaux ajoutés aux huit qui ont donné G et g; ce qui fait au total 19 logarithmes pour la solution complète du problème.

42. Cherchons l'ascension droite par la formule (36)

R.............	0.00651	$r\cos\lambda$........	9.85733
cos ω.........	9.96251	cos ω.........	9.96251
sin $\odot$.........	9.91599	sin Π.........	9.98783
+ 0.76738................	9.88501	0.64220......	9.80767
+ 0.64220			
− 0.00811		r......... —	9.85750
+ 1.40147 = numérateur		sin ω.........	9.60012
		sin λ.........	8.45119
		— 0.00811.....	7.90881

R.............	0.00651	$r\cos\lambda$........	9.85733
cos $\odot$.........	9.75313	cos Π...... —	9.36819
+ 0.57496................	9.75964	— 0.16808 —	9.22552
— 0.16808			
+ 0.40688 = dénominateur...........		C. log.........	0.39053
		log numérat.	0.14658
		tang Æ = 73° 48′ 38″...........	0.53711

Ainsi treize logarithmes donnent Æ en fonction du lieu héliocentrique, sans aucun angle auxiliaire; cette formule serait préférable à toutes les autres si nous en avions une semblable pour D; mais isolée elle ne serait guère bonne qu'à substituer dans une expression algébrique dans laquelle tang Æ entrerait comme inconnue.

43. Passons aux formules de l'article 40

$\frac{r \cos \lambda}{R}$	9.85082	C. sin(Π + u)...	0.35980
sin Π....	9.98783	sin(⊙ + u)...	9.98261
C. cos ⊙ ...	0.24687	....	0.23470
tang u = 50° 36′ 19″	0.08552	tang G = 75° 10′ 10″...	0.57711
⊙ = 55.30		⊙ = 55.30	
⊙ + u = 106. 6.19		tang λ...	8.45136
Π = 103.30		sin(G—⊙) = 19° 40′ 10″...	9.52711
Π + u = 154. 6.19		C. sin(Π—⊙) = 48° 0′ 0″...	0.12893
Π — ⊙ = 48. 0. 0		tang g = 0.44. 1 ...	8.10740
		— sin ω = 23.28. 0 —	9.60012
cos ω...	9.96251	C. cos G..........	0.59183
tang G...	0.57711	— 0.01992 —	8.29935
+ 3.46434......	0.53962	cos G...	9.40817
— 0.01992		cos g ...	9.99996
+ 3.44442......	0.53711	C. cos Æ...	0.55469
tang Æ = 73° 48′ 28″		cos D = 23° 22′ 16″	9.96282

Dix logarithmes donnent G et g, dix autres Æ et D; ainsi avec vingt logarithmes on aura le lieu géocentrique, tant par rapport à l'écliptique que par rapport à l'équateur; c'est un logarithme de plus que par la méthode ordinaire, le seul inconvénient c'est que le cosinus de D donne ici une erreur de 6″, parce que nous n'avons employé que des logarithmes à cinq décimales. Il faudrait six logarithmes de plus, c'est-à-dire, vingt-six en tout pour trouver D par son sinus.

44. Cherchons D par sa tangente, formule 38,

	cos ω.... 9.96251	tang λ....	8.45136
	cos Æ.... 9.44531	cos $\odot$....	9.75313
	9.40782	....	9.40782
	tang ω.... 9.63761	C. sin($\Pi - \odot$)....	0.12893
	tang g.... 0.57711		0.57711
+ 0.41931..........	9.62254	+ 0.020814 +	8.31835
+ 0.020814		cot G....	9.42289
− 0.008019		− tang $\odot$ −	0.16287
+ 0.432105.........	9.63559	− 0.008019 −	7.90411
tang D = 23° 22′ 10″			

Cette formule demande 8 logarithmes nouveaux, Æ ci-dessus en demandait 17; la solution complète exige donc la recherche de 25 logarithmes différens. Nous ne comptons que pour un seul chacun de ceux qui reviennent plusieurs fois, mais pour deux, ceux qu'il faut chercher dans la table des nombres et dans celle des sinus ou tangentes.

Nous n'employons que cinq décimales, parce qu'il s'agit moins ici d'obtenir la plus grande précision que de comparer les formules sous le rapport de la brièveté et de la facilité; au reste nos deux solutions s'accordent ici à la seconde.

45. Passons enfin à la méthode de M. Gauss avec les formules que nous avons substituées aux siennes, et remarquons en passant que nos quantités subsidiaires a, b, c sont des angles, au lieu qu'elles sont des arcs dans les formules de M. Gauss; que nos arcs A, B, C remplacent des angles de même nom; ce qui ne fait rien ni à la précision ni à la brièveté. Dans nos formules a, b, c sont les trois inclinaisons de l'orbite planétaire sur l'équateur et les deux cercles de déclinaison; nos arcs A, B, C sont les distances du nœud de la planète aux trois intersections. Chez M. Gauss a, b, c sont des distances polaires, A, B, C sont des angles au pôle.

	sin I....	8.77204		cos I....	9.99924
	sin ☊...	9.98496		tang ☊...	0.57217
cos a =	86° 43′ 26″	8.75700	cot A =	15° 1′ 14″	0.57141
A′ =	74.58.46 = 90° − A		t =	28.32. 5	
t =	28.32. 5		A − t = −	13.30.51	
A′ + t =	103.30.51				

cos I...	9.99924	sin I...	8.77204
sin ω...	9.60012	cos ω...	9.96251
0.39752......	9.59936	cos ☊...	9.41279
0.01404......................		— 0.01404...	8.14734
0.41156......	9.61443 cos b =	65° 41′ 50″	
cos I...	9.99924	— sin I —	8.77204
cos ω...	9.96251	sin ω...	9.60012
+ 0.91569	9.96175	cos ☊...	9.41279
— 0.00609......................		— 0.00609 —	7.78495
+ 0.90960	9.95885 = cos c =	24° 33′ 0″	
C. sin ☊...	0.01504......................		0.01504
cos ☊...	9.41279	tang α...	9.63761
cos I...	9.99924	— sin I —	8.77204
+ 0.26734 (m)	9.42707	— 0.02659 —	8.42469
— 0.02659			
+ 0.24075	9.38160 = cot B =	76° 27′ 46″	
	t =	28.32. 5	
	B + t =	104.59.51	
Ci-dessus (m)			
+ 0.26734		+ sin I cot ω...	9.13443
+ 0.14108		C. sin ☊...	0.01504
+ 0.40842	= cot C = 67° 46′ 34″	+	9.14947
	t = 28.32. 5		
	C + t = 96.18.39		

Ces calculs préliminaires exigent la recherche de 26 logarithmes, c'est-à-dire un de plus déjà que la plus longue de nos méthodes pour trouver G, g, Æ et D; il est donc décidé par là que la nouvelle méthode ne peut servir aux calculs ordinaires; elle ne pourrait être admissible que dans le cas où l'on aurait d'avance mis en tables les six quantités auxiliaires log sin a, log sin b, log sin c, et les arcs A, B, C; alors les 26 log se borneraient à 6 logarithmes ou l'équivalent. Le mal est que les six quantités varient sans cesse et qu'aux tables qui les donneraient calculées, il faut ajouter des colonnes de leurs variations.

46. Calculons maintenant les formules qu'on ne peut mettre en tables.

r......	9.85750	r......	9.85750
$\sin a$......	9.99936	$\sin b$......	9.95970
$\cos(A'+t)$ —	9.36863	$\sin(B+t)$......	9.98494
$x = -0.16807$	9.22549	$y = 0.63407$	9.80214

r......	9.85750	R......	0.00651
$\sin c$......	9.61856	$\cos \odot$......	9.75313
$\sin(C+t)$......	9.99736	$-X = +0.57496$	9.75964
$z = 0.297475$	9.47342	$x = -0.16807$	
		$x - X = +0.40689$	

R......	0.00651	R......	0.00651
$\cos \omega$......	9.96251	$\sin \omega$......	9.60012
$\sin \odot$......	9.91599	$\sin \odot$......	9.91599
$-Y = +0.76738$	9.88501	$-Z = +0.33313$	9.52262
$y = +0.63407$		$z = +0.297475$	
$y - Y = 1.40145$		$z - Z = +0.630605$	

$\log(y-Y)$......	0.14657	$\log(z-Z)$......	9.79976
C. $\log(x-X)$......	0.39052	....	0.39052
tang Æ = 73° 48′ 35″	0.53709	cos Æ......	9.44533
ci-dessus = 73.48.38		tang D = 23° 22′ 12″	9.63561
		ci-dessus 23.22.10	
différences — 3	....	+ 2	

$\log(z-Z)$......	9.79976
C. $(y-Y)$......	9.85343
sin Æ......	9.98242
tang D = 23° 22′ 12″	9.63561

47. Les légères différences que nous remarquons entre ces derniers résultats et les précédens sont celles dont on ne peut répondre dans des calculs aussi longs avec des logarithmes à cinq décimales; mais la dernière méthode étant d'une longueur double, l'incertitude est par là même à peu près double.

Il résulte de cet examen impartial, que même en supposant des tables des six quantités subsidiaires, le calcul est encore plus long que celui de la méthode trigonométrique et tout aussi long que celui de nos formules, et qu'avec tout cela il ne donne que l'ascension droite et la déclinaison, au lieu que nos méthodes donnent en même tems la longitude et la latitude géocentriques, ce qui est un avantage décisif. Nous n'avons pas même parlé des formules de vérification, nécessaires quelquefois pour savoir dans quel quart doivent être placés les arcs A, B et C. Ainsi la formule $\cos \Omega = \sin a \sin A$ nous prouve qu'ici le produit $\sin a \sin A$ doit être positif comme $\cos \Omega = \cos 75° 0' 26''$; il est donc évident que $\sin A$ doit être de même signe que $\sin a$, ce qui a lieu véritablement. La formule $\cos \omega \sin \Omega = \frac{\sin b}{\sin B}$ montre que $\sin b$ et $\sin B$ sont de même signe; la formule $\sin \omega \sin \Omega = \sin c \sin C$ prouve que $\sin c$ et $\sin C$ sont de même signe. Il n'est pas même besoin de calculer ces formules; mais c'est toujours une attention qui complique la méthode, et qui n'est pas nécessaire avec nos formules.

On peut varier de bien des manières le calcul des quantités a, b, c, A, B, C; M. Gauss en a donné d'autres dans sa Théorie des mouvemens des planètes, mais j'ai préféré les plus connues, qui d'ailleurs me paraissent aussi les plus simples.

48. Dans notre formule 56 nous avion

pour numérateur............. 1.40149
nous trouvons $y - Y$........ 1.40145
nous avions pour dénominateur 0.40688
ici $x - X$........ 0.40689

nous faisions

$$\tang Æ = \frac{R \cos \omega \sin \odot + r \cos \lambda \cos \omega \sin \Pi - r \sin \lambda \sin \omega}{R \cos \odot + r \cos \lambda \cos \Pi},$$

ici
$$\tang Æ = \frac{R \cos \omega \sin \odot + r \sin b \sin (B + t)}{R \cos \odot + r \sin a \cos (A' + t)};$$

nous avons les quantités communes $R \cos \odot$, $R \cos \omega \sin \odot$.

49. Dans toutes ces méthodes il reste à chercher la distance de la planète à la terre, ou

$$\Delta = \frac{x - X}{\cos Æ \cos D} = \frac{y - Y}{\sin Æ \cos D} = \frac{r \cos \lambda \sin (\Pi - \odot)}{\sin (G - \odot) \cos D};$$

ce qui ajoute deux logarithmes aux dix-neuf de la méthode ordinaire, deux aux vingt-six de la méthode de M. Gauss et deux aux vingt-cinq des articles 43 et 44.

50. J'avais été bien tenté de supprimer toute cette fin de chapitre à partir de l'article 24, mais j'ai laissé subsister cette discussion sur un point très-usuel d'Astronomie pratique, parce qu'il entre dans mon plan d'indiquer toujours les méthodes les plus sûres et les plus expéditives. Si la briéveté est toujours un mérite, c'est surtout dans ces méthodes dont on fait un usage continuel. C'était une bonne idée que celle de ramener un problème aussi usuel à dépendre de constantes susceptibles d'être mises en tables qu'on aurait ajoutées aux tables ordinaires des planètes; mais malheureusement la chose était impossible; les constantes prétendues sont des variables, et il en sera probablement de cette tentative comme de celles qu'on a faites en tout tems pour calculer des tables de la parallaxe annuelle (XXVII.33).

51. Voici une dernière objection contre la méthode proposée. Le calcul qui change l'ascension droite et la déclinaison observée en longitude et latitude géocentrique se faisant sur des données sûres, n'a jamais lieu qu'une seule fois pour une même observation, au lieu que la transformation d'un lieu héliocentrique en ascension droite et déclinaison géocentrique, doit se répéter à chaque fois que l'on fait varier les élémens de la planète ou de la comète. Le désavantage de la méthode croît donc en raison composée du nombre des observations et de celui des changemens successifs que subissent les élémens approximatifs.

Enfin, nous donnerons au chapitre des comètes une méthode qui rend tout à fait inutile la considération du lieu géocentrique, quand une fois pour toutes on en a déduit la longitude et la latitude héliocentriques.

CHAP.

CHAPITRE XXXII.

Déplacement de l'écliptique et mouvemens divers des étoiles.

1. POUR terminer ce qui concerne les étoiles et leurs variations soit apparentes, soit réelles, nous traiterons sommairement des changemens de longitude et de latitude qui proviennent du déplacement de l'écliptique, de la diminutiou d'obliquité, ou enfin des mouvemens propres qu'on a crn remarquer dans quelques étoiles. De toutes ces variations, il n'y a guères que la diminution de l'obliquité que les observations aient manifestée d'une manière incontestable. Pour tout le reste, les observations sont pen concluantes, ou bien les résultats qu'on en déduit peuvent être produits par plusieurs causes auxquelles il est fort difficile d'attribuer bien exactement ce qui leur appartient; mais la même analyse qui explique la diminution d'obliquité, conduit à des conséquences qui y sont intimement liées, et qu'on ne peut s'empêcher d'admettre. Il nous est impossible d'exposer ici les fondemens de cette théorie qui d'aillenrs présente quelques incertitudes, lesquelles tiennent à l'ignorance où nous sommes encore sur la masse de quelqnes planètes.

2. Ptolémée nous dit que de son tems la distance des tropiques surpassait 47° 40', et n'était pas de 47° 45'. Supposons par un milieu 47° 42' 30", l'obliquité sera de 23° 51' 15". Lalande donne à ce passage une interprétation différente, et qui ne nous paraît pas juste. Il traduit 47°, deux tiers d'une portion majeure plus trois quarts d'une portion mineure, c'est-à-dire 47° 40' 45"; d'où il conclut l'obliquité de 23° 50' 22",5, ce qui est contraire an texte et aux tables de Ptolémée qui suppose partout 23° 51' 20". D'ailleurs Ptolémée ajoute qu'il se trouve en cela d'accord avec Hipparque et Ératosthène, snivant lequel la distance des tropiques était de $\frac{1}{83}$ de la circonférence, ou 47° 42' 40". Il est à croire qu'Ératosthène ayant mesuré les deux ombres solsticiales d'un

gnomon, en aura conclu la double obliquité qu'il aura exprimée par une fraction réduite à ses moindres termes. Il est pourtant assez bizarre qu'Ératosthène ait employé ce moyen, au lieu de nous donner simplement l'arc en degrés, minutes et secondes, comme il l'eût fait sans doute, s'il eût observé les deux déclinaisons solsticiales aux armilles, ou avec un cercle quelconque. Il est fâcheux surtout que Ptolémée ne nous ait transmis aucun détail sur cette observation fondamentale. Il nous a décrit le quart de cercle avec lequel il a observé lui-même, mais il a omis de nous en donner le rayon, ce qui nous empêche d'estimer le degré de précision qu'il a pu obtenir. Nous savons seulement que son quart de cercle ne pouvait lui donner les minutes, qu'il devait donner au plus les sixièmes de degré, puisqu'il a toujours trouvé sa distance entre 4 et 4 $\frac{1}{2}$ de ces sixièmes par-delà 47°. La différence des réfractions et des parallaxes de l'hiver à l'été a dû diminuer son obliquité de 40″ environ ; ainsi, en supposant ses observations exactes, son obliquité serait de 23° 52′ : or en 1800 elle n'était pas tout-à-fait de 23° 28′. Nous aurions donc 24′ de diminution en moins de 17 siècles, ce qui ferait 84″,6 environ par siècle, quantité beaucoup trop forte ; car, suivant nos tables, l'obliquité au tems de Ptolémée, ne devait être guères que de 23° 42′. Ptolémée s'y serait donc trompé de 10′, ce qui n'est que trop possible.

Ptolémée put cependant prendre quelque confiance en son observation, en la voyant si bien d'accord avec celles d'Ératosthène ; mais cette raison même prouve la grossiéreté de ces anciennes observations, car, entre Ératosthène et Ptolémée, il s'était écoulé plus de 300 ans, l'obliquité avait diminué d'environ 3′. Supposons donc ses observations comme non-avenues, et donnons son obliquité à Ératosthène, la diminution de 24′ sera celle de 20 siècles au moins, beaucoup trop forte encore. L'obliquité d'Ératosthène était donc trop grande de 7′ environ.

5. Vers le tems d'Hipparque, c'est-à-dire vers l'an 106 avant notre ère, les Chinois, au rapport du P. Gaubil, donnaient comme un principe connu, que la plus grande déclinaison du soleil était de 24° chinois, c'est-à-dire 23° 39′ 18″ 7‴ 12ⁱᵛ. Le même auteur (tome II, p. 114) ajoute que cette connaissance ne saurait venir que d'une suite d'observations plus anciennes et *même d'assez bonnes observations*. Cependant il dit encore qu'avant Cochéou-King, c'est-à-dire l'an 1278, les Chinois n'avaient aucune idée de la Trigonométrie sphérique ; on croyait géné-

ralement que le rapport de la circonférence au diamètre était celui de 3 à 1, et l'on ne savait résoudre que les triangles rectilignes rectangles.

Cette obliquité, en la supposant exacte, donnerait 11′ de diminution en 19 siècles, ce qui ne ferait pas 35″ en cent ans; cette quantité est beaucoup trop faible. L'obliquité, à cette époque, devait différer très-peu de 23° 44′.

Mais, par des observations de l'an 1100 avant notre ère, envoyées en France par le même P. Gaubil, et publiées dans la Connaissance des Tems de l'an 1809, Tchéou-Kong avait déterminé les ombres solsticiales d'un gnomon de 8 pieds. M. Laplace, qui les a calculées dans la Connaissance des Tems de 1811, en a conclu une obliquité de 23° 54′ 2″. Elle devait être alors de 23° 52′ suivant nos tables; la différence n'est que de 2′, et cet accord est très-remarquable. Le peu de connaissances mathématiques des astronomes chinois n'empêche pas ces observations d'être extrêmement précieuses, si on peut compter sur leur authenticité, car elles nous ont été transmises avec assez de détail pour être calculées rigoureusement. L'ombre d'été était, nous dit-on, de $1^{pi},5$, celle d'hiver était de 13 pieds; mais on nous avertit qu'elle est bien moins certaine. Remarquons que la dernière n'est donnée qu'en nombre rond de pieds et sans fraction, et que la première n'est exprimée qu'en dixièmes de pied. Gaubil nous apprend que Cochéou-King avait égard aux bords inférieur et supérieur du soleil; mais il avait, dit-on, un tube à deux fils. On ne nous a pas dit comment Tchéou-Kong mesura ses ombres; il était difficile qu'avec un gnomon qui n'avait que 8 pieds, il distinguât les ombres des deux bords.

4. La longueur de la pénombre a pour expression

$$p = \frac{2G \operatorname{tang} \frac{1}{2}\odot \operatorname{séc}^2 N}{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\odot \operatorname{tang}^2 N} = \frac{2G \operatorname{tang} \frac{1}{2}\odot}{\cos^2 N} + \frac{2G \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2}\odot \operatorname{tang}^2 N}{\cos^2 N} + \frac{2G \operatorname{tang}^5 \frac{1}{2}\odot \operatorname{tang}^4 N}{\cos^2 N};$$

G est la hauteur du gnomon, $\frac{1}{2}\odot$ le demi-diamètre du soleil, N la distance au zénit. Ainsi, dans l'observation d'hiver, p était $0^{pi},2751$, à celle d'été, p était $0^{pi},076$; mais il s'en faut de beaucoup que la pénombre sensible ait autant d'étendue. Observez l'ombre d'un mur dont l'arête soit bien vive, en la recevant sur un plan à 13 pieds de dis-

tance, la pénombre devrait être de 3 pouces 4 lignes; à peine trouverez-vous quelques lignes d'incertitude sur la limite de l'ombre pure : la pénombre qui l'avoisine à peu de distance paraît d'une lumière presque aussi vive que les parties qui sont certainement hors de la pénombre. L'incertitude est moindre encore au solstice d'été, quand la pénombre calculée n'est guères que de 6 lignes : ce n'est donc pas l'incertitude inévitable de l'observation qui peut nous inspirer quelque défiance sur l'obliquité de Tchéou-Kong. Supposons en effet que dans ces deux ombres données en pieds ou dixièmes tout au plus, on se soit trompé d'un centième de pied; l'erreur de la distance zénitale d'hiver sera de 1′ 12″ environ; en été, l'erreur sera de 3 ou 4′. L'erreur sur la double obliquité ne sera pas de 6′, elle sera tout au plus de 3 sur l'obliquité simple.

5. Mais dans la Connaissance des Tems de 1809, on trouve une autre observation qui peut éveiller nos soupçons; le gnomon était encore de 8 pieds, l'ombre d'hiver était de 13pi,14, celle d'été de 1pi,54. Ces observations calculées exactement donnent, pour l'an 50 avant notre ère, l'obliquité 23° 52′, et pour la hauteur du pôle 34° 30′ 8″; le lieu paraît de 17′ plus austral que l'observatoire de Tchéou-Kong. Les ombres étaient presque identiques; elles paraissent même mesurées avec plus de soin, car elles sont exprimées en centièmes de pied; la diminution est de 24′ en 18 siècles et demi, ou de 48′ en 37 siècles, ce qui fait plus de 0″,77 par an : l'erreur de l'observation était donc d'environ 9′. Mais quelle raison pouvons-nous alléguer pour accorder plus de confiance à l'observation de l'an 1100 qu'à celle de l'an 50, si ce n'est qu'elle s'accorde mieux avec nos hypothèses? La dernière paraîtrait offrir plus de précision, dans la première, l'ombre d'hiver est donnée comme moins certaine. Ce qu'on peut dire de mieux, c'est qu'elle est en quelque manière appuyée par l'observation d'Ératosthène : de la réunion des deux, il résulte au moins que dans ces tems reculés, l'obliquité surpassait 23° 50′, et que depuis elle a considérablement diminué. Quant à la quantité de cette diminution, nous la prendrons dans les observations modernes combinées avec la théorie qui, comme nos observations, a bien aussi ses incertitudes; mais ces incertitudes sont du moins renfermées dans des limites assez resserrées qui deviendront de jour en jour plus étroites.

6. Si la mesure de l'ombre d'un gnomon de huit pieds n'était pas

sujette à de plus grandes erreurs, d'où vient donc qu'à 1050 ans de distance, on retrouve en Chine les mêmes ombres à fort peu près ; serait-ce la faute du plan? Mais un degré d'inclinaison produirait à peine deux millièmes de pied sur l'ombre d'hiver, deux degrés n'en produiraient que huit. Les Chinois, croyant l'écliptique immobile aussi bien que Ptolémée, auraient-ils reproduit une ancienne observation comme nouvelle, à peu près comme Ptolémée pourrait avoir vérifié grossièrement l'observation d'Ératosthène, afin de pouvoir dire qu'il avait trouvé cette obliquité qui était établie depuis long-tems? Dans ce cas, l'observation de Tchéon-Kong serait la véritable, ainsi que celle d'Eratosthène, et l'erreur serait peu considérable. Ne se pourrait-il pas aussi que les Chinois, pour se donner l'apparence d'un peuple civilisé dès long-tems, eussent attribué à Tchéon-Kong une observation plus moderne? En ce cas, cette observation serait mauvaise; mais pour la déclarer telle, nous n'aurions d'autre motif que son peu d'accord avec les connaissances actuelles. De toute manière, il résulte, ce me semble, que ces anciennes observations ne prouvent rien. Les Chinois, d'après leur aveu même, ne connaissaient pas le rapport du diamètre à la circonférence; ils ne savaient résoudre que des triangles rectangles, et même avec ce rapport inexact, comment pouvaient-ils calculer les angles? Aussi voyons-nous qu'avec des ombres qui répondent à une obliquité de 23° 53′ ou 54′, ils avaient cependant trouvé 23° 39′ ou 24° chinois. Ce nombre rond de degrés n'était-il pas la preuve que leurs calculs étaient grossiers? Les Grecs au moins étaient assez géomètres pour ne commettre aucune erreur dans les calculs. Qui sait si les Chinois ne se sont pas contentés d'une opération graphique, et si, après avoir mesuré les ombres NO et NM du gnomon GN (fig. 63), ils ne se sont pas contentés de tracer sur une figure semblable l'arc OA de la double obliquité.

7. Pappus, livre VI, théorème XXXV, dit que le diamètre de la sphère est *en puissance* à celui du tropique, comme 629 : 529, d'où je tire $\cos\omega = \left(\frac{529}{629}\right)^{\frac{1}{2}} = 23° 29' 50''$. Pappus, qui vivait deux cents ans après Ptolémée, ne supposait donc qu'une obliquité de 23° 30′ environ; il regardait donc comme non-avenues ou comme inexactes, les observations d'Ératosthène et de Ptolémée. Pappus, qui a commenté l'Almageste, ne pouvait ignorer cette ancienne détermination. Riccioli en conclut que Pappus rejetait la mesure d'Ératosthène que Ptolémée

avait adoptée avec trop de timidité; mais c'est aller trop loin. Pappus n'a nullement en vue de nous donner une détermination bien juste de l'obliquité; pour prouver une proposition sur la vitesse du mouvement du soleil, il n'a besoin que d'un aperçu grossier de la grandeur du tropique. C'est ainsi qu'Archimède, dans son Arénaire, pour établir son Calcul, suppose au rayon de la sphère des fixes une grandeur qu'il n'a pas prétendu donner comme exacte à beaucoup près. Le témoignage de Pappus n'a donc pas ici plus de poids que n'en aurait celui d'Archimède dans la question de la parallaxe des étoiles.

Lalande rejette sur le traducteur Commandin l'erreur de Pappus; mais, à moins de supposer une faute de copie ou d'impression, je ne vois pas ce qu'on peut objecter à l'interprétation et au commentaire de Commandin, qui n'est qu'un calcul. Mais lisez 526 au lieu de 529, et vous aurez $\omega = 23° 52'$, ce qui supposera dans le grec φκς au lieu de φκθ.

8. Albategnius observa les distances solsticiales avec un grand soin, au moyen d'une *très-longue alidade et du côté droit décrit dans l'Almageste*, c'est-à-dire sans doute avec les règles parallactiques de Ptolémée; il trouva de cette manière :

dans l'hiver de 880........	59° 36′		
dans l'été..............	12.26		
double obliquité	47.10	obliquité...	23° 35′
double latitude............	72. 2	latitude....	36. 1.

Lalande ajoute 40″ pour la réfraction et la parallaxe. Albategnius dit que la latitude était de 36°; il néglige la minute. (*De Scient. stellar.* C. 4.)

Almamoun, 60 ans plus tôt, avait trouvé 23° 33′; d'autres disent 23° 35′. La diminution serait de 7′ en 920 ans, ou de 46″ par siècle.

9.	Cochéou-King, en	1278, trouvait....	23° 32′ 12″.
	Waltherus,..........	1490, ...	23.39.47.
	Tycho,..............	1587, ...	23.31.30.
	Hevelius,............	1660, ...	23.29.30.
	Richer, à Cayenne, en	1672, ...	23.28.54.
	Flamstéed, en 1689 et	1690, ...	23.28.56.
	Ou, suivant Lalande......................		23.28.48.
	La Hire, dans ses tables................		23.29. 0.
	Roemer,............	1706, ...	23.28.47.
	Louville,...........	1716, ...	23.28.31.

10. En 1750, Bradley, La Caille et le Gentil trouvèrent 23° 28′ 19″. Mayer, 6 ans après, trouvait 3″ de moins, ce qui s'accorde parfaitement, en supposant 0″,5 de diminution annuelle. MM. Maskelyne, Piazzi et moi, nous avons trouvé 23° 27′ 57″ pour 1800, ce qui ne fait que 22″ pour 50 ans et 44″ pour un siècle; c'était aussi le résultat de toutes les recherches de La Caille, et celui qu'il avait adopté dans ses tables. J'ai repris et calculé de nouveau toutes les observations de La Caille, et surtout celles qu'il avait faites au Cap de Bonne-Espérance et à l'Isle-de-France, à de plus grandes hauteurs qu'à Paris, et jamais je n'ai pu trouver plus de 46 à 48″ de mouvement séculaire. M. Laplace trouve 52″ par sa théorie. J'avouerai qu'il pourrait se trouver une erreur de 2″ dans les observations que j'ai comparées, et qu'il n'est pas impossible qu'il faille porter à 50″ la diminution séculaire; mais je ne pense pas que la théorie soit plus exempte d'une pareille erreur, du moins pour le présent; ainsi l'on pourrait s'en tenir au résultat moyen de 50″.

11. Quelques astronomes ont voulu pendant un tems nier toute diminution : forcés d'en adopter une, ils la faisaient beaucoup moindre. Lalande, après l'avoir fait beaucoup plus forte, a cru long-tems qu'elle n'était que de 33″; il a fini par supposer 50″, et nous ne sommes guères plus avancés aujourd'hui.

12. Il est donc constaté par les observations, que l'angle de l'écliptique avec l'équateur a diminué progressivement depuis 2 ou 3000 ans, à raison d'environ 50″ par siècle : mais est-ce l'écliptique qui s'est rapprochée de l'équateur, ou l'équateur qui a remonté vers l'écliptique?

Tycho est le premier qui se soit proposé cette question qu'il décidait par les latitudes des étoiles voisines des soltices. Képler voulut prouver que la rotation du soleil dérangeait l'écliptique. Lalande, à l'exemple de Tycho, prouva que dans les Gémeaux toutes les latitudes boréales ont augmenté, tandis que les latitudes australes sont diminuées. (Mém. Académ. 1758.)

13. Ce mouvement de l'écliptique doit en effet produire des variations dans les latitudes et même dans les longitudes des étoiles. Soit (fig. 64) AQ l'équateur immobile, E une étoile pareillement immobile, ACD l'écliptique dans sa première position; si elle change et devient AFd, ensorte le petit angle DA$d = d\omega = 50''$ par siècle; la déclinaison EB demeurera invariable, ainsi que l'ascension droite AB, mais la latitude EC de-

viendra EF ; elle augmentera sensiblement de $Cf = d\omega \sin AC = d\omega \sin L$.

La longitude diminuera de Ff, or

$$\tang eC = \tang E \sin EC, \quad \tang Ff = \tang E \sin EF,$$

$$\sin EC : \sin EF :: \tang eC : \tang Ff = \frac{\tang eC \sin EF}{\sin EC} = \frac{\tang eC \sin(\lambda + d\lambda)}{\sin \lambda},$$

$$\tang eC = \tang Ee \cos e = \frac{\tang EC}{\cos E} . \cot e \sin e = \frac{\tang \lambda}{\cos E} \cos Ae \tang d\omega \sin e$$

$$= \frac{\tang \lambda}{\cos E} \cos(AC - eC) \tang d\omega \frac{\sin Ae}{\sin AF}$$

$$= \tang d\omega \cos(L - dL) \frac{\tang \lambda}{\cos E} \frac{\sin(L - dL)}{\sin L},$$

et $$\tang Ff = d\omega \cos(L - dL) \frac{\sin(\lambda + d\lambda)}{\cos \lambda} . \frac{\sin(L - dL)}{\sin L \cos E},$$

ou $$dL = d\omega \cos L \tang \lambda, \text{ sans erreur sensible.}$$

Ainsi, quand nous aurons déterminé les longitudes et les latitudes des étoiles à une époque, par les ascensions droites, les déclinaisons observées et l'obliquité qui avait lieu, la longitude L, abstraction faite de la précession, deviendra $L - d\omega \cos L \tang \lambda$, et la latitude $\lambda + d\omega \sin L$; on aura égard aux signes algébriques de λ, $\tang \lambda$, $\sin L$ et $\cos L$; $d\omega$ est pris positivement pour un tems à venir. Ces conséquences sont mathématiques et indépendantes de toute hypothèse, sur la cause physique de la diminution $d\omega$ dans l'intervalle; on fera $d\omega = 50''t$, t étant le nombre des siècles écoulés depuis l'observation.

14. Cette diminution devait attirer l'attention des géomètres. Euler en trouva la cause dans l'attraction des planètes qui, se mouvant dans des orbites inclinées à l'écliptique, dérangent continuellement la terre de l'orbite qu'elle aurait parcourue, si elle eût été abandonnée à elle-même. Il prouva que l'action mutuelle des planètes devait produire des mouvemens rétrogrades dans les nœuds et des changemens dans les inclinaisons des orbites. Il exprima ces variations en fonctions des inclinaisons et des nœuds. Maskelyne adopta les tables d'Euler, et les fit imprimer dans le discours préliminaire de ses observations.

M. Lagrange traita toute cette théorie d'une manière plus rigoureuse. Soit $d\omega$ la diminution de l'obliquité, dE le mouvement des points équinoxiaux, les formules de M. Lagrange seront :

$$d\lambda = + dE \cos L \tang \omega + d\omega \sin L,$$
$$dL = - dE(1 - \tang \omega \sin L \tang \lambda) - d\omega \cos L \tang \lambda;$$

on

on reconnaît dans les derniers termes de ces formules les équations que nous avons ci-dessus tirées du changement d'obliquité.

Quant à dE et $d\omega$, les valeurs analytiques en sont composées d'autant de fois deux termes qu'il y a de planètes qui troublent les mouvemens de la terre.

15. M. Laplace, considérant que l'incertitude qui reste sur les masses de plusieurs planètes, et en particulier sur celle de Vénus dont les effets doivent être les plus sensibles, ne permettait pas pour le présent une exactitude rigoureuse, s'attacha à rendre les formules plus commodes, en calculant pour deux époques éloignées les valeurs de $d\omega$ et dE; et supposant que ces quantités recevaient dans l'intervalle des accroissemens proportionnels au tems, il fit

$$d\lambda = 52''\sin L - 8'',0333 \cos L,$$
$$dL = 52''\cos L - 8'',0333 \sin L.$$

En général, soit une formule $a\sin L + b\cos L$, on peut écrire

$$a\left(\sin L + \frac{b}{a}\cos L\right) = a(\sin L + \tang \varphi \cos L)$$
$$= \frac{a}{\cos\varphi}(\sin L \cos\varphi + \cos L \sin\varphi) = \left(\frac{a}{\cos\varphi}\right)\sin(L+\varphi).$$

Ainsi la formule se réduit à un seul terme; mais, à moins que φ se trouve par hasard d'un nombre juste de degrés, ce qui est presque impossible, j'aime mieux construire la table sur la formule binome. On peut voir ces tables dans l'ouvrage de M. de Zach, intitulé : *Tabulæ speciales aberrationis*, etc. *Gothæ*, 1806, tome I, p. 25 et suivantes.

16. Il résulte de la même théorie une équation de 0",185055 par an pour les longitudes, et une de 0",20174 pour les ascensions droites. C'est ainsi que la rétrogradation des points équinoxiaux produit la précession en longitude 50",1 environ, et la précession 46", commune à toutes les ascensions droites. Cette quantité de 0",185 doit s'ajouter à la précession observée 50",1 pour avoir la précession lunisolaire 50",285, qui aurait lieu sans les perturbations planétaires; de même, l'équation 0",202 doit s'ajouter à la précession 46" sur l'équateur, pour avoir la précession qui s'observerait si les planètes n'existaient pas.

Il n'y a point d'équation analogue pour les déclinaisons, comme il n'y en a pas pour les latitudes dans la théorie de la précession.

17. Il résulte de là que si l'on a tiré des observations un changement annuel de 20″,04 en déclinaison, d'où l'on conclut la précession en longitude $\frac{20'' 04}{\sin \omega}$ et la précession sur l'équateur 20″,04 cot ω; la précession

lunisolaire sera........	50″324 et	46″162
dont il faudra ôter....	185	202
Précession totale	50.139...	45.960.

Cette précession totale est celle qui affectera les longitudes et les ascensions droites, et la dernière, ou 45″,96, sera la seule qu'on puisse observer par la comparaison des points équinoxiaux à deux époques éloignées, suivant le procédé que nous avons indiqué (XVI.456). De là vient la différence entre la précession trouvée par les déclinaisons et celle qu'on trouve par les ascensions droites. Cette différence est assez faible pour que nous ayons pu la négliger quand nous en ignorions la cause.

18. Il résulte encore de la même théorie que la longueur de l'année moyenne doit varier comme celle de $d\omega$ qui, suivant M. Laplace, est 52″ en 1800, et qui ne serait que 47″, 800 ans avant notre ère. L'accroissement de l'an tropique, à partir de 1750, sera

$$-0^j{,}000086354\,(1-\cos 12'',62525t)-0^j{,}000442198\sin(32'',115755t).$$

(*Mécan. Céleste*, tome III, p. 157.)

19. Pour calculer la précession annuelle, M. Laplace a donné sans démonstration les formules suivantes. (*Mécan. Céleste*, tome II, p. 350.)

$$d\text{Æ} = dL\cos\omega - 0'',20168 + dL\sin\omega\sin\text{Æ}\,\text{tang}\,D - d\omega\cos A\,\text{tang}\,D,$$
$$dD = dL\sin\omega\cos\text{Æ} + d\omega\sin A.$$

En comparant ces formules à celles que nous avons données (XVI.93), on voit qu'elles ne sont qu'approximatives, et ne sont bonnes que pour un intervalle très-court; elles ne sont que les différentielles ou différences infinitésimales de l'ascension droite et de la déclinaison. En effet, la formule

$$\text{tang}\,\text{Æ} = \cos\omega\,\text{cotang}\,L - \frac{\sin\omega\,\text{tang}\,\lambda}{\cos L}$$

donne

$$\frac{d\text{Æ}}{dL} = (\cos\omega\cos^2\text{Æ} - \sin\omega\,\text{tang}\,\lambda\cos L\cos^2\text{Æ})(1+\text{tang}^2 L);$$

mettant pour tang L sa valeur $\frac{\sin\omega \tang D}{\cos Æ} + \cos\omega \tang Æ$, pour $\sin\lambda$ sa valeur $\cos\omega \sin D - \sin\omega \cos D \sin Æ$, pour $\sin\lambda$ sa valeur..... $\cos\omega \sin D - \sin\omega \cos D \sin Æ$, pour $\cos L \cos\lambda$ sa valeur $\cos Æ \cos D$, vous aurez, après les réductions,

$$\frac{dÆ}{dL} = \cos\omega + \sin\omega \sin Æ \tang D.$$

La même équation donne

$$\frac{dÆ}{d\omega} = -\sin\omega \cos^2 Æ \tang L - \frac{\cos\omega \cos^2 \sin Æ\lambda}{\cos\lambda \cos L}:$$

mettez les valeurs de $\tang L$, $\sin\lambda$, $\cos\lambda \cos L$, vous aurez

$$\frac{dÆ}{d\omega} = -\cos Æ \tang D;$$

la formule $\sin D = \sin L \cos\lambda \sin\omega + \cos\omega \sin\lambda$, donne

$$\frac{dD}{d\omega} = \frac{\cos\omega \sin L \cos\lambda - \sin\omega \sin\lambda}{\cos D} = \sin Æ.$$

Quand on a éliminé L et λ, comme ci-dessus, elle donne encore

$$\frac{dD}{dL} = \frac{\sin\omega \cos L \cos\lambda}{\cos D} = \frac{\sin\omega \cos Æ \cos D}{\cos D} = \sin\omega \cos Æ.$$

Ainsi nous arrivons aux formules différentielles de M. Laplace, qui sont celles dont les astronomes se sont toujours servis, à la réserve des termes $dÆ = -d\omega \cos Æ \tang D$ et $dD = -d\omega \sin Æ$ qu'ils ont toujours négligés. Ce dernier ne saurait passer 0″,5 par an, mais il irait à 50″ par siècle; le premier irait à 16″,5 par an pour l'étoile polaire. Ces termes paraîtraient donc mériter toute l'attention des astronomes; mais ils ont cru que les mouvemens de l'écliptique n'affectaient en rien les déclinaisons, ni même les ascensions droites qui étaient seulement diminuées du mouvement annuel 0″,202 des points équinoxiaux.

20. Dans ce système calculez la longitude et la latitude d'après l'ascension droite et la déclinaison observée, et l'obliquité pour le jour de l'observation; alors vous aurez le mouvement en déclinaison pour un intervalle quelconque, en faisant

$$\sin \tfrac{1}{2} dD = \frac{\sin \frac{1}{2} dL \sin\omega \cos(L + \frac{1}{2} dL)}{\cos(D + \frac{1}{2} dD)}.$$

On peut calculer cette formule en estimant d'abord

$$\tfrac{1}{2}\,dD = \tfrac{1}{2}\,dL \sin\omega \cos Æ\!R\,;$$

on rectifiera ensuite le calcul avec la valeur approchée qu'on aura trouvée pour $\frac{1}{2}dD$; ou bien on pourra réduire la formule en série (X.226); faites ensuite

$$\sin dÆ\!R = \frac{2\sin\frac{1}{2}dL\cos^2\lambda}{\cos D\cos(D+dD)}\left[\cos\omega\cos\tfrac{1}{2}dL - \sin\omega\,\mathrm{tang}\,\lambda\sin(L+\tfrac{1}{2}dL)\right],$$

vous aurez l'ascension droite ($Æ\!R + dÆ\!R$) et la déclinaison ($D + dD$) pour une époque quelconque, sans vous embarrasser des mouvemens de l'écliptique.

21. Voulez-vous tenir compte de ces mouvemens, cherchez d'abord la longitude et la latitude, comme nous avons dit, pour le jour de l'observation; corrigez ces calculs au moyen de la précession lunisolaire et des mouvemens dL et $d\lambda$ (15), vous aurez la longitude et la latitude de l'étoile pour une époque quelconque; alors avec cette longitude, cette latitude et l'obliquité pour la même époque, vous calculerez trigonométriquement l'ascension droite et la déclinaison. Voyez la Connaissance des Tems de 1810, p. 457, où j'ai prouvé, par un exemple calculé pour l'étoile polaire et pour un intervalle de cent ans, que les deux procédés conduisaient au même résultat; mais le premier est le plus commode de beaucoup, le dernier est plus rigoureux.

22. Voulez-vous déterminer par observation la précession lunisolaire et le petit mouvement des points équinoxiaux que nous indique la théorie, il suffira de retourner nos formules, qui seront

$$\sin\tfrac{1}{2}dL = \frac{\sin\frac{1}{2}dD\cos(D+\frac{1}{2}dD)}{\sin\omega\cos\lambda\cos(L+\frac{1}{2}dL)}.$$

Connaissant une déclinaison D, l'obliquité ω, la longitude L pour le moment présent avec une déclinaison ($D + dD$) anciennement observée, vous en déduirez facilement dL par la formule précédente où tout sera connu, excepté $\frac{1}{2}dL$ que vous supposerez $50'',1\,t$ par approximation; vous aurez la valeur exacte de $\sin\frac{1}{2}dL$.

Calculez ensuite

$$\sin dÆ\!R = \frac{2\sin\frac{1}{2}dL\cos^2\lambda}{\cos D\cos(D+dD)}\left[\cos\omega\cos\tfrac{1}{2}dL - \sin\omega\,\mathrm{tang}\lambda\sin(L+\tfrac{1}{2}dL)\right].$$

Comparant cette valenr de $d\text{Æ}$ avec la différence des ascensions droites observées aux deux époques, vous en conclurez la quantité dont le déplacement de l'écliptique a changé les points équinoxiaux. Soit m le mouvement observé d'ascension droite, $d\text{Æ} - m$ sera le déplacemeut des points équinoxianx produit par l'attraction des planètes. C'est ce terme que la théorie fait de 0",202 par an.

23. Mais pour connaître cette petite quantité, il faudrait être sûr que l'étoile observée n'a aucun mouvement particulier, et que la position n'a changé que par les mouvemens de l'écliptique et de l'équatcur; or c'est ce que rien ne prouve: au contraire, depnis qu'on observe les étoiles avec plus de soin et de précision, on a cru reconnaître qu'elles ont presque toutes des mouvemens propres qui sont encore plutôt soupçonnés que véritablement connus. C'est par la comparaison d'un très-grand nombre d'étoiles qu'on a déterminé la quantité moyenne de la précession. Quand on veut ensuite appliquer cette précession moyenne à chacune des étoiles en particulier, on y trouve de légères différences qu'on a d'abord attribuées à l'incertitude des observations : mais quand on a pu comparer de bonnes observations faites à d'assez grands intervalles, on a cru voir que ces différences surpassaient l'erreur probable des observations; on les a rejetées sur des mouvemens propres.

Halley trouva, par exemple, qu'Aldébaran et Arcturus, dont la latitude devait avoir reçu une augmentation par la diminution de l'obliquité, avaient au contraire éprouvé une diminution. Il fit des remarques semblables sur Sirius et l'épaule orientale d'Orion. (*Transact. Philos.* 1718, n° 355.)

Cassini trouva que de 1672 à 1738, Arcturus s'était rapproché de 2' de l'écliptique, ce qui ferait 3' 2" par siècle. Lemonnier trouve le mouvement de 4' 5" vers le midi. Par les observations de Flamstéed, comparées avec les siennes, La Caille trouvait un mouvement propre de 3' 43". Lemonnier croyait aussi à une rétrogradation de 1', ou au moins de $\frac{1}{2}$ minute en longitude.

Tobie Mayer compara ses observations de 1756 avec celles que Roemer avait faites 50 ans auparavant, et qu'on trouve dans son *Triduum Astronomiæ.* Sur 80 étoiles, il en trouva quinze auxquelles il attribua des mouvemens propres, soit en ascension droite, soit en déclinaison; les plus forts étaient ceux d'Arcturus qu'il faisait de — 71" et — 115" en 50 ans.

Maskelyne, dans les dernières éditions de son Catalogue, trouvait des mouvemens propres à presque toutes les étoiles dont il le compose.

J'ai reconnu des mouvemens de ce genre à ϵ des Gémeaux, à β de la Vierge, à θ de la Grande-Ourse. Lalande avait donné dans la Connaissance des Tems de 1808, un nombreux catalogue de ces variations; et tout nouvellement M. Piazzi, dans le premier volume des Mémoires de l'Institut de Bologne, a traité le même sujet, et il cite un grand travail de M. Triesnecker.

24. Malgré tant de comparaisons et de calculs, ces mouvemens propres sont encore très-incertains pour la plupart; ils renferment nécessairement des erreurs de plus d'un genre, telles que celles des observations, des réductions et des diverses suppositions qu'on a pu faire pour la précession moyenne. Ces incertitudes prouvent la nécessité de vérifier sans cesse les positions des étoiles, et surtout celles qui servent de fondement à tous les calculs astronomiques. C'est quand on aura une longue suite d'observations bien précises, qu'il sera permis de prononcer sur un point aussi délicat : heureusement l'ignorance où nous sommes encore à cet égard n'a aucun inconvénient pour les tems passés, qui ne nous offrent aucune observation dont les erreurs ne soient fort au-dessus de ces petites quantités. Quant aux siècles à venir, l'inconvénient est encore moindre; nous n'avons aucune occasion, aucun intérêt de calculer avec tant de précision des phénomènes encore éloignés. Quand ils arriveront, on aura les connaissances requises pour en tirer toutes les conséquences utiles.

25. Ces variations sont-elles véritablement des mouvemens propres à chaque étoile en particulier, ou bien tiendraient-elles à une cause générale. MM. Herschel et Prévôt les ont attribuées en partie au déplacement du Soleil qui s'avancerait avec tout son cortége de planètes vers une certaine région du ciel, ou plutôt qui tournant autour d'un centre inconnu de gravité, paraîtrait pendant un assez long-tems s'avancer vers le point du ciel déterminé par la tangente à son orbite. Les deux auteurs cités ont désigné l'étoile δ d'Hercule, comme celle vers laquelle notre système solaire paraîtrait se diriger : mais si les mouvemens d'un certain nombre d'étoiles semblent appuyer cette idée, il en est d'autres qui nous forcent à la rejeter.

26. Il est très-difficile, pour ne pas dire impossible, de démêler dans

les variations observées, ce qui pourrait tenir au mouvement de translation du soleil d'avec ce qui appartiendrait à chaque étoile qui pourrait avoir un mouvement pareil à celui de notre système. Duséjour, qui a cherché les équations de ce problème, dans son Traité analytique des mouvemens célestes, ne balance pas à le déclarer insoluble. M. Burckhardt, qui s'est occcupé de la même question dans la Connaissance des Tems, en a donné une solution d'une application plus facile; il l'éprouve sur les étoiles dont Maskelyne a déterminé les mouvemens propres; il trouve que les résultats ne sont nullement d'accord, d'où il conclut que nous n'avons pas encore assez de faits pour prononcer sur la direction du mouvement du système solaire.

27. Soit r la distance de l'étoile à l'observateur, A son ascension droite et D sa déclinaison, x, y, z les trois cordonnées rectangulaires

$$x = r\cos D\cos A, \quad y = r\cos D\sin A, \quad z = r\sin D;$$

d'où

$$dx = dr\cos D\cos A - rdD\sin D\cos A - rdA\sin A\cos D \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$
$$dy = dr\cos D\sin A - rdD\sin D\sin A + rdA\cos A\cos D \ldots\ldots\ldots\ldots (B)$$
$$dz = dr\sin D \qquad + rdD\cos D \ (C), \quad dr = \frac{dz}{\sin D} - \frac{rdD\cos D}{\sin D} \ldots\ldots (D)$$

et

$$dx = \left(\frac{dz}{\sin D} - \frac{rdD\cos D}{\sin D}\right)\cos D\cos A - rdD\sin D\cos A - rdA\sin A\cos D,$$
$$dy = \left(\frac{dz}{\sin D} - \frac{rdD\cos D}{\sin D}\right)\cos D\sin A - rdD\sin D\sin A + rdA\cos A\cos D,$$

$$dx\sin D = dz\cos D\cos A - rdD\cos^2 D\cos A$$
$$- rdD\sin^2 D\cos A - rdA\sin A\sin D\cos D,$$
$$dy\sin D = dz\cos D\sin A - rdD\cos^2 D\sin A$$
$$- rdD\sin^2 D\sin A + rdA\cos A\sin D\cos D,$$

$$dx\sin D\cos A = dz\cos D\cos^2 A - rdD\cos^2 D\cos^2 A$$
$$- rdD\sin^2 D\cos^2 A - rdA\sin A\cos A\sin D\cos D,$$
$$dy\sin D\sin A = dz\cos D\sin^2 A - rdD\cos^2 D\sin^2 A$$
$$- rdD\sin^2 D\sin^2 A + rdA\sin A\cos A\sin D\cos D,$$

$$dx \sin D \cos A + dy \sin D \sin A = dz \cos D - rdD \cos^2 D - rdD \sin^2 D,$$
$$dx \sin D \cos A + dy \sin D \sin A - dz \cos D = - rdD \ldots\ldots\ldots\ldots (E).$$

De (A) on tire

$$-\left(\frac{dx}{r}\right) + \left(\frac{dr}{r}\right) \cos D \cos A = dD \sin D \cos A + dA \sin A \cos D \ldots\ldots (1).$$

De (B) on tire

$$-\left(\frac{dy}{r}\right) + \left(\frac{dr}{r}\right) \cos D \sin A = dD \sin D \sin A - dA \cos A \cos D \ldots\ldots (2).$$

De (C) on tire

$$-\frac{dz}{r} + \frac{dr}{r} \sin D = - dD \cos D \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

De (E) on tire

$$\left(\frac{dx}{r}\right) \cos A \sin D + \left(\frac{dy}{r}\right) \sin A \sin D - \frac{dz}{r} \cos D = - dD \ldots\ldots (4).$$

$$-\left(\frac{dx}{r}\right) \sin A + \left(\frac{dr}{r}\right) \cos D \cos A \sin A = dD \sin D \cos A \sin A + dA \sin^2 A \cos D$$

$$-\left(\frac{dy}{r}\right) \cos A + \left(\frac{dr}{r}\right) \cos D \cos A \sin A = dD \sin D \sin A \cos A - dA \cos^2 A \cos D;$$

la différence de ces deux dernières équations est

$$-\left(\frac{dx}{r}\right) \sin A + \left(\frac{dy}{r}\right) \cos A = dA \cos D \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Divisez (1) et (2) par (3), vous aurez

$$\frac{-dx + dr \cos D \cos A}{-dz + dr \sin D} = - \cos A \operatorname{tang} D - \left(\frac{dA}{dD}\right) \sin A \ldots\ldots (6);$$

$$\frac{-dy + dr \cos D \sin A}{-dz + dr \sin D} = - \sin A \operatorname{tang} D + \left(\frac{dA}{dD}\right) \cos A \ldots\ldots (7),$$

$$\frac{-dx \sin A + dr \cos D \cos A \sin A}{-dz + dr \sin D} = - \sin A \cos A \operatorname{tang} D - \left(\frac{dA}{dD}\right) \sin^2 A,$$

$$\frac{-dy \cos A + dr \cos D \sin A \cos A}{-dz + dr \sin D} = - \sin A \cos A \operatorname{tang} D + \left(\frac{dA}{dD}\right) \cos^2 A,$$

$$\frac{-dx \sin A + dy \cos A}{+dz - dr \sin D} = + \frac{dA}{dD} \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Divisez

Divisez (6) par (7), vous aurez

$$\frac{-dx+dr\cos D\cos A}{-dy+dr\cos D\sin A}=\frac{-\cos A\tang D-\left(\frac{dA}{dD}\right)\sin A}{-\sin A\tang D-\left(\frac{dA}{dD}\right)\sin A}$$

$$=\frac{1+\left(\frac{dA}{dD}\right)\tang A\cot D}{\tang A-\left(\frac{dA}{dD}\right)\cot D}\ldots\ldots\ldots\ldots (9),$$

$$\left(\frac{dx}{r}\right)\cos A\sin D+\left(\frac{dy}{r}\right)\sin A\sin D-\left(\frac{dz}{r}\right)\cos D=-dD\ldots\ldots (4),$$

$$-\left(\frac{dx}{r}\right)\sin A+\left(\frac{dy}{r}\right)\cos A=dA\cos D\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

$$\left(\frac{dx}{r}\right)\cos^2 A\sin D+\left(\frac{dy}{r}\right)\sin A\cos A\sin D-\left(\frac{dz}{r}\right)\cos A\cos D=-dD\cos A$$

$$-\left(\frac{dx}{r}\right)\sin^2 A\sin D+\left(\frac{dy}{r}\right)\cos A\sin A\sin D=dA\sin A\cos D\sin D$$

$$\left(\frac{dx}{r}\right)\sin D-\left(\frac{dz}{r}\right)\cos A\cos D=-dD\cos A-dA\sin A\cos D\sin D$$

$$-\left(\frac{dx}{r}\right)\qquad+\left(\frac{dz}{r}\right)\cos A\cot D=+dD\left(\frac{\cos A}{\sin D}\right)+dA\sin A\cos D\ldots (10),$$

$$\left(\frac{dx}{r}\right)\cos A+\left(\frac{dy}{r}\right)\sin A-\left(\frac{dz}{r}\right)\cot D=-\frac{dD}{\sin D}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$-\left(\frac{dx}{r}\right)\sin A+\left(\frac{dy}{r}\right)\cos A=dA\cos D\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

$$\left(\frac{dx}{r}\right)\sin A\cos A+\left(\frac{dy}{r}\right)\sin^2 A-\left(\frac{dz}{r}\right)\sin A\cot D=-dD\left(\frac{\sin A}{\sin D}\right)$$

$$-\left(\frac{dx}{r}\right)\sin A\cos A+\left(\frac{dy}{r}\right)\cos^2 A\qquad\qquad=+dA\cos A\cos D$$

$$\left(\frac{dy}{r}\right)-\left(\frac{dz}{r}\right)\sin A\cot D=-dD\left(\frac{\sin A}{\sin D}\right)+dA\cos A\cos D\ldots (11).$$

28. Si les étoiles sont immobiles, et que le système solaire se meuve seul dans l'espace, les variations dx, dy, dz et dr seront constantes pour une étoile quelconque, et si l'on prend deux étoiles dont les ascensions droites diffèrent de 180°, sin A et cos A seront les mêmes pour les deux étoiles, à la réserve des signes qui seront contraires; et si l'on suppose de plus que les déclinaisons soient égales, on aura (8)

$$\left(\frac{dA}{dD}\right)=-\left(\frac{dA'}{dD'}\right).$$

Pour α du Bélier, on aura

$$\frac{dA}{dD} = \frac{+0.105}{-0.070} = -1.50.$$

Pour Arcturus, $$-\frac{dA'}{dD'} = \frac{+1.26}{-1.72} = -0.73.$$

Le mouvement du soleil ne suffit donc pas pour expliquer les changemens de ces deux étoiles; il suffirait pour Procyon et β de l'Aigle, mais non pour α ou γ de l'Aigle et Procyon. Il ne suffit pas non plus pour γ de Pégase et β du Lion.

29. Pour les étoiles qui ont 45° ou 225° d'ascension droite, sin A=cos A; $x=y$, $dx=dy$; l'équation (5) $dA \cos D$ se réduit à o, donc $dA=0$.

30. Pour les étoiles qui ont 135° ou 315°, l'équation (4) devient

$$dD = \left(\frac{dz}{r}\right)\cos D, \quad \text{ou} \quad dz = \frac{rdD}{\cos D}.$$

De plus, pour 135°, l'équation (5) donne

$$dA \cos D = -\left(\frac{dx}{r}\right)\sin 45° - \left(\frac{dy}{r}\right)\sin 45°,$$

$$\frac{rdA \cos D}{\sin 45°} = -(dx+dy)$$

$$-dx = \frac{rdA \cos D}{2 \sin 45°} = \frac{rdA \cos D \sin 45°}{2 \sin^2 45 = 1} = rdA \cos D \sin 45°.$$

Pour 315°, $+dx = rdA \cos D \sin 45°$.

31. Si le soleil se meut en ligne droite, les étoiles qui seront dans le plan qui passe par le centre du soleil perpendiculairement à cette droite, ne changeront pas sensiblement de distance; on pourra supposer $dr=0$, les équations (1) et (2) deviendront

$$-\left(\frac{dx}{r}\right) = dD \sin D \cos A + dA \sin A \cos D,$$

$$-\left(\frac{dy}{r}\right) = dD \sin D \sin A - dA \cos A \cos D,$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{dD\sin D\cos A+dA\sin A\cos D}{dD\sin D\sin A-dA\cos A\cos D}=\frac{\cot A+\left(\frac{dA}{dD}\right)\cot D}{1-\left(\frac{dA}{dD}\right)\cot A\cot D}$$

$$=\frac{\tang D+\left(\frac{dA}{dD}\right)\tang A}{\tang A\tang D-\left(\frac{dA}{dD}\right)}$$

$=$ tang ascens. droite du point vers lequel se meut le soleil.

On aura

$$\text{tang déclin. de ce point}=\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

et

$$\cot=\left[\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\tang^2 D+\frac{dA^2}{dD^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

M. Burckhardt ayant appliqué ces formules aux étoiles de Maskelyne, n'a trouvé rien de satisfaisant; la question reste donc indécise et le sera long-tems encore.

32. Tout ce que nous pouvons faire est d'observer de notre mieux ces mouvemens particuliers, et d'en tenir compte dans les réductions que nous faisons continuellement aux ascensions droites et aux déclinaisons des étoiles que nous prenons pour bases de toutes nos observations; mais ces réductions sont peu certaines et ne peuvent s'étendre à de grands intervalles : aucune théorie ne nous guide. Parmi tous ces mouvemens, il n'y a que la quantité moyenne de la précession et la diminution moyenne d'obliquité qui soient assez bien connues, et qui le seront mieux quelque jour; mais il faudra bien des siècles pour qu'elles le soient parfaitement. Nous savons du moins que la diminution d'obliquité aura un terme, qu'elle est renfermée dans une limite de 1° $\frac{1}{3}$ environ, et qu'elle se changera en augmentation quand les positions des nœuds qui varient sans cesse auront fait une demi-révolution.

33. Outre ces variations d'ascension droite et de déclinaison qui n'ont été révoquées en doute par aucun astronome, Chr. Mayer, directeur de l'observatoire de Manheim, crut en remarquer d'autres qui n'ont point obtenu un assentiment aussi général; il annonça que dans la partie australe du ciel il ne se trouvait presque pas une étoile un peu remarquable qui ne fût accompagnée de plusieurs étoiles plus petites qui en étaient en quelque manière les satellites; il crut les voir naître, aug-

menter d'éclat et changer de distances. Il assura plus positivement que les étoiles doubles observées en différens tems par les astronomes, présentaient aujourd'hui dans leurs ascensions droites et leurs déclinaisons, des différences plus grandes qu'au tems de Flamstéed. Il crut que ces variations pourraient nous donner quelques lumières sur la distance des étoiles à la terre. Ce moyen pour trouver la parallaxe des étoiles, avait été proposé par Galilée; Herschel en a tenté l'application : voici en quoi il consiste. Plusieurs étoiles assez brillantes sont accompagnées d'étoiles plus petites qui ne peuvent s'en distinguer dans les lunettes ordinaires. Les espaces qui les séparent doivent s'agrandir quand la terre, dans sa route annuelle, est arrivée au point de sa plus grande proximité; ils doivent être plus petits lorsque, six mois après, la terre est à sa plus grande distance. M. Herschel fit un grand nombre d'observations de ce genre pour en conclure au moins la parallaxe relative, en supposant, ce qui n'est pourtant pas démontré, que la distance de la petite étoile à la terre soit considérablement plus grande que celle de l'étoile brillante qu'elle paraît avoisiner. Herschel donnait avec ses observations les formules qu'il avait imaginées pour les calculer; mais n'ayant offert aucun résultat, nous sommes autorisés à croire qu'il n'y a vu lui-même rien qui lui parût assez sûr.

34. M. Herschel nous a fait connaître un grand nombre de ces étoiles qui sont doubles; il en vit même de triples et de quadruples; il en distingua des amas de différentes formes et auxquels il donna différens noms, il crut les voir circuler deux à deux ou trois à trois autour de leur centre de gravité. Ces découvertes curieuses ne pouvant se vérifier qu'avec de grands télescopes qui seront toujours peu communs, on ne peut guères en attendre aucune application vraiment utile.

35. Au moyen de ces grands télescopes, il distingue les nébuleuses vraies d'avec celles qui ne sont que des amas d'étoiles qu'il parvient à distinguer. Dans les nébuleuses proprement dites, et qui ne sont que des nuages extrêmement rares et faiblement lumineux, il annonce des points plus denses et qui forment des centres d'attraction autour desquels le reste se réunit peu à peu : par cette condensation et ce déplacement il se forme des corps qui peuvent circuler autour du centre de gravité; cette condensation, portée à un certain point, a produit les comètes, une concentration plus parfaite a pu donner naissance aux

planètes. Nous ne ferons aucune réflexion sur ces aperçus, qui ne peuvent encore être considérés que comme des probabilités assez faibles.

36. On a vu des étoiles nouvelles paraître, augmenter, diminuer et disparaître. Hipparque en vit une de ce genre, et c'est, dit-on, la raison qui le porta à former un catalogue de toutes les étoiles visibles. On parle d'une étoile qui parut tout-à-coup auprès de l'Aigle en 389, qui pendant trois semaines fut aussi brillante que Vénus, et disparut pour toujours; d'une étoile qu'on vit dans le Scorpion pendant quatre mois, et dont la lumière était un quart de celle de la lune. Mais l'une des plus fameuses et la mieux constatée, est celle de 1572, que Tycho-Brahé apperçut dans Cassiopée, et sur laquelle il composa un grand ouvrage; elle surpassait Sirius, on la voyait de jour; elle s'affaiblit peu à peu, et disparut en 1574 : elle n'avait aucune parallaxe sensible. Képler composa de même un ouvrage sur l'étoile du Serpentaire, qu'il aperçut en 1604, et qui ne dura qu'un an. Voyez ces ouvrages, l'Almageste de Riccioli et Lalande.

37. D'autres étoiles changent de grandeur au point de devenir quelquefois invisibles; telle est la Changeante de la Baleine, qui dans une période de 333 à 334 jours, éprouve tous les changemens possibles, depuis la deuxième grandeur jusqu'à la dixième, ou moins encore. Algol, ou la Tête de Méduse, passe en 2 jours 48 ou 49′, de la deuxième grandeur à la quatrième ou la cinquième; β de la Lyre passe en 6 jours 9 heures $\frac{1}{2}$ de la troisième à la cinquième grandeur; γ d'Antinoüs a des changemens pareils dont la période est de 7 jours 4 heures $\frac{1}{4}$. La période de γ de Céphée est de 5 jours 8 heures 37′. Voyez dans Lalande (825) beaucoup d'autres remarques semblables.

38. On a supposé que ces étoiles avaient des parties moins brillantes ou totalement obscures, que la rotation nous montrait successivement. Maupertuis explique ces variations, en supposant de même une rotation et un très-grand aplatissement qui ferait ressembler l'étoile à un disque plutôt qu'à une sphère; enfin on a imaginé autour de l'étoile quelque grosse planète qui l'éclipserait en tout ou en partie à des intervalles réglés. Nous glissons rapidement sur tous ces faits, qu'on ne peut soumettre à aucune théorie certaine, et qui se refusent au calcul.

39. Une remarque plus singulière que toutes les précédentes est celle

que M. Bessel vient de consigner dans le Journal de Gotha, août 1812, p. 148, et septembre 1812, p. 295. Un grand travail qu'il a entrepris sur les observations de Bradley, lui a prouvé que *les étoiles doubles forment par elles-mêmes un système particulier. Plusieurs étoiles de ce genre par leur mouvement commun montrent une dépendance mutuelle; mais la plus digne de remarque est l'étoile du Cigne, qui est la* 61e *dans le Catalogue de Flamstéed. Cette étoile double s'avance avec une grande vîtesse; il est évident que les deux étoiles tiennent l'une à l'autre par le lien de l'attraction, et depuis 60 ans elles ont décrit une partie considérable de leur orbite autour du centre commun de gravité.* Pour mettre ces assertions hors de doute, il rapporte les observations d'Hévélius, celles de Flamstéed, de Bradley, de Herschel, de d'Agelet, de Lalande neveu; enfin celles de Piazzi. Il en conclut la position suivante pour 1800,

$$314^\circ\ 29'\ 5'',88 \quad \text{et} \quad 37^\circ\ 46'\ 30'',27,$$

et pour un tems quelconque t, le mouvement

$$+[39'',9283 + 0.000082\,(t - 1800)]\,(t - 1800)$$
$$+[17'',3924 + 0.001400\,(t - 1800)]\,(t - 1800);$$

mouvement propre anuuel, $\quad + 5'',0683 \quad$ et $\quad 3'',3580$.

Il croit que le tems de la révolution pourrait être de 400 ans, le demi-grand axe 25″, et la parallaxe annuelle 0″,46.

Dans ces résultats ne sont comprises ni les observations d'Hévélius, ni celles de Piazzi; les premières, parce qu'elles sont trop peu sûres; les dernières, parce qu'elles sont trop modernes. Mais en tenant compte de ces dernières, on aurait, pour les deux étoiles,

1805......	314° 32′ 28″ 5,	57° 47′ 54″ 6,
	314.32.46, 5,	37.47.57, 5,

mouvement propre $\quad + 5'',1750 + 3'',2657$,

mouvement pour le tems t,

$$+[40'',0350 + 0.000082\,(t - 1800)]\,(t - 1800)$$
$$+[17'',2997 + 0.01400\ (t - 1800)]\,(t - 1800).$$

Cette annonce mérite toute l'attention des astronomes qui s'empresseront de la vérifier par leurs observations et leurs calculs.

CHAPITRE XXXIII.

Des Comètes.

1. Les comètes sont des planètes qui se meuvent dans des orbites très-excentriques, et qui ne deviennent visibles pour nous que vers leurs passages au périhélie. La rapidité de leurs mouvemens les emporte bientôt à des distances où il ne nous est plus possible de les apercevoir, car ces planètes sont fort petites, et d'ailleurs elles sont enveloppées d'une nébulosité, ou d'une atmosphère épaisse qui les rend peu propres à renvoyer beaucoup de lumière, ensorte que pour la plupart elles sont télescopiques.

2. On les appelle *comètes*, c'est-à-dire, astres chevelus, du mot grec κόμη, *coma*, chevelure; cette atmosphère ou chevelure prend quelquefois diverses figures, qui, suivant les circonstances, ont fait donner aux comètes, par les historiens, des noms différens, tels que ceux de *Pogonias*, ou astre barbu, *Lampadias*, *Xiphias*, *Pithètes*, *Acontias*, etc., astre qui ressemble à une lampe, à une épée, à un tonneau, à un javelot, etc.

Nous reviendrons sur cet objet à la suite de la théorie mathématique, qui est bien plus sûre et par là plus importante que la partie physique.

3. Le grand éclat de certaines comètes, la grande inégalité de leurs mouvemens, et leur prompte disparition suffisaient pour faire juger qu'elles devaient se mouvoir dans des ellipses fort excentriques.

Or nous avons vu que si l'excentricité est considérable, les formules deviennent très-incommodes et perdent leur précision dans la pratique: il a donc fallu leur donner une forme différente.

4. L'équation astronomique ou polaire de l'ellipse est

$$V = \frac{a^2 - e^2}{a + e\cos u} = \frac{(a+e)(a-e)}{a + e\cos u}.$$

Soit h la distance périhélic, $h = a - e$, $e = a - h$, $a + e = 2a - h$, et la formule devient

$$\mathrm{V} = \frac{(2a-h)h}{a+(a-h)\cos u} = \frac{(2a-h)h}{a+a\cos u - h\cos u} = \frac{(2a-h)h}{2a\cos^2\frac{1}{2}u - h\left(\frac{1-\tan^2\frac{1}{2}u}{1+\tan^2\frac{1}{2}u}\right)}$$

$$= \frac{(2a-h)h}{2a\cos^2\frac{1}{2}u - h\cos^2\frac{1}{2}u(1-\tan^2\frac{1}{2}u)} = \frac{(2a-h)\frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u}}{2a-h+h\tan^2\frac{1}{2}u}$$

$$= \frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u\left(1+\frac{h}{2a-h}\tan^2\frac{1}{2}u\right)} = \frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u\left(1+\frac{\frac{h}{a}}{2-\frac{h}{a}}\tan^2\frac{1}{2}u\right)}$$

$$= \frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u\left[1+\left(\frac{m}{2-m}\right)\mathrm{taog}^2\frac{1}{2}u\right]} = \frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u\left[1+\left(\frac{1-\sin\varepsilon}{1+\sin\varepsilon}\right)\tan^2\frac{1}{2}u\right]}$$

$$= \frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u(1+\tan^2\frac{1}{2}x)} = \frac{h\cos^2\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}u}.$$

x est l'anomalie de l'excentrique, qui, dans les ellipses fort excentriques, est toujours fort petite en comparaison de u, et qui même serait nulle si l'on supposait $\sin\varepsilon = 1$, ou l'excentricité égale au demi-grand axe. $\cos^2\frac{1}{2}x$ sera donc peu différent de l'unité, et l'on aura par approximation $\mathrm{V} = \frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u}$, et pour avoir la véritable valeur, il suffira de multiplier $\left(\frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u}\right)$ par $\cos^2\frac{1}{2}x$. Cette expression du rayon vecteur est à ajouter à celles que nous avons données (XXI.90); elle peut se mettre encore sous la forme

$$\mathrm{V} = \frac{(a-e)\cos^2\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}u} = \frac{a(1-\sin\varepsilon)\cos^2\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}u} = \frac{2a\sin^2(45° - \frac{1}{2}\varepsilon)\cos^2\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}u}.$$

On aura encore

$$\log \mathrm{V} = \log\left(\frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u}\right) - \mathrm{K}\left[\left(\frac{m}{2-m}\right)\tan^2\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2-m}\right)^2\tan^4\frac{1}{2}u + \text{etc.}\right].$$

5. Or

$$z = x - \sin\varepsilon\sin x = x - \left(\frac{a-h}{a}\right)\sin x = x - (1-m)\sin x = \frac{\mathrm{C}t}{a^{\frac{3}{2}}}\ (\mathrm{XXI}.89),$$

$$\tan\frac{1}{2}x = \left(\frac{1-\sin\varepsilon}{1+\sin\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}}\tan\frac{1}{2}u = \left(\frac{m}{2-m}\right)^{\frac{1}{2}}\tan\frac{1}{2}u,$$

$$\tfrac{1}{2}z=\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}(1-m)\sin x,\ m=\frac{h}{a}=\frac{a-e}{a}=1-\frac{e}{a}=1-\sin\varepsilon$$
$$=2\sin^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}\varepsilon),$$
$$1-m=1-2\sin^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}\varepsilon)=\cos(90^\circ-\varepsilon)=\sin\varepsilon.$$
$$\tfrac{1}{2}z=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{5}\operatorname{tang}^5\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{7}\operatorname{tang}^7\tfrac{1}{2}x+\text{etc.}$$
$$-\tfrac{1}{2}(1-m)\cdot\frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}x}{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}x}$$
$$=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{5}\operatorname{tang}^5\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{7}\operatorname{tang}^7\tfrac{1}{2}x+\text{etc.}$$
$$-(1-m)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x+(1-m)\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}x-(1-m)\operatorname{tang}^5\tfrac{1}{2}x$$
$$+(1-m)\operatorname{tang}^7\tfrac{1}{2}x-\text{etc.}$$
$$=m\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x+(\tfrac{2}{3}-m)\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}x-(\tfrac{4}{5}-m)\operatorname{tang}^5\tfrac{1}{2}x$$
$$-(\tfrac{6}{7}-m)\operatorname{tang}^7\tfrac{1}{2}x+\text{etc.},$$

et

$$t=\frac{2a^{\frac{3}{2}}}{C}.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}x[m+(\tfrac{2}{3}-m)\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}x-(\tfrac{4}{5}-m)\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}x$$
$$+(\tfrac{6}{7}-m)\operatorname{tang}^6\tfrac{1}{2}x-\text{etc.}].$$

Cette équation sera toujours très-convergente, parce que x est toujours fort petit et croît fort lentement. L'anomalie vraie, au contraire, croît fort rapidement. Une série ordonnée suivant les puissances de u sera donc bien moins convergente ; elle aura cependant son utilité ; ainsi en mettant pour $\operatorname{tang}\frac{1}{2}x$ sa valeur $\left(\frac{m}{2-m}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}u$, nous aurons

$$t=\frac{2a^{\frac{3}{2}}}{C}.\left(\frac{m}{2-m}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u\Big[m+(\tfrac{2}{3}-m)\left(\frac{m}{2-m}\right)\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}u$$
$$-(\tfrac{4}{5}-m)\left(\frac{m}{2-m}\right)^2\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}u+\text{etc.}\Big]$$
$$=\frac{2(am)^{\frac{3}{2}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}u}{C(2-m)^{\frac{1}{2}}}\Big[1+(\tfrac{2}{3}-m)\frac{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}u}{2-m}-(\tfrac{4}{5}-m)\frac{m\operatorname{tang}^4\frac{1}{2}u}{(2-m)^2}$$
$$+(\tfrac{6}{7}-m)\frac{m^2\operatorname{tang}^6\frac{1}{2}u}{(2-m)^3}-\text{etc.}\Big]$$
$$=\frac{2h^{\frac{3}{2}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}u}{2^{\frac{1}{2}}C}\Big[\frac{1}{(1-\frac{1}{2}m)^{\frac{1}{2}}}+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}m)\frac{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}u}{(1-\frac{1}{2}m)^{\frac{3}{2}}}-(\tfrac{4}{5}-m)\frac{m\operatorname{tang}^4\frac{1}{2}u}{2^2(1-\frac{1}{2}m)^{\frac{5}{2}}}$$
$$+(\tfrac{6}{7}-m)\frac{m^2\operatorname{tang}^6\frac{1}{2}u}{2^3(1-\frac{1}{2}m)^{\frac{7}{2}}}-\text{etc.}\Big].$$

6. Développons les fonctions de m jusqu'aux puissances secondes

inclusivement

$$\left(1-\tfrac{1}{2}m\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\frac{m^2}{4}=1+\tfrac{1}{4}m+\tfrac{3}{32}m^2,$$

$$\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}m\right)\left(1-\tfrac{1}{2}m\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}m\right)\left(1+\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{1}{2}m+\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{4}\cdot\frac{m}{4}\right)$$

$$=\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}m\right)\left(1+\tfrac{3}{4}m+\tfrac{15}{32}m^2\right)=\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}m-\tfrac{1}{2}m-\tfrac{3}{8}m^2+\tfrac{5}{32}m^2$$

$$=\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}m-\tfrac{7}{32}m^2,$$

$$\left(\frac{4m}{5}-m^2\right)\left(1-\tfrac{1}{2}m\right)^{-\frac{5}{2}}=\left(\frac{4m}{5}-m^2\right)\left(1+\tfrac{5}{4}m\right)=\tfrac{4}{5}m-m^2+\tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{4}{5}m^2=\tfrac{4}{5}m,$$

$$t=\frac{2^{\frac{1}{2}}h^{\frac{3}{2}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}u}{C}\left[1+\tfrac{1}{4}m+\tfrac{3}{32}m^2+\left(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}m-\tfrac{7}{32}m^2\right)\operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}u\right.$$
$$\left.-\tfrac{1}{5}m\operatorname{tang}^4\tfrac{1}{2}u+\tfrac{3}{28}m^2\operatorname{tang}^6\tfrac{1}{2}u\right]$$

$$=\frac{2^{\frac{1}{2}}h^{\frac{3}{2}}}{C}\left(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u+\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}u\right)+\frac{2^{\frac{1}{2}}h^{\frac{3}{2}}}{C}\left(\tfrac{1}{4}m\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u-\tfrac{1}{4}m\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}u-\tfrac{1}{5}m\operatorname{tang}^5\tfrac{1}{2}u\right)$$

$$+\frac{2^{\frac{1}{2}}h^{\frac{3}{2}}}{C}\left(\tfrac{3}{32}m^2\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u-\tfrac{7}{32}m^2\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}u+\tfrac{3}{28}m^2\operatorname{tang}^7\tfrac{1}{2}u\right).$$

La première partie de cette expression est indépendante de m, la seconde n'en renfermera que la première puissance, la troisième ne renferme que la seconde; nous négligerons les puissances ultérieures. On voit que si $m=\frac{h}{a}$ est une quantité fort petite, le premier terme donnera une formule approximative pour déterminer le tems par l'anomalie vraie, et réciproquement; mais l'anomalie étant donnée, la formule fera trouver pour t une valeur trop petite, et si t est donnée, on trouvera l'anomalie trop grande. Les termes négligés seront la mesure de l'erreur, et cette erreur sera d'autant moindre que l'ellipse sera plus alongée.

7. Si l'on suppose m insensible, on aura des formules très-simples pour le calcul des comètes. On aura le rayon vecteur $V=\frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u}$, et

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u+\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}u=\frac{Ct}{2^{\frac{1}{2}}h^{\frac{3}{2}}}=\frac{360^\circ}{A}\cdot\frac{t}{2^{\frac{1}{2}}h^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\pi t}{2^{\frac{1}{2}}Ah^{\frac{3}{2}}}=\frac{\pi t\sqrt{2}}{Ah^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette supposition s'est trouvée suffisamment exacte pour toutes les comètes, si l'on en excepte celle de 1770.

A est la durée de l'année sidérale de la terre (XXIV. 46).

8. Supposons qu'on ait déterminé l'anomalie vraie u' par l'équation approximative

$$\tang\tfrac{1}{2}u' + \tfrac{1}{3}\tang^3\tfrac{1}{2}u' = \frac{\pi t\sqrt{2}}{Ah^{\frac{3}{2}}},$$

l'anomalie u' serait trop forte, car dans l'ellipse on aurait pour le même tems

$$\frac{\pi t\sqrt{2}}{Ah^{\frac{3}{2}}} = \tang\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{3}\tang^3\tfrac{1}{2}u + \left(\tfrac{1}{4}m\tang\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{4}\tang^3\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{5}\tang^5\tfrac{1}{2}u\right)$$
$$+ \left(\tfrac{3}{32}m^2\tang\tfrac{1}{2}u - \tfrac{7}{32}m^2\tang^3\tfrac{1}{2}u + \tfrac{3}{28}m^2\tang^7\tfrac{1}{2}u\right);$$

d'où

$$\tang\tfrac{1}{2}u' + \tfrac{1}{3}\tang^3\tfrac{1}{2}u' - \tang\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{3}\tang^3\tfrac{1}{2}u$$
$$= \left(\tfrac{1}{4}m\tang\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{4}m\tang^3\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{5}m\tang^5\tfrac{1}{2}u\right)$$
$$+ \left(\tfrac{3}{32}m^2\tang\tfrac{1}{2}u - \tfrac{7}{32}m^2\tang^3\tfrac{1}{2}u + \tfrac{3}{28}m^2\tang^7\tfrac{1}{2}u\right);$$

or

$$\left(\tang\tfrac{1}{2}u' - \tang\tfrac{1}{2}u\right) + \tfrac{1}{3}\left(\tang^3\tfrac{1}{2}u' - \tang^3\tfrac{1}{2}u\right)$$
$$= \left(\tang\tfrac{1}{2}u' - \tang\tfrac{1}{2}u\right) + \tfrac{1}{3}\left(\tang\tfrac{1}{2}u' - \tang\tfrac{1}{2}u\right)\left(\tang^2\tfrac{1}{2}u' + \tang^2\tfrac{1}{2}u + \tang\tfrac{1}{2}u'\tang\tfrac{1}{2}u\right)$$
$$= \left(\tang\tfrac{1}{2}u' - \tang\tfrac{1}{2}u\right)\left(1 + \tfrac{1}{3}\tang^2\tfrac{1}{2}u' + \tfrac{1}{3}\tang^2\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{3}\tang\tfrac{1}{2}u'\tang\tfrac{1}{2}u\right)$$
$$= \tfrac{1}{3}\,\frac{\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)}{\cos\tfrac{1}{2}u'\cos\tfrac{1}{2}u}\left(3 + \tang^2\tfrac{1}{2}u' + \tang^2\tfrac{1}{2}u + \tang\tfrac{1}{2}u'\tang\tfrac{1}{2}u\right)$$
$$= \frac{\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)}{3\cos\tfrac{1}{2}u'\cos\tfrac{1}{2}u}\left(\text{séc}^2\tfrac{1}{2}u' + \text{séc}^2\tfrac{1}{2}u + 1 + \tang\tfrac{1}{2}u'\tang\tfrac{1}{2}u\right)$$
$$= \frac{\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)}{3\cos\tfrac{1}{2}u'\cos\tfrac{1}{2}u}\left(\frac{1}{\cos^2\tfrac{1}{2}u'} + \frac{1}{\cos^2\tfrac{1}{2}u} + \frac{\cos\tfrac{1}{2}u'\cos\tfrac{1}{2}u + \sin\tfrac{1}{2}u'\sin\tfrac{1}{2}u}{\cos\tfrac{1}{2}u'\cos\tfrac{1}{2}u}\right)$$
$$= \frac{\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)}{3\cos\tfrac{1}{2}u'\cos\tfrac{1}{2}u}\left(\frac{1}{\cos^2\tfrac{1}{2}u'} + \frac{1}{\cos^2\tfrac{1}{2}u} + \frac{\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)}{\cos\tfrac{1}{2}u'\cos\tfrac{1}{2}u}\right)$$
$$= \frac{\sin\tfrac{1}{2}du}{3\cos^2\tfrac{1}{2}u\cos^2\tfrac{1}{2}(u+du)}\left(\cos\tfrac{1}{2}du + \frac{\cos\tfrac{1}{2}(u+du)}{\cos\tfrac{1}{2}u} + \frac{\cos\tfrac{1}{2}u}{\cos\tfrac{1}{2}(u+du)}\right)$$
$$= \frac{\sin\tfrac{1}{2}du}{3\cos^2\tfrac{1}{2}u\cos^2\tfrac{1}{2}(u+du)}\left(\cos\tfrac{1}{2}du + \frac{\cos\tfrac{1}{2}u\cos\tfrac{1}{2}du}{\cos\tfrac{1}{2}u} - \frac{\sin\tfrac{1}{2}u\sin\tfrac{1}{2}du}{\cos\tfrac{1}{2}u} + \frac{\cos\tfrac{1}{2}u}{\cos\tfrac{1}{2}(u+du)}\right)$$
$$= \frac{\sin\tfrac{1}{2}du}{3\cos^2\tfrac{1}{2}u\cos^2\tfrac{1}{2}(u+du)}\left(\cos\tfrac{1}{2}du + \cos\tfrac{1}{2}du - \sin\tfrac{1}{2}du\tang\tfrac{1}{2}u\right.$$
$$\left. + \frac{\cos\tfrac{1}{2}u}{\cos\tfrac{1}{2}u\cos\tfrac{1}{2}du - \sin\tfrac{1}{2}u\sin\tfrac{1}{2}du}\right)$$
$$= \frac{\sin\tfrac{1}{2}du}{3\cos^2\tfrac{1}{2}u\cos^2\tfrac{1}{2}(u+du)}\left(2\cos\tfrac{1}{2}du - \sin\tfrac{1}{2}du\tang\tfrac{1}{2}u + \frac{\text{séc}\tfrac{1}{2}du}{1 - \tang\tfrac{1}{2}du\tang\tfrac{1}{2}u}\right)$$
$$= \frac{\sin\tfrac{1}{2}du\cos\tfrac{1}{2}du}{3\cos^2\tfrac{1}{2}u\cos^2\tfrac{1}{2}(u+du)}\left(2 - \tang\tfrac{1}{2}du\tang\tfrac{1}{2}u + \frac{1 + \tang^2\tfrac{1}{2}du}{1 - \tang\tfrac{1}{2}du\tang\tfrac{1}{2}u}\right)$$
$$= \frac{\sin\tfrac{1}{2}du\cos\tfrac{1}{2}du}{3\cos^2\tfrac{1}{2}u\cos^2\tfrac{1}{2}(u+du)}\left(3 - \tang\tfrac{1}{2}du\tang\tfrac{1}{2}u + \tang\tfrac{1}{2}du\tang\tfrac{1}{2}u + \tang^2\tfrac{1}{2}du\tang^2\tfrac{1}{2}u\right.$$
$$+ \tang^3\tfrac{1}{2}du\tang^3\tfrac{1}{2}u + \text{etc.} + \tang^2\tfrac{1}{2}du + \tang^3\tfrac{1}{2}du\tang\tfrac{1}{2}u$$
$$\left. + \tang^4\tfrac{1}{2}du\tang^2\tfrac{1}{2}u + \text{etc.}\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}du\cos\frac{1}{2}du}{3\cos^2\frac{1}{2}u\cos^2\frac{1}{2}(u+du)}\left(3+\text{tang}^2\tfrac{1}{2}du+\frac{\text{tang}^2\frac{1}{2}du\sin^2\frac{1}{2}u+\text{tang}^3\frac{1}{2}du\,\text{tang}\frac{1}{2}u}{\cos^2\frac{1}{2}u}\right)$$
$$=\frac{\sin\frac{1}{2}du\cos\frac{1}{2}du(3+\text{tang}^2\frac{1}{2}du)}{3\cos^2\frac{1}{2}u\cos^2\frac{1}{2}(u+du)}\left(1+\frac{\text{tang}^2\frac{1}{2}du\sin^2\frac{1}{2}u+\text{tang}^3\frac{1}{2}du\,\text{tang}\frac{1}{2}u}{(3+\text{tang}^2\frac{1}{2}du)\cos^2\frac{1}{2}u}\right)$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\sin du(1+\frac{1}{3}\text{tang}^2\frac{1}{2}du)}{\cos^2\frac{1}{2}u\cos^2\frac{1}{2}(u+du)}\left(1+\frac{\text{tang}^2\frac{1}{2}du\sin^2\frac{1}{2}u+\text{tang}^3\frac{1}{2}du\,\text{tang}\frac{1}{2}u}{3\cos^2\frac{1}{2}u+\text{tang}^2\frac{1}{2}du\cos^2\frac{1}{2}u}\right).$$

Nous aurions ainsi

$$\frac{\frac{1}{2}\sin du(1+\frac{1}{3}\text{tang}^2\frac{1}{2}du)}{\cos^2\frac{1}{2}u\cos^2\frac{1}{2}(u+du)}\left(1+\frac{\text{tang}^2\frac{1}{2}du\sin^2\frac{1}{2}u+\text{tang}^3\frac{1}{2}du\,\text{tang}\frac{1}{2}u}{3\cos^2\frac{1}{2}u+\text{tang}^2\frac{1}{2}du\cos^2\frac{1}{2}u}\right)$$
$$=\left(\tfrac{1}{4}m\,\text{tang}\tfrac{1}{2}u-\tfrac{1}{4}m\,\text{tang}^3\tfrac{1}{2}u-\tfrac{1}{5}m\,\text{tang}^5\tfrac{1}{2}u\right)$$
$$+\left(\frac{3}{32}m^2\,\text{tang}\tfrac{1}{2}u-\tfrac{7}{32}m^2\,\text{tang}^3\tfrac{1}{2}u+\tfrac{3}{28}m^2\,\text{tang}^7\tfrac{1}{2}u\right).$$

Et en négligeant les m^2 et les quantités du troisième ordre,

$$\tfrac{1}{2}\sin du=\tfrac{1}{4}m\,\text{tang}\tfrac{1}{2}u\cos^2\tfrac{1}{2}u\cos^2\tfrac{1}{2}(u+du)-\tfrac{1}{4}m\,\text{tang}^3\tfrac{1}{2}u\cos^2\tfrac{1}{2}u\cos^2\tfrac{1}{2}(u+du)$$
$$-\tfrac{1}{5}m\,\text{tang}^5\tfrac{1}{2}u\cos^2\tfrac{1}{2}u\cos^2\tfrac{1}{2}(u+du)$$
$$=\tfrac{1}{4}m\,\text{tang}\tfrac{1}{2}u\left(\cos^2\tfrac{1}{2}u\cos^2\tfrac{1}{2}u'-\sin^2\tfrac{1}{2}u\cos^2\tfrac{1}{2}u'-\tfrac{4}{5}\sin^4\tfrac{1}{2}u\frac{\cos^2\frac{1}{2}u'}{\cos^2\frac{1}{2}u}\right)$$
$$=\tfrac{1}{4}m\,\text{tang}\tfrac{1}{2}u\left(\cos^2\tfrac{1}{2}u'\cos u-\tfrac{4}{5}\sin^4\tfrac{1}{2}u\frac{\cos^2\frac{1}{2}u'}{\cos^2\frac{1}{2}u}\right)\ldots\ldots\text{(F)},$$

et si l'on néglige la différence des $\cos\frac{1}{2}u'$ aux $\cos\frac{1}{2}u$,

$$=\tfrac{1}{4}m\,\text{tang}\tfrac{1}{2}u[\cos^4\tfrac{1}{2}u-\cos^2\tfrac{1}{2}u+\cos^4\tfrac{1}{2}u-\tfrac{4}{5}(1-\cos^2\tfrac{1}{2}u)^2]$$
$$=\tfrac{1}{4}m\,\text{tang}\tfrac{1}{2}u[2\cos^4\tfrac{1}{2}u-\cos^2\tfrac{1}{2}u-\tfrac{4}{5}(1-2\cos^2\tfrac{1}{2}u+\cos^4\tfrac{1}{2}u)]$$
$$=\tfrac{1}{4}m\,\text{tang}\tfrac{1}{2}u(2\cos^4\tfrac{1}{2}u-\cos^2\tfrac{1}{2}u-\tfrac{4}{5}+\tfrac{8}{5}\cos^2\tfrac{1}{2}u-\tfrac{4}{5}\cos^4\tfrac{1}{2}u)$$
$$=\tfrac{1}{4}m\,\text{tang}\tfrac{1}{2}u(\tfrac{6}{5}\cos^4\tfrac{1}{2}u+\tfrac{3}{5}\cos^2\tfrac{1}{2}u-\tfrac{4}{5})$$
$$=m\,\text{tang}\tfrac{1}{2}u(0{,}3\cos^4\tfrac{1}{2}u+0{,}15\cos^2\tfrac{1}{2}u-0{,}2).$$

La correction de l'anomalie u' se trouvera par la formule

$$\sin du=-m\,\text{tang}\tfrac{1}{2}u(0{,}4-0{,}3\cos^2\tfrac{1}{2}u-0{,}6\cos^4\tfrac{1}{2}u)\ldots\ldots\text{(G)};$$

c'est l'équation donnée par M. Laplace, et elle se trouve identique à celle que Simpson avait trouvée d'une autre manière, *Miscellaneous tracts*, page 59.

On peut tirer de la formule (F) l'expression plus simple

$$\sin du=\tfrac{1}{2}m\,\text{tang}\tfrac{1}{2}u\cos^2\tfrac{1}{2}u\cos u-0{,}4m\,\text{tang}\tfrac{1}{2}u\sin^4\tfrac{1}{2}u$$
$$=\tfrac{1}{2}m\sin\tfrac{1}{2}u\cos\tfrac{1}{2}u\cos u-0{,}4m\,\text{tang}\tfrac{1}{2}u\sin^4\tfrac{1}{2}u$$
$$=\tfrac{1}{4}m\sin u\cos u-0{,}4m\,\text{tang}\tfrac{1}{2}u\sin^4\tfrac{1}{2}u$$
$$=\tfrac{1}{8}m\sin 2u-0{,}4m\,\text{tang}\tfrac{1}{2}u\sin^4\tfrac{1}{2}u.$$

Supposez $du = 0$, vous trouverez d'abord $\tang \frac{1}{2}u = 0$, $u = 0$; ensuite, $0{,}4 = 0{,}3 \cos^2 \frac{1}{2}u + 0{,}6 \cos^4 \frac{1}{2}u$; d'où

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}u = \left(\tfrac{35}{48}\right)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{4} = \left(\tfrac{35}{48}\right)^{\frac{1}{2}} - \cos^2 60^\circ.$$

Soit $$\cos^2 x = \left(\tfrac{35}{48}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{ou} \quad \cos^4 x = \tfrac{35}{48},$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}u = \cos^2 x - \cos^2 60^\circ = \sin(60^\circ + x)\sin(60^\circ - x),$$

et

$$\cos \tfrac{1}{2}u = \sqrt{\sin(60^\circ + x)\sin(60^\circ - x)} = \cos 78^\circ\ 0'\ 10'',$$

et

$$\frac{\tang^2 \frac{1}{2}u \sin^2 \frac{1}{2}u}{\cos u} = \tfrac{5}{4} = \text{séc}\, u \tang^2 \tfrac{1}{2}u \sin^2 \tfrac{1}{2}u.$$

du sera donc nul à 0° d'anomalie, c'est-à-dire au périhélie, et ensuite à 78° 0′ 10″, et à −78° 0′ 10″ = −2ˢ 18° 0′ 10″ = 9ˢ 11° 59′ 50″; ainsi *du* peut trois fois changer de signe pendant l'apparition de la comète; c'est ce qui est arrivé à la comète de 1759.

9. Il paraîtrait plus convenable d'éliminer les u, puisqu'on ne connaît ordinairement que les u'; j'en ai fait le calcul, et la formule en est bien plus compliquée; d'ailleurs quand on néglige les m^2, il convient aussi de négliger les $d^2 \frac{1}{2}u$. Mais peut-on négliger les m^2? Pour répondre à cette question, il faut évaluer successivement les trois termes.

Le premier $= \frac{6m^2}{32} \sin^4 \frac{1}{2}u \cos^3 \frac{1}{2}u$. Supposons $m = 0{,}03235437$, comme pour la comète de 1759, et faisons $u = 120^\circ$, le terme vaudra 1″,42.

Le deuxième terme $- \frac{14}{32} \sin^3 \frac{1}{2}u \cos \frac{1}{2}u$, dans les mêmes suppositions, irait à 24″,9.

Le troisième $+ \frac{6}{28} m^2 \tang^3 \frac{1}{2}u \sin^3 \frac{1}{2}u$ irait à 135″,24. Cette formule de correction n'est donc pas toujours suffisamment exacte; aussi voyons-nous que La Caille, qui en a fait une table, s'est arrêté à 120°, et même il nous avertit que, pour la comète de 1759, à 108° d'anomalie, elle était déjà en erreur de 52″.

10. Soit F le foyer de l'ellipse (fig. 65), P le sommet, ensorte que PF $= h$; sur la perpendiculaire BPA, prenez PA $=$ PF $= h$, menez FA, l'angle PFA sera de 45°. Sur FA menez la perpendiculaire TAD ter-

minée d'une part à l'axe FP prolongé suffisamment, et de l'autre à une ligne FD perpendiculaire à l'axe FP. Les points P et D appartiendront à notre courbe d'approximation; en effet, soit $u = 0$, $V = \frac{h}{\cos^2 \frac{1}{2} u} = \frac{h}{\cos^2 0}$; h sera le plus court de tous les rayons vecteurs. Par la construction, $PFA = 45°$; $FAD = 90°$, ainsi que TFD; donc $AFD = 45°$, $FD = \frac{FA}{\cos 45°} = \frac{FP}{\cos 45° . \cos 45°} = \frac{FP}{\cos^2 \frac{1}{2} TFD} = \frac{h}{\cos^2 \frac{1}{2} u}$, car $TFD = PFD$ est la distance angulaire au périhélie pour le rayon vecteur tiré dans la direction FD; donc FD est ce rayon vecteur, et le point D appartient à la courbe, c'est celui qui a 90° d'anomalie vraie.

Il est évident que $TA = AD = \frac{1}{2} TD$, et que $PT = PF = \frac{1}{2} TP = h$; en effet, $FD = \frac{h}{\cos^2 45°} = \frac{h}{\frac{1}{2}}$; d'où $h = \frac{1}{2} FD$.

Notre courbe passera par les points P et D; elle aura de l'autre côté de l'axe une branche toute pareille à la première.

11. Soit E un point quelconque de notre courbe; abaissons l'ordonnée EQ, nous aurons

$$EQ = FE \sin PFD = V \sin u = 2V \sin \tfrac{1}{2} u \cos \tfrac{1}{2} u$$
$$= \frac{2h \sin \frac{1}{2} u \cos \frac{1}{2} u}{\cos^2 \frac{1}{2} u} = 2h \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u.$$

Le carré de l'ordonnée ou $\overline{EQ}^2 = 4h^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} u.$

L'abscisse $PQ = PF - FQ = h - V \cos u = h - \frac{h \cos u}{\cos^2 \frac{1}{2} u}$

$$= \frac{h(\cos^2 \frac{1}{2} u - \cos u)}{\cos^2 \frac{1}{2} u} = \frac{h(\cos^2 \frac{1}{2} u - 2\cos^2 \frac{1}{2} u + 1)}{\cos^2 \frac{1}{2} u} = \frac{h(1 - \cos^2 \frac{1}{2} u)}{\cos^2 \frac{1}{2} u} = \frac{h \sin^2 \frac{1}{2} u}{\cos^2 \frac{1}{2} u} = h \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} u;$$

mais le carré de l'ordonnée $= 4h^2 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} u = 4h . h \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} u \ldots\ldots = 4h$(abscisse).

Soit $y = EQ$, nous aurons $y^2 = 4h . x$; c'est l'équation algébrique de la parabole, et cette équation est équivalente à $V = \frac{h}{\cos^2 \frac{1}{2} u}$.

12. Nous pourrons donc employer la parabole comme approximation, au lieu de l'ellipse, quand l'excentricité sera peu différente du demi-grand axe.

Or Archimède a démontré que l'aire $PQE = \frac{2}{3} . PQ . QE = \frac{2}{3} h \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} u \times$

$2h \,\text{tang}\, \tfrac{1}{2}u = \tfrac{4}{3} h^2 \,\text{tang}^3\, \tfrac{1}{2}u$; l'aire du triangle $FQE = \tfrac{1}{2} QF . QE = \tfrac{1}{2} V \cos u \times$

$$2h \,\text{tang}\, \tfrac{1}{2}u = \frac{h \cos u . h \,\text{tang}\, \frac{1}{2}u}{\cos^2 \frac{1}{2}u} = \frac{h^2 \sin \frac{1}{2}u \cos u}{\cos^3 \frac{1}{2}u} = \frac{h^2 \sin \frac{1}{2}u (2\cos^2 \frac{1}{2}u - 1)}{\cos^3 \frac{1}{2}u} = 2h^2 \,\text{tang}\, \tfrac{1}{2}u$$

$$- \frac{h^2 \,\text{tang}\, \frac{1}{2}u}{\cos^2 \frac{1}{2}u} = 2h^2 \,\text{tang}\, \tfrac{1}{2}u - h^2 \,\text{tang}\, \tfrac{1}{2}u - h^2 \,\text{tang}^3\, \tfrac{1}{2}u = h^2 \,\text{tang}\, \tfrac{1}{2}u - h^2 \,\text{tang}^3\, \tfrac{1}{2}u;$$

le secteur $PFE = PQE + EQF = \tfrac{4}{3} h^2 \,\text{tang}^3\, \tfrac{1}{2}u + h^2 \,\text{tang}\, \tfrac{1}{2}u - h^2 \,\text{tang}^3\, \tfrac{1}{2}u$ $= \tfrac{1}{3} h^2 \,\text{tang}^3\, \tfrac{1}{2}u + h^2 \,\text{tang}\, \tfrac{1}{2}u = h^2 (\tfrac{1}{3} \,\text{tang}^3\, \tfrac{1}{2}u + \text{tang}\, \tfrac{1}{2}u)$.

13. Telle est donc l'expression générale d'un secteur parabolique; il uous reste à déterminer en combien de tems la comète décrira le secteur quelcouque PFE.

Nous ne pouvons, comme daus l'ellipse, comparer ce secteur à l'aire entière de la courbe, car cette dernière aire est infinie; nous ne pouvons non plus comparer le tems du secteur à celui de la révolution, qui n'a pas de terme, puisque la courbe n'est pas rentrante, et qu'une comète qui décrirait une parabole s'éloignerait sans cesse du soleil, saus pouvoir cependant arriver jamais à 180° d'anomalie vraie.

14. Mais eutre les secteurs nous pourrons choisir pour objet de comparaison celui qui sera le plus facile à calculer, c'est celui de 90°; en effet, soit $u = 90°$, $\tfrac{1}{2}u = 45°$, et le secteur $PFD = h^2(\tfrac{1}{3}+1) = \tfrac{4}{3}h^2 = \tfrac{4}{3}$, en faisant $h = 1$, pour plus de simplicité.

Cherchons donc le tems que la comète doit employer à décrire le secteur ou à traverser l'angle de 90°.

15. Daus le cercle, la chute vers le soleil est égale à l'excès de la sécante sur le rayon, ou (fig. 66) $KL = \frac{2 \,\text{tang}^2 \frac{1}{2} F}{1 - \text{tang}^2 \frac{1}{2} F} = 2 \,\text{tang}^2\, \tfrac{1}{2}F + 2 \,\text{tang}^4\, \tfrac{1}{2}F + \text{etc.}$

Si la courbe est parabolique,

$$K'L' = F'K' - F'L' = \text{séc}\, F' - F'L' = \text{séc}\, F' - \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}F'},$$

ou

$$\begin{aligned} K'L' &= 1 + 2 \,\text{tang}^2\, \tfrac{1}{2}F' + 2 \,\text{tang}^4\, \tfrac{1}{2}F' + \text{etc.} \\ &\quad - 1 - \text{tang}^2\, \tfrac{1}{2}F' \\ &= \text{tang}^2\, \tfrac{1}{2}F' + 2 \,\text{tang}^4\, \tfrac{1}{2}F' + 2 \,\text{tang}^6\, \tfrac{1}{2}F' + \text{etc.} \end{aligned}$$

donc

$$\frac{K'L'}{KL} = \frac{1 \,\text{tang}^2\, \frac{1}{2}F' + 2 \,\text{tang}^4\, \frac{1}{2}F' + 2 \,\text{tang}^6\, \frac{1}{2}F' + \text{etc.}}{2 \,\text{tang}^2\, \frac{1}{2}F + 2 \,\text{tang}^4\, \frac{1}{2}F + 2 \,\text{tang}^6\, \frac{1}{2}F + \text{etc.}}$$

Mais la comète dont la distance périhélie serait égale à l'unité serait à la même distance que la planète qui décrirait le cercle qui aurait ce même rayon; les deux corps seraient également attirés, les chutes seraient égales; soit F' l'angle traversé par la comète, F l'angle traversé par la planète; on aurait en négligeant les puissances supérieures

$$\text{tang}^2 \tfrac{1}{2} F' = 2 \,\text{tang}^2 \tfrac{1}{2} F, \quad \text{et} \quad \text{tang} \tfrac{1}{2} F' = \text{tang} \tfrac{1}{2} F \sqrt{2}, \quad \text{ou} \quad F' = F \sqrt{2}.$$

Or les vitesses sont comme les angles traversés en même tems; elles seront donc comme $1 : \sqrt{2}$. Les tems sont en raison inverse des vitesses; ainsi les tems employés par la comète et la terre, à traverser un même angle, seront $:: 1 : \sqrt{2}$.

16. Il nous est aisé de connaître en combien de tems la terre, par son mouvement moyen, décrirait un secteur circulaire dont l'aire serait $\frac{4}{3}$; nous dirons :

$$\text{L'année sidérale : la surface du cercle :: le tems cherché : } \tfrac{4}{3};$$

$$A : \pi :: T : \tfrac{4}{3}, \quad \text{d'où} \quad T = \frac{\frac{4}{3} A}{\pi};$$

le tems employé par la comète sera donc

$$t = \frac{\frac{4}{3} A}{\pi \sqrt{2}} = \frac{4A}{3\pi \sqrt{2}} = \frac{A\sqrt{16}}{3\pi \sqrt{2}} = \frac{A}{3\pi} \sqrt{8} = \frac{A}{\pi} \sqrt{\tfrac{8}{9}}.$$

$\frac{1}{2}\log(\frac{8}{9})$...	9.97442.57388
C. $\log \pi$...	9.50285.01273
	9.47727.38661
A...	2.56259.77064
$109^j,6154$...	2.03987.15725.

Nous avons $109^j,6154$ pour le tems que la comète, dont la distance périhélie est 1, doit employer à traverser l'angle de 90°.

C'est ce qui a fait donner à cette comète le nom de *comète de* 109 *jours*.

Je me suis arrêté à ce nombre de $109^j,6154$, dans la construction de la table dont nous allons parler, en négligeant une fraction dont il est difficile de répondre; on pourrait, sans inconvénient, porter ce nombre à $109^j,6155$, en augmentant un peu la valeur de A.

17.

17. Les tems sont proportionnels aux secteurs dans la parabolé comme daus l'ellipse; on dira douc

$$\text{tems de } 90^\circ : \text{secteur de } 90^\circ :: \text{tems de } u : \text{secteur de } u;$$
$$109^j{,}6154 : \tfrac{4}{3} :: t : (\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}u + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u),$$

et

$$t = \tfrac{3}{4}(109^j{,}6154)(\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}u + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u) = 109^j{,}6154(\tfrac{1}{4}\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}u + \tfrac{3}{4}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u)$$
$$= 27^j{,}40385(\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}u + 3\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u) = 1^j{,}096154(25\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}u + 75\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u),$$

équation ideutique à celle que nous avions trouvée en négligeant m daus la formule elliptique (7).

18. Ce tems est celui de la comète dont la distance périhélie $h = 1$; pour les différentes comètes, les tems sont en raison des puissances $\frac{3}{2}$ de h (5); ainsi la formule générale sera

$$t = h^{\frac{3}{2}} \cdot 1^j{,}096154\,(25\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}u + 75\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u).$$

19. Si l'anomalie u est connue, on aura le tems par un calcul direct et facile. Si c'est le tems qui est connu, pour déterminer l'anomalie, la formule sera

$$25\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}u + 75\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u = \frac{t}{1^j{.}096154h^{\frac{3}{2}}},$$

ou

$$\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}u + 3\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u = \frac{t}{27^j{,}40385h^{\frac{3}{2}}}.$$

On aura donc à résoudre une équation du troisième degré. Pour cela, soit

$$\operatorname{tang} B = \frac{54.8077h^{\frac{3}{2}}}{t};\ \operatorname{tang} A = \sqrt[3]{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B};$$

alors $\operatorname{tang}\frac{1}{2}u = 2\cot 2A$. (Voyez la Trigonométrie de Cagnoli.)

20. On peut ainsi calculer une table des anomalies u pour tous les jours ou fractions de jour, en supposant $h = 1$; cette table servira pour toutes les comètes, avec une attention fort aisée. En effet, supposons une comète quelconque, et comparons-la à celle de 109 jours, lorsqu'elles ont même anomalie.

Pour la comète de 109 jours, nous aurons

$$\tang^3 \tfrac{1}{2} u + 3 \tang \tfrac{1}{2} u = \frac{t}{27.40385}.$$

Pour celle dont la distance périhélie est h nous aurons

$$\tang^3 \tfrac{1}{2} u + 3 \tang \tfrac{1}{2} u = \frac{t'}{27.40385 h^{\frac{3}{2}}}.$$

Or les premiers membres sont égaux par supposition, donc

$$t = \frac{t'}{h^{\frac{3}{2}}}, \qquad t' = th^{\frac{3}{2}}.$$

Ainsi le tems t' étant donné, il faudra le diviser par $h^{\frac{3}{2}}$, et l'on aura t, et avec t la table générale donnera u.

Ainsi quand on connaît le tems écoulé depuis le passage par le périhélie, avec la distance périhélie h, on est en état de calculer l'anomalie parabolique de la comète, et quand on connaît cette distance et l'instant du périhélie, on peut calculer pour un jour donné l'anomalie de la comète. Soit θ le tems du passage par le périhélie, θ' l'instant pour lequel on calcule $t' = \theta - \theta'$ et $t = \frac{t'}{h^{\frac{3}{2}}}$.

Si l'anomalie est donnée, la même table donnera le tems t de la comète de 109 jours, et l'on en conclura $t' = t.h^{\frac{3}{2}}$. C'est ainsi que les tables de logarithmes, destinées principalement à donner le logarithme d'un nombre, servent également à trouver le nombre d'un logarithme; il suffit de renverser la règle de trois qui sert à calculer la partie proportionnelle.

Dans tous les cas, on trouve le rayon vecteur par la formule

$$V = \frac{h}{\cos^2 \frac{1}{2} u}.$$

21. La Caille, premier auteur de la table dont nous venons d'expliquer la construction, Schulze et Pingré, qui l'ont successivement étendue, résolvaient par tâtonnement l'équation du troisième degré, c'est-à-dire que connaissant à peu près l'anomalie qui répondait au nombre de jours, ils essayaient diverses anomalies et déterminaient, par une règle de

trois, celle qui donnait exactement le nombre de jours. J'ai préféré les formules ci-dessus, qui vont directement au but : elles exigent une grande précision dans le calcul, il faut la porter jusqu'aux centièmes de seconde pour les angles B et A, ce qui est toujours possible, parce que ces angles s'obtiennent par leurs tangentes ; mais on n'a besoin de chercher de cette manière qu'un petit nombre d'anomalies, on remplit le reste par interpolation. C'est en essayant diverses méthodes, que j'ai été conduit insensiblement à refaire la table entière avec plus d'étendue et d'exactitude.

22. Différentiez l'équation $t = C(\text{tang}^3 \tfrac{1}{2}u + 3\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u)$, vous aurez

$$dt = C\left(\frac{3d\tfrac{1}{2}u\,\text{tang}^2\tfrac{1}{2}u}{\cos^2\tfrac{1}{2}u} + \frac{3d\tfrac{1}{2}u}{\cos^2\tfrac{1}{2}u}\right) = \frac{3Cd\tfrac{1}{2}u(1+\text{tang}^2\tfrac{1}{2}u)}{\cos^2\tfrac{1}{2}u} = \frac{3Cd\tfrac{1}{2}u}{\cos^4\tfrac{1}{2}u} = \frac{\tfrac{3}{2}Cdu}{\cos^4\tfrac{1}{2}u},$$

ou

$$du = \frac{dt\cos^4\tfrac{1}{2}u}{\tfrac{3}{2}C} = \frac{dt\cos^4\tfrac{1}{2}u}{41.105775\sin 1''}\ldots\text{(M)};$$

l'expression générale de *du* serait

$$du = \frac{dt\cos^4\tfrac{1}{2}u}{h^{\frac{3}{2}}41.105775\sin 1''} = \frac{dt\cos^4\tfrac{1}{2}u.h^2}{h^{\frac{3}{2}}41.105775\sin 1''\,h^2} = \frac{h^2dt}{h^{\frac{3}{2}}\,41.105775\sin 1''\,v^2}$$
$$= \frac{h^{\frac{1}{2}}dt}{41.105775\sin 1''\,v^2},$$

et pour un jour,

$$du = \frac{1^\circ\,23'\,27'',9\,h^{\frac{1}{2}}}{v^2}.$$

La formule (M) a été donnée par Cagnoli ; elle est infinitésimale et n'aurait qu'une exactitude bornée à un petit nombre de termes. Il est aisé de voir qu'on la rendra moins défectueuse, en faisant

$$du = \frac{dt\cos^2\tfrac{1}{2}u\cos^2\tfrac{1}{2}(u+du)}{41.105775\sin 1''} = 1^\circ\,23'\,37'',9\,dt\cos^2\tfrac{1}{2}u\cos^2\tfrac{1}{2}(u+du).$$

Nous avons donné (8) une expression qui prouve que celle-ci est suffisante pour notre objet actuel.

Supposez $u = 0$, vous aurez

$$du = \frac{dt\cos^2\tfrac{1}{2}du}{41.105775\sin 1''} = \frac{dt}{41.105775\sin 1''}(1 - \sin^2\tfrac{1}{2}du);$$

en supposant, comme j'ai fait, $dt=0,25$, j'avais $du=20'\,54'',5$ pour premier terme de la table; $\frac{dt \sin^2 \frac{1}{2} du}{41.105} = \frac{dt \sin^2 10'\,27'',5}{41.105}$ n'étant pas un millième de la première partie, il était facile d'en tenir compte.

La marche des différences est assez régulière pour qu'on sache toujours à fort peu près quelle doit être la valeur de $(u+du)$, car u est toujours connu; on a donc du avec une exactitude plus que suffisante, et j'ai ainsi, de proche en proche, calculé les trois cents premiers nombres de la table, en vérifiant mon interpolation de cent en cent termes, par les formules directes.

Plus on avance, plus le mouvement se ralentit; on fait les intervalles dt de plus grands en plus grands; à 200.000 jours l'anomalie n'est encore que de $174^\circ\,4'\,55''$, et ne varie que de $36''$ pour 1000 jours. On n'observe jamais la comète aussi long-tems; mais il faut se souvenir que $t'=t.h^{\frac{3}{2}}$. Soit $h=0,2$, les 200.000 jours se réduisent à 17888. Soit $h=0.1$, ils se réduiront à 6325, ce qui est encore beaucoup trop; il y avait donc du luxe à prolonger ainsi la table, et c'est la facilité de la méthode qui m'a séduit. Nous verrons que Barker a encore été plus loin.

23. Différentiez une seconde fois la formule, et vous aurez

$$d^2u = -\frac{8(dt)^2 \cos^7 \frac{1}{2} u \sin \frac{1}{2} u}{(82.2115)^2 \sin 1''}.$$

Cette expression peut se réduire en une table dépendante de u; on y prend à vue la seconde différence dont on a besoin; on forme ainsi la table des différences premières, par des soustractions faciles, et ces différences premières ajoutées successivement, donnent les anomalies, qu'on vérifie de cent en cent par le calcul direct.

24. Ces tables ont pour argument le nombre de jours depuis le périhélie, et c'est ce qu'il y a de plus commode pour une comète dont on a les élémens; mais pour déterminer une orbite inconnue, il peut être avantageux en certains cas d'avoir l'anomalie pour argument.

L'équation $\frac{t}{1.096154\, h^{\frac{3}{2}}} = 25 \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} u + 75 \operatorname{tang} \frac{1}{2} u$, en exécutant la division, devient

$$0.912281\, t.h^{-\frac{3}{2}} = 25 \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} u + 75 \operatorname{tang} \frac{1}{2} u.$$

Supposez $h=1$, le premier membre deviendra ce que Halley appelle *mouvement moyen;* il en avait fait l'argument de sa table, et il avait mis à côté l'anomalie correspondante. Pour faire usage de cette table, au log constant 9.9601287, qui est le log de 0.912281, on ajoutait le log du tems donné et les $\frac{3}{2}$ du complément de log h. On cherchait le nombre de ce logarithme, avec lequel on prenait dans la table l'anomalie et le log du rayon vecteur.

La méthode de La Caille épargnait le log constant; sa table avait les différences premières moins fortes dans le rapport 1° 23′ 37″ à 1° 31′ 40″. Mais cette table finissant à 1000 jours, l'anomalie n'allait que jusqu'à 163° 45′ 7″; celle de Halley allait à 172° 45′ 44″. A l'exemple de La Caille, nous avons supprimé le log. du rayon vecteur, dont les différences croissaient trop inégalement; il est aussi simple et plus exact de recourir à la formule $V=h\,\text{séc}^2\frac{1}{2}u$.

Si u était donné, la table faisait trouver le mouvement moyen par une opération inverse.

25. Barker a donné à sa table une disposition toute contraire et qui paraît, au premier coup-d'œil, offrir plus de facilité dans la construction; il a pris l'anomalie pour argument, alors l'équation est linéaire. A côté de chaque anomalie il a placé le mouvement moyen $=0.912281\,t$, on le multiplie par $\frac{h^{\frac{3}{2}}}{0.912281}$, quantité que Barker appelle *mouvement moyen diurne*, et l'on a t'.

Quand on veut trouver l'anomalie par le tems, on calcule $t=\frac{0.912281}{h^{\frac{3}{2}}}$, avec lequel on entre dans la seconde colonne de la table, et l'on trouve dans la première l'anomalie demandée.

La table de Barker s'étend jusqu'à 179° 55′ d'anomalie; elle procède uniformément, de 5 en 5′. Pour les 45 premiers degrés elle donne les nombres naturels, parce que les logarithmes croîtraient trop inégalement; il serait plus commode de trouver directement les logarithmes, et c'est ce qui a lieu en effet depuis 45° jusqu'à la fin.

C'est une espèce de disparate, que ces logarithmes qui succèdent aux nombres dans une même table, mais elle est inévitable. Le mal est que les nombres se trouvent précisément dans les 90° qui avoisinent le périhélie et dont on fait le plus d'usage.

Les nombres de Barker n'avaient que cinq décimales, et les loga-

rithmes en avaient six. M. de Zach, à la suite du Traité de M. Olbers sur les comètes, a donné une table de même genre que celle de Barker, mais à six décimales pour les nombres et sept pour les logarithmes. Il a pris pour log constant 9.9602283. Le complément du logarithme de 109.6154 est 9.9601284; nous nous arrêterons à ce dernier, que suppose notre table; la différence, au reste, est fort peu importante.

26. Le seul embarras qu'on éprouve dans le calcul de cette table est la grandeur des nombres quand l'anomalie est grande. Le mouvement moyen est alors un nombre composé de 7, 8, 9 et même 10 figures, dont il est difficile d'avoir les logarithmes avec précision, à moins de formules particulières. M. de Zach n'a point dit comment il a fait ses calculs. Voici les moyens dont je me suis servi pour calculer la table qu'on verra la dernière à la fin du chapitre.

27. Avec les grandes tables de Rheticus, les nombres $75\,\text{tang}\,\frac{1}{2}u$ sont aisés à former : on prend la moitié et le quart de la tangente multipliés par 100. Le terme $25\,\text{tang}^3\frac{1}{2}u$ n'est pas difficile à calculer par logarithmes, tant que la tangente est celle d'un arc au-dessous de $22^\circ\frac{1}{2}$; je m'en suis tenu à ce procédé. J'aurais pu l'abréger en construisant la table par les différences premières. On a encore

$$75\,\text{tang}\tfrac{1}{2}u\left(1+\frac{\frac{1}{3}\sin^2\frac{1}{2}u}{1-\sin^2\frac{1}{2}u}\right)=75\,\text{tang}\tfrac{1}{2}u+25\,\text{tang}\tfrac{1}{2}u(\sin^2\tfrac{1}{2}u+\sin^4\tfrac{1}{2}u+\sin^6\tfrac{1}{2}u+\text{etc.}),$$

qui se calcule facilement tant que $\sin\frac{1}{2}u$ est une petite fraction.

28. Soit
$$\begin{aligned}
m' &= 75\,\text{tang}\tfrac{1}{2}u' + 25\,\text{tang}^3\tfrac{1}{2}u',\\
m &= 75\,\text{tang}\tfrac{1}{2}u + 25\,\text{tang}^3\tfrac{1}{2}u,\\
m'-m &= 75(\text{tang}\tfrac{1}{2}u' - \text{tang}\tfrac{1}{2}u) + 25(\text{tang}^3\tfrac{1}{2}u' - \text{tang}^3\tfrac{1}{2}u)\\
&= 75[(\text{tang}\tfrac{1}{2}u' - \text{tang}\tfrac{1}{2}u) + \tfrac{1}{3}(\text{tang}^3\tfrac{1}{2}u' - \text{tang}^3\tfrac{1}{2}u)]\\
&= \frac{37.5\sin du(1+\frac{1}{3}\text{tang}^2\frac{1}{2}du)}{\cos^2\frac{1}{2}u\cos^2\frac{1}{2}(u+du)}(1+\text{tang}^2\tfrac{1}{2}du\,\text{tang}^2\tfrac{1}{2}u) \qquad (8)\\
&= \frac{37.5\sin du\,(1+\frac{1}{3}\text{tang}^2\frac{1}{2}du)}{\cos^2\frac{1}{2}u\cos^2\frac{1}{2}(u+du)};
\end{aligned}$$

l'erreur sera insensible; mais on voit que $(m'-m)$ trouvé par cette formule sera toujours un peu trop faible.

Dans la construction d'une table, le numérat. $37.5\sin du\,(1+\frac{1}{3}\text{tang}^2\frac{1}{2}du)$ est une quantité constante et toute connue; nous pourrons donc faire

une table des différences premières, et nous en servir pour calculer la table en partant de $u = 0$, qui donne $m = 0$.

Supposons $du = 5'$, comme Barker, nous ferons le calcul suivant :

Log 37.5......	1.16269.59683
$\sin du = 0° 5'$......	7.57403.12677
37.5 sin du......	8.73672.72360
a ci-dessous......	00766
log constant......	8.73672.73126.
C. log 3......	9.52288
$\tang^2 \frac{1}{2} du = 2' 30''$......	3.72333
C. log (log hyp. 10)......	9.63778
$\log a = 0.00000.00766$......	2.88399.

Car des deux termes qui composent le numérateur

$$37.5 \sin du + \frac{37.5 \sin du \tang^2 \frac{1}{2} du}{3},$$

le second qui est fort petit peut passer pour la différentielle du premier ; or $d \log n = \frac{dn}{n \log \text{hyp.} 10}$; soit $n = 37.5 \sin du$, et $dn = \frac{37.5 \sin du \tang^2 \frac{1}{2} du}{3}$, nous aurons $d \log n = \frac{37.5 \sin du \tang^2 \frac{1}{2} du}{3 \log \text{hyp.} 10 . 37.5 \sin du} = \frac{\tang^2 \frac{1}{2} du}{3 \log \text{hyp.} 10}$; nous aurons ainsi 0.00000.00766 à ajouter au log 37.5 sin du pour avoir le logarithme du numérateur entier 8.73672.73126.

29. Ce logarithme va nous servir à commencer la table.

Log constant....	8.73672.73126
C. $\cos^2 \frac{1}{2} u = 0$....	0.00000.00000
C. $\cos^2 \frac{1}{2} u' = \frac{1}{2} (5') = 2' 30''$....	2298
$m' - m = 0.05454.15583$	8.73672.75424

à 0°..... $m = 0$

donc à 5'..... $m' = 0.05454.15583$.

Nous avons donc à la fois la première des différences premières et

le second terme de la table; pour avoir le troisième,

log constant....	8.73672.73126
ci-dessus C. $\cos^2 \frac{1}{2} u = 2' \, 30''$....	2298
C. $\cos^2 \frac{1}{2} u' = 5'$.......	9188
$m' - m = 0.05454.16737$....	8.73672.84612
$m = 0.05454.15583$	

donc à 0° 10'...... $m' = 0.10908.32320$

$\Delta^2 m$...... $=$ 01154.

	8.73672.73126
C. $\cos^2 \frac{1}{2} u = 5'$.......	9188
C. $\cos^2 \frac{1}{2} u' = 7' \, 30''$....	20672
$m' - m = 0.05454.19044$....	8.73673.02986
$m = 0.10908.32320$	

à 0° 15'.... $m' = 0.16362.51364$

$\Delta^2 m$................ 2307.

On voit donc que le calcul est de la plus grande facilité; que dans chaque opération on reprend deux logarithmes de l'opération précédente et que pour chaque terme il n'y a que deux logarithmes à chercher; et si l'on se sert des tables de Vlacq, à 10 décimales, on aura un grand nombre de termes avec une précision suffisante pour ne recourir, qu'à certains intervalles, au calcul direct de la formule $m = 75 \tang \frac{1}{2} u (1 + \frac{1}{3} \tang^2 \frac{1}{2} u)$; la table des différences premières, calculée ainsi d'avance, sera même une excellente vérification des calculs directs. On irait donc ainsi, de proche en proche, jusqu'à $u = 45°$, en se servant des deux méthodes alternativement. On pourrait varier le procédé par l'usage des secondes différences.

30. Ces procédés nous conduiraient jusqu'à 45°. Mais dans cette partie de la table, on peut donner le log de $m = 75 \tang \frac{1}{2} u (1 + \frac{1}{3} \tang^2 \frac{1}{2} u)$. Quoique cette formule soit facile à calculer, il n'est pas aussi aisé qu'on le croirait d'obtenir le logarithme avec l'exactitude qu'on doit desirer dans une table. On va le voir en cherchant $\log m$ pour $u = 45°$.

C.

C. log 3......	9.52287.87453
2 log tang $\frac{1}{2}u$......	9.23444.86292
0.05719.09584......	8.75732.73745
1.05719.09584 = $1+\frac{1}{3}$ tang$^2\frac{1}{2}u$	
4.10817.	

Log 75......	1.87506.12634
log tang $\frac{1}{2}u$ = 22° 50'......	9.61722.43146
log 1.05719.09544......	0.02411.60728
	3.69735.3
	3697.4
	205.4
	32.8
	1.6
	1.51643.90180.5

On voit que, même en calculant $1+\frac{1}{3}$ tang$^2\frac{1}{2}u$ à dix décimales, nous ne serions pas encore sûrs de la dixième décimale de notre logarithme, sans parler de l'inexactitude des logarithmes de Vlacq, dont la dernière figure n'est pas toujours exacte, à une, deux ou trois parties près. D'ailleurs le calcul des parties proportionnelles est très-fastidieux, et par conséquent fort sujet à erreur. A la vérité, nous n'avons pas besoin de dix décimales; mais si nous nous servions des logarithmes de Gardiner ou de Callet, nous ne pourrions jamais compter même sur la septième décimale. Pour éviter ces fautes et cet ennui, voici comme je dispose l'opération :

31. $\log 75 \text{tang} \frac{1}{2}u(1+\frac{1}{3}\text{tang}^2\frac{1}{2}u) = \log(75 \text{ tang} \frac{1}{2}u)(1+x)$
$= \log(75 \text{tang} \frac{1}{2}u)(1+m+dm)$.

En faisant $m+dm=x$, et prenant pour m le nombre immédiatement inférieur à celui dont le log est celui de $\frac{1}{3}$tang$^2\frac{1}{2}u$.

Ici, par exemple, log x est......................	8.75732.73745
m est 0.057190 dont le log est.........	8.75732.00965
log x — log m......	0.72780
La différence que je vois dans la table, à côté de log m est	75939

Ainsi $dm = \frac{72780}{75939}$; j'en fais le calcul par les tables de Callet :

	72780...	4.8620121
C....	75939...	5.1195351
$dm =$	0.95840...	9.9815472
$m =$	0.057190.	
$1 =$	1.	

et j'ai $1 + m + dm = 1 + x =$ 1.057190.95840

Mais les tables ne donneront que

le log de.................... 1.0571........ $= 1 \pm m'$.

Il restera à calculer, comme ci-dessus, la partie proportionnelle pour $dm' = 0.00009.095840$, en multipliant ce nombre par 410817 différence des tables à côté de $1 + m' = 1.0571$. Je ferai ce petit calcul par les tables de Callet, en prenant $1 + m'$ pour un entier, et mettant les chiffres suivans sous la forme de fractions 0.9095840 :

log différence des tables..........	4.10817......	5.6136484
log de la fraction...........	0.909584.....	9.9588428
partie proportionnelle........	3.73673......	5.5724912
log ($1 + m'$)...........	0.02411.60728	
log (75 tang $\frac{1}{2}u$)........	1.49228.55780	
log pour $45° = u$......	1.51643.90181	

Nos deux calculs sont d'accord à une demi-unité près sur la dixième décimale, ce qui n'arriverait pas toujours.

On peut resserrer le calcul en un moindre espace, comme dans l'exemple suivant, où nous supposerons $u = 45°5'$ et $\frac{1}{2}u = 22°32'30''$,

32.

log $\frac{1}{3}$....	9.52287.87453	
2 log tang $\frac{1}{2}u$....	9.23623.39242	
log x....	8.75911.26695	
log m = 0.057426....	0.85666	
log x — log m	0.41029	
$1 + m$ = 1.057426....	0.75626	$= d \log m$
$1 + m'$ = 1.0574		

$$
\begin{array}{rl}
\log 75 \ldots & 1.87506.12635 \\
\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u = 22^\circ\, 32'\, 30'' \ldots & 9.61811.69621 \\
\log(1+m') = 1.0574 \ldots & 0.02423.93061 \\
d \log(1+m') = 4.10699 \ldots & 1.08985 \\
\text{pour } 45^\circ\, 5' \ldots & \overline{1.51742.84302} \\
\text{Table de M. de Zach} \ldots & 1.51742.85
\end{array}
$$

Après avoir pris dans les tables de Vlacq tous les grands logarithmes, j'achève avec les tables de Callet.

$$
\begin{array}{rl}
\text{Log}(\log x - \log m) = 41029 \ldots & 4.6130909 \\
\text{C. }\log(d \log m) = 75626 \ldots & 5.1213289 \\
dm = 0.542525 \ldots & \overline{9.7344198}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlll}
1 + m = & 1.057426. & & \\
1 + m + dm = & \overline{1.057426.542525} & & \\
1 + m' = & 1.0574 & & \\
dm' = & \overline{0.000026.542525} & \log \ldots & 9.4239422 \\
\log d \log(1+m') = & 4.10699 & \log \ldots & 5.6134236 \\
a = & 1.08985 & & \overline{5.0373658}
\end{array}
$$

Ce dernier nombre est ce qui manquait à notre logarithme pour $45^\circ\, 5'$; ce calcul n'est pas encore bien court, mais il est beaucoup plus facile; on pourrait se flatter d'avoir ainsi neuf décimales exactes. On peut, sans aucune difficulté, aller ainsi jusqu'à $u = 90^\circ$, où l'on aurait $75(1 + \frac{1}{3}) = 100$, et le log serait 2.0000000; on voit que jusque-là x serait $< \frac{1}{3}$.

33. Il arrive un moment où le second terme égalera le premier; c'est quand on aura $\frac{1}{3} \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} u = \operatorname{tang} \frac{1}{2} u = \sqrt{3} = \operatorname{tang} 60^\circ$ et $u = 120^\circ$; alors $x = 1$ et le log cherché sera $2.41465.18865$; ensuite m commençant par le chiffre 1, nous aurons par les tables deux figures de moins dans le nombre m; alors on pourra changer la formule

$$75 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u + 25 \operatorname{tang}^3 \tfrac{1}{2} u$$

en $\quad 25 \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} u + 75 \operatorname{tang} \frac{1}{2} u = 25 \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} u (1 + 3 \cot^2 \frac{1}{2} u).$

Soit donc $\quad u = 120^\circ\, 5',\ \ \frac{1}{2} u = 60^\circ\, 2'\, 30'',$

25....	1.39794.00087	
$\tang^3 \frac{1}{2} u = 60° 2'30''$...	0.71787.09216	
$1 + m' = 1.9966$....	0.30029.10668	
correction ci-dessous...	0.98619	
	2.41611.18590	
M. de Zach.......	2.41611.19	
log. 3.....	0.47712.12547	
$\cot^2 \frac{1}{2} u$....	9.52141.93856	
$\log x$......	9.99854.06403	
$\log m = 0.99664$...	5.83135	
	23268....	4.3367591
C. $d \log m$.....	43576....	5.3607526
	0.53396.4..	9.7275117
	4	
	4.53396.4..	5.6564781
	21751.1..	4.3374812
Correction........	+ 0.98619....	9.9939593

34. Les derniers termes de la table où les différences premières sont énormes, sont cependant les plus faciles à calculer. En effet,

$$\log 25 \tang^3 \tfrac{1}{2} u (1 + 3 \cot^2 \tfrac{1}{2} u) = \log (25 \tang^3 \tfrac{1}{2} u) + K (x - \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{3} x^3 - \text{etc.});$$

$x = 3 \cot^2 \frac{1}{2} u$ est une petite fraction ; le premier terme de la série suffira d'abord, ensuite on en prendra deux, puis trois, etc.

35. Tous ces moyens, quoique faciles, sont ennuyeux par leur uniformité même; on peut les réserver pour quelques termes placés à certaine distance, et chercher des formules d'interpolation.

On a généralement

$$\log (n + dn) = \log n + K \left[\frac{dn}{n} - \frac{1}{2} \left(\frac{dn}{n} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{dn}{n} \right)^3 - \text{etc.} \right]$$
$$= \log n + 2K \left[\left(\frac{dn}{2n + dn} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{dn}{2n + dn} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{dn}{2n + dn} \right)^5 + \text{etc.} \right].$$

Or (24) $dn = \frac{37.5 \sin du}{\cos^2 \frac{1}{2} u \cos^2 \frac{1}{2} (u + du)}$, on a le logarithme n, dernier log.

trouvé,

$$d\log n = \log(n+dn) - \log n$$
$$= K\left(\frac{37.5 \sin du}{n \cos^2 \frac{1}{2} u \cos^2 \frac{1}{2}(u+du)} - \frac{1}{2}(\quad)^2 + \frac{1}{3}(\quad)^3 - \text{etc.}\right)$$

Soit $u = 45°$, $du = 5'$,

	log. 37.5 sin du....	8.7367273
	C. cos²(22° 30')….	0.0343847
		0.0343847
	C. cos²(22° 32′ 30″)…	0.0345156
		0.0345156
	C. log n….	8.4835610
		7.3580889 …(a)
	K….	9.6377843
1er terme…………	0.000990543	6.9958732
2e terme…………	— 0.1130	7.3580889 …(a)
	0.000989413	9.69897 … C.log 2
log n (30)………..	1.5164390 18	4.05293 … 01130
log ($n+dx$) à 45°5'..	1.517428431	0.30103 … log 2
		7.35809 …(a)
		9.52287 C.log 3
		1.23492 ….+ 00002.

On voit que le troisième terme de la série est insensible ; en prenant la seconde série, on aura

$$d\log n = K\left(\frac{dn}{n + \frac{1}{2}dn}\right);$$

dont le logarithme est

$$\log K + \log(37{,}5 \sin du) - \log\cos^2 \tfrac{1}{2}u - \log\cos^2 \tfrac{1}{2}(u+du)$$
$$- \log n - \tfrac{1}{2} d\log n$$
$$= \log K + \log\text{const.} + \log\text{séc}^2 \tfrac{1}{2}u + \log\text{séc}^2 \tfrac{1}{2}(u+du)$$
$$+ \text{complément}\log n - \tfrac{1}{2} d\log n,$$

$$
\begin{array}{rrr}
 & \log K(37{,}5 \sin du)\ldots\ldots & 8.3745116 \\
 & \text{séc}^2(22^\circ\ 30')\ldots\ldots\ldots & 0.0687694 \\
 & \text{séc}^2(22^\circ\ 32'\ 30'')\ldots\ldots & 0.0690312 \\
 & \text{C.} \log n\ldots & 8.4835610 \\
 & -\tfrac{1}{2} d \log n\ldots & -\ 4947 \\
d \log n\ldots\ 0.0009894.14 & & 6.9953785 \\
\log n\ldots\ \bar{1}.5164390.18 & & \\
\log \text{pour } u = 45^\circ\ 5'\ldots\ \bar{1}.5174284.32 & &
\end{array}
$$

Après douze calculs semblables, notre interpolation est exacte jusqu'à la neuvième décimale; $\frac{1}{2} d \log n$ est connu d'avance à fort peu près.

56. La différence première va en diminuant environ de 0.0000010. On pourrait calculer cette diminution, c'est-à-dire la deuxième différence; mais ce calcul ne serait pas plus court que celui de la différence première, et les erreurs s'accumuleraient plus rapidement. Ainsi j'ai cru devoir m'en tenir aux différences premières pour l'interpolation et aux formules ci-dessus pour les calculs des termes principaux.

57. Quand on connaît les élémens d'une comète, on peut donc, au moyen de ces tables et surtout de la première, calculer l'anomalie par le tems. A cette anomalie on ajoute le lieu du périhélie, on a la longitude de la comète dans son orbite; on en retranche le lieu du nœud, on a l'argument de latitude qui sert avec l'inclinaison à calculer la réduction à l'écliptique et la latitude; on cherche le rayon vecteur $v = \frac{h}{\cos^2 \frac{1}{2} u}$, et la distance accourcie $\frac{h \cos \lambda}{\cos^2 \frac{1}{2} u}$; alors le calcul du lieu géocentrique est le même que celui d'une planète supérieure, si l'on a $\frac{h \cos \lambda}{\cos^2 \frac{1}{2} u} > \text{V}$ rayon vecteur de la terre : s'il est plus petit, le calcul est le même que pour une planète inférieure.

58. Quand l'inclinaison à l'écliptique est fort grande, la réduction à l'écliptique serait trop longue à calculer; on fait tang arg. latitude sur l'écliptique = cos I tang arg. latitude dans l'orbite, et longitude réduite = arg. latitude sur l'écliptique + longitude du nœud.

59. Pour déterminer les élémens d'une comète qu'on vient de dé-

couvrir, les moyens exposés ne suffisent plus; mais on en déduit d'autres théorèmes utiles et curieux. Lambert est un de ceux qui ont traité cette matière avec le plus de soin, et on lui doit plusieurs propositions très-remarquables qu'il a démontrées par une synthèse élégante, dans son livre : *Insigniores orbitæ Cometarum proprietates*. Mais pour arriver à un théorème vraiment utile, on est obligé de passer par beaucoup de propositions dont on ne fait aucun usage. Nous allons suivre une méthode analytique qui sera plus courte.

Soit T et T′ les tems de deux observations, $C = 27^{j},40385$, h la distance périhélie, u et u' les deux anomalies paraboliques.

On aura

$$T' = h^{\frac{3}{2}}C(\tang^3 \tfrac{1}{2}u' + 3\tang \tfrac{1}{2}u'),$$

$$T = h^{\frac{3}{2}}C(\tang^3 \tfrac{1}{2}u + 3\tang \tfrac{1}{2}u),$$

$$T' - T = h^{\frac{3}{2}}C[\tang^3 \tfrac{1}{2}u' - \tang^3 \tfrac{1}{2}u + 3(\tang \tfrac{1}{2}u' - \tang \tfrac{1}{2}u)]$$

$$= \frac{h^{\frac{3}{2}}C\sin\frac{1}{2}(u'-u)}{\cos\frac{1}{2}u'\cos\frac{1}{2}u}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}u'} + \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}u} + \frac{\cos\frac{1}{2}(u'-u)}{\cos\frac{1}{2}u'\cos\frac{1}{2}u}\right) \quad (8)$$

$$= \frac{h^{\frac{3}{2}}C\sin\frac{1}{2}(u'-u)}{\cos\frac{1}{2}u\cos^3\frac{1}{2}u'} + \frac{h^{\frac{3}{2}}C\sin\frac{1}{2}(u'-u)}{\cos\frac{1}{2}u'\cos^3\frac{1}{2}u} + \frac{h^{\frac{3}{2}}C\sin\frac{1}{2}(u'-u)\cos\frac{1}{2}(u'-u)}{\cos^2\frac{1}{2}u'\cos^2\frac{1}{2}u}.$$

40. Or $v = \frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u}$, $v' = \frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u'}$,

d'où

$$\cos^2\tfrac{1}{2}u = \left(\frac{h}{v}\right) \quad \text{et} \quad \cos^2\tfrac{1}{2}u' = \left(\frac{h}{v'}\right);$$

donc

$$T' - T = \frac{h^{\frac{3}{2}}C\sin\frac{1}{2}(u'-u)}{\left(\frac{h}{v}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{h}{v'}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{h^{\frac{3}{2}}C\sin\frac{1}{2}(u'-u)}{\left(\frac{h}{v'}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{h}{v}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{h^{\frac{3}{2}}C\sin\frac{1}{2}(u'-u)\cos\frac{1}{2}(u'-u)}{\left(\frac{h}{v}\right)\left(\frac{h}{v'}\right)}$$

$$= \frac{v^{\frac{1}{2}}v'^{\frac{3}{2}}C\sin\frac{1}{2}(u'-u)}{h^{\frac{1}{2}}} + \frac{v'^{\frac{1}{2}}v^{\frac{3}{2}}C\sin\frac{1}{2}(u'-u)}{h^{\frac{1}{2}}} + \frac{vv'C\sin\frac{1}{2}(u'-u)\cos\frac{1}{2}(u'-u)}{h^{\frac{1}{2}}},$$

d'où l'on tire d'abord

$$h^{\frac{1}{2}} = \frac{v^{\frac{1}{2}} v'^{\frac{3}{2}} C \sin\frac{1}{2}(u'-u)}{T'-T} + \frac{v'^{\frac{1}{2}} v^{\frac{3}{2}} C \sin\frac{1}{2}(u'-u)}{T'-T} + \frac{vv' C \sin\frac{1}{2}(u'-u)\cos\frac{1}{2}(u'-u)}{T'-T},$$

formule qui donnera la distance périhélie, quand on connaîtra deux rayons vecteurs, l'angle compris et l'intervalle de deux observations. On peut encore écrire ainsi cette formule, qui n'est exacte que pour la parabole

$$h^{\frac{1}{2}} = \frac{C\sin\frac{1}{2}(u'-u)}{T'-T}\left[v'^{\frac{1}{2}} v^{\frac{3}{2}} + v^{\frac{1}{2}} v'^{\frac{3}{2}} + vv'\cos\frac{1}{2}(u'-u)\right]$$

$$= \frac{C(vv')^{\frac{1}{2}}\sin\frac{1}{2}(u'-u)}{T'-T}\left[v + v' + (vv')^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}(u'-u)\right].$$

Soit

$$(vv')^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}(u'-u) = v = v' = (vv')^{\frac{1}{2}},$$

on aura par approximation

$$h^{\frac{1}{2}} = \frac{3C(vv')\sin\frac{1}{2}(u'-u)}{T'-T},$$

$$\sin\frac{1}{2}(u'-u) = \frac{(T'-T)h^{\frac{1}{2}}}{3(vv')C} = \frac{T'-T}{3C}\left(\frac{h^{\frac{1}{2}}}{vv'}\right)$$

et

$$\sin\frac{1}{2}du = \frac{T'-T}{3C}\cdot\frac{h^{\frac{1}{2}}}{v^2}.$$

41.

$$v' : v :: \cos^2\frac{1}{2}u : \cos^2\frac{1}{2}u',$$

$$v'^{\frac{1}{2}} : v^{\frac{1}{2}} :: \cos\frac{1}{2}u : \cos\frac{1}{2}u'.$$

Soit L la première longitude, φ celle du périhélie,

$$u = (L-\varphi);\quad u' = (L'-\phi) = (L + dL - \varphi);\quad dL = u' - u,$$

$$v'^{\frac{1}{2}} : v^{\frac{1}{2}} :: \cos\frac{1}{2}(L-\varphi) : \cos\frac{1}{2}(L + dL - \varphi),$$

$$1 : \left(\frac{v}{v'}\right)^{\frac{1}{2}} :: 1 : \frac{\cos\frac{1}{2}(L-\varphi+dL)}{\cos\frac{1}{2}(L-\varphi)},$$

$$\left(\frac{v}{v'}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\cos\frac{1}{2}(L-\varphi)\cos dL + \sin\frac{1}{2}(L-\varphi)\sin dL}{\cos\frac{1}{2}(L-\varphi)},$$

$$\left(\frac{v}{v'}\right)^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{1}{2}dL + \sin\frac{1}{2}dL\tang\frac{1}{2}(L-\varphi)$$

et

et $$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(L-\varphi)=\cot\tfrac{1}{2}dL-\frac{\left(\frac{v}{v'}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sin\frac{1}{2}dL};$$

mais je préfère la formule suivante, qui est de Nicolic,

$$\begin{aligned}v'^{\frac{1}{2}}+v^{\frac{1}{2}}:v'^{\frac{1}{2}}-v^{\frac{1}{2}}&::\cos\tfrac{1}{2}u+\cos\tfrac{1}{2}u':\cos\tfrac{1}{2}u-\cos\tfrac{1}{2}u',\\&::2\cos\tfrac{1}{4}(u'+u)\cos\tfrac{1}{4}(u'-u):2\sin\tfrac{1}{4}(u'+u)\sin\tfrac{1}{4}(u'-u)\\&::1:\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(u'+u)\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(u'-u)=\frac{v'^{\frac{1}{2}}-v^{\frac{1}{2}}}{v'^{\frac{1}{2}}+v^{\frac{1}{2}}}\end{aligned}$$

et $$\begin{aligned}\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(u'+u)&=\left(\frac{v'^{\frac{1}{2}}-v^{\frac{1}{2}}}{v'^{\frac{1}{2}}+v^{\frac{1}{2}}}\right)\cot\tfrac{1}{4}(u'-u)\\&=\left\{\frac{1-\left(\frac{v}{v'}\right)^{\frac{1}{2}}}{1+\left(\frac{v}{v'}\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}\cot\tfrac{1}{4}(u'-u)=\frac{1-\operatorname{tang}z}{1+\operatorname{tang}z}\cot\tfrac{1}{4}(u'-u)\\&=\operatorname{tang}(45^\circ-z)\cot\tfrac{1}{4}(u'-u).\end{aligned}$$

On fera donc

$$\operatorname{tang}z=\left(\frac{v}{v'}\right)^{\frac{1}{2}}\quad\text{et}\quad\begin{aligned}\operatorname{tang}\tfrac{1}{4}(u'+u)&=\operatorname{tang}(45^\circ-z)\cot\tfrac{1}{4}(u'-u)\\&=\cot(45^\circ+z)\cot\tfrac{1}{4}(u'-u).\end{aligned}$$

Connaissant $\frac{1}{4}(u'+u)$ et $\frac{1}{4}(u'-u)$, on aura

$$u'=\tfrac{1}{2}(u'+u)+\tfrac{1}{2}(u'-u)\quad\text{et}\quad u=\tfrac{1}{2}(u'+u)-\tfrac{1}{2}(u'-u).$$

Mais on connaît L et L′, on aura, φ désignant le périhélie,

$$L-\varphi=u,\quad L'-\varphi=u'\quad\text{et}\quad\varphi=L-u=L'-u'.$$

Alors on connaîtra $h=v\cos^2\frac{1}{2}u=v'\cos^2\frac{1}{2}u'$; on calculera le tems qui convient à l'anomalie u, le lieu du nœud et l'inclinaison, et tout sera connu.

Le problème se réduit donc à déterminer deux rayons vecteurs et la différence des deux anomalies qui est la même que celle des longitudes héliocentriques dans l'orbite. Tels étaient les seuls moyens que l'on connût il y a 60 ans.

42. Ces moyens ne sont même bons que pour la parabole : dans

l'ellipse on a

$$1+\sin\epsilon\cos u=\frac{a\cos^2\epsilon}{V}\quad \text{(XXI. 90)},$$

$$1+\sin\epsilon\cos u'=\frac{a\cos^2\epsilon}{V'},$$

$$\sin\epsilon(\cos u-\cos u')=a\cos^2\epsilon\left(\frac{1}{V}-\frac{1}{V'}\right)=a\cos^2\epsilon\left(\frac{V'-V}{VV'}\right),$$

$$2+\sin\epsilon(\cos u+\cos u')=a\cos^2\epsilon\left(\frac{1}{V}+\frac{1}{V'}\right)=a\cos^2\epsilon\left(\frac{V'+V}{VV'}\right),$$

$$\frac{2\sin\epsilon\sin\frac{1}{2}(u'-u)\sin\frac{1}{2}(u'+u)}{2+2\sin\epsilon\cos\frac{1}{2}(u'-u)\cos\frac{1}{2}(u'+u)}=\frac{V'-V}{V'+V}=\frac{1-\frac{V}{V'}}{1+\frac{V}{V'}},$$

$$\frac{\sin\epsilon\sin\frac{1}{2}(u'-u)\sin\frac{1}{2}(u'+u)}{1+\sin\epsilon\cos\frac{1}{2}(u'-u)\cos(u'+u)}=\frac{1-\tang\phi}{1+\tang\phi}=\cot(45^\circ+\phi)=\cot\phi',$$

$$\sin\epsilon\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)\sin\tfrac{1}{2}(u'+u)=\cot\phi'+\sin\epsilon\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)\cos\tfrac{1}{2}(u'+u)\cot\phi'$$

$$\sin\epsilon\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)\sin\tfrac{1}{2}(u'+u)-\sin\epsilon\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)\cos\tfrac{1}{2}(u'+u)\cot\phi'=\cot\phi'$$

$$\sin\epsilon\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)[\sin\tfrac{1}{2}(u'+u)-\cot\phi'\cot\tfrac{1}{2}(u'-u)\cos\tfrac{1}{2}(u'+u)]=\cot\phi'$$

$$\sin\epsilon\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)[\sin\tfrac{1}{2}(u'+u)-\cot\psi\cos\tfrac{1}{2}(u'+u)]=\cot\phi'$$

$$\sin\epsilon\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)[\sin\tfrac{1}{2}(u'+u)\sin\psi-\cos\psi\cos\tfrac{1}{2}(u'+u)]=\cot\phi'\sin\psi$$

$$-\sin\epsilon\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)\cos\left(\frac{u'+u}{2}+\psi\right)=\cot\psi\,\tang\tfrac{1}{2}(u'-u)\sin\psi$$
$$=\cos\psi\,\tang\tfrac{1}{2}(u'-u)$$

$$-\cos\left(\frac{u'+u}{2}+\psi\right)=\frac{\cos\psi}{\sin\epsilon\cos\frac{1}{2}(u'-u)}=\frac{\cos\psi}{\cos\frac{1}{2}(u'-u)\left(1-\frac{h}{a}\right)},$$

$$\log\left[-\cos\left(\frac{u'+u}{2}+\psi\right)\right]=\log\left(\frac{\cos\psi}{\cos\frac{1}{2}(u'-u)}\right)$$
$$+K\left[\frac{h}{a}+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{a}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{a}\right)^3+\text{etc.}\right]$$

Supposez $\frac{h}{a}=0$ ou insensible, l'expression elliptique devient parabolique, et se réduit au premier terme

$$\cos\left(\frac{u'+u}{2}+\psi\right)=-\frac{\cos\psi}{\cos\frac{1}{2}(u'+u)}.$$

Dans tous les cas le problème se réduit aux formules suivantes :

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{v}{v'}, \quad \cot\psi = \cot(45^\circ+\varphi)\cot\tfrac{1}{2}(u'-u)$$

$$-\cos\left(\frac{u'+u}{2}+\psi\right) = \frac{\cos\psi}{\cos\frac{1}{2}(u'-u)\left(1-\frac{h}{a}\right)},$$

$$\left(\frac{u'+u}{2}+\psi\right)-\psi = \frac{u'+u}{2}.$$

43. Dans la parabole on a $h = v\cos^2\frac{1}{2}u$, et $h = v'\cos^2\frac{1}{2}u'$; donc

$$h^2 = vv'\cos^2\tfrac{1}{2}u\cos^2\tfrac{1}{2}u', \qquad h = (vv')^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}u\cos\tfrac{1}{2}u',$$

$$h = \tfrac{1}{2}(vv')^{\frac{1}{2}}\left[\cos\tfrac{1}{2}(u+u') + \cos\tfrac{1}{2}(u'-u)\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}(vv')^{\frac{1}{2}}\left[\cos\tfrac{1}{2}(u'-u) + \frac{1-\operatorname{tang}^2\frac{1}{4}(u'+u)}{1+\operatorname{tang}^2\frac{1}{4}(u'+u)}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}(vv')^{\frac{1}{2}}\left[\cos\tfrac{1}{2}(u'-u) + \frac{1-\operatorname{tang}^2(45^\circ-z)\cot^2\frac{1}{4}(u'-u)}{1+\operatorname{tang}^2(45^\circ-z)\cot^2\frac{1}{4}(u'-u)}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}(vv')^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\cos\frac{1}{2}(u'-u)+\operatorname{tang}^2(45^\circ-z)\cos\frac{1}{2}(u'-u)\cot^2\frac{1}{4}(u'-u)+1-\operatorname{tang}^2(45^\circ-z)\cot^2\frac{1}{4}(u'-u)}{1+\operatorname{tang}^2(45^\circ-z)\cot^2\frac{1}{4}(u'-u)}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}(vv')^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2\cos^2\frac{1}{4}(u'-u)-\operatorname{tang}^2(45^\circ-z)\cot^2\frac{1}{4}(u'-u)\left[1-\cos\frac{1}{2}(u'-u)\right]}{1+\operatorname{tang}^2(45^\circ-z)\cot^2\frac{1}{4}(u'-u)}\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}(vv')^{\frac{1}{2}}\left[\frac{2\cos^2\frac{1}{4}(u'-u)-2\operatorname{tang}^2(45^\circ-z)\cot^2\frac{1}{4}(u'-u)\sin^2\frac{1}{4}(u'-u)}{1+\operatorname{tang}^2(45^\circ-z)\cot^2\frac{1}{4}(u'-u)}\right]$$

$$= (vv')^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\sin^2\frac{1}{4}(u'-u)\cos^2\frac{1}{4}(u'-u)-\operatorname{tang}^2(45^\circ-z)\cos^2\frac{1}{4}(u'-u)\sin^2\frac{1}{4}(u'-u)}{\sin^2\frac{1}{4}(u'-u)+\operatorname{tang}^2(45^\circ-z)\cos^2\frac{1}{4}(u'-u)}\right]$$

$$= (vv')^{\frac{1}{2}}\sin^2\tfrac{1}{4}(u'-u)\cos^2\tfrac{1}{4}(u'-u)\left[\frac{1-\operatorname{tang}^2(45^\circ-z)}{\sin^2\frac{1}{4}(u'-u)+\operatorname{tang}^2(45^\circ-z)\cos^2\frac{1}{4}(u'-u)}\right]$$

$$= (vv')^{\frac{1}{2}}\sin^2\tfrac{1}{4}(u'-u)\cos^2\tfrac{1}{4}(u'-u)\left\{\frac{1-\left(\frac{1-\operatorname{tang}z}{1+\operatorname{tang}z}\right)^2}{\sin^2\frac{1}{4}(u'-u)+\left(\frac{1-\operatorname{tang}z}{1+\operatorname{tang}z}\right)^2\cos^2\frac{1}{4}(u'-u)}\right\}$$

$$= (vv')^{\frac{1}{2}}\sin^2\tfrac{1}{4}(u'-u)\cos^2\tfrac{1}{4}(u'-u)\left[\frac{(v'^{\frac{1}{2}}+v^{\frac{1}{2}})^2-(v'^{\frac{1}{2}}-v^{\frac{1}{2}})^2}{(v'^{\frac{1}{2}}+v^{\frac{1}{2}})^2\sin^2\frac{1}{4}(u'-u)+(v'^{\frac{1}{2}}-v^{\frac{1}{2}})^2\cos^2\frac{1}{4}(u'-u)}\right]$$

$$= (vv')^{\frac{1}{2}}\sin^2\tfrac{1}{4}(u'-u)\cos^2\tfrac{1}{4}(u'-u)\left[\frac{4(vv')^{\frac{1}{2}}}{(v'^{\frac{1}{2}}+v^{\frac{1}{2}})^2\sin^2\frac{1}{4}(u'-u)+(v'^{\frac{1}{2}}-v^{\frac{1}{2}})^2\cos^2\frac{1}{4}(u'-u)}\right]$$

$$= \frac{4(vv')\sin^2\frac{1}{4}(u'-u)\cos^2\frac{1}{4}(u'-u) = vv'\sin^2\frac{1}{2}(u'-u)}{(v'^{\frac{1}{2}}+v^{\frac{1}{2}})^2\sin^2\frac{1}{4}(u'-u)+(v'^{\frac{1}{2}}-v^{\frac{1}{2}})^2\cos^2\frac{1}{4}(u'-u)}.$$

$$=\frac{4vv'\sin^2\tfrac{1}{4}(u'-u)\cos^2\tfrac{1}{4}(u'-u)}{\left\{\begin{array}{l}v'\sin^2\tfrac{1}{4}(u'-u)+v\sin^2\tfrac{1}{4}(u'-u)+2(vv')^{\frac{1}{2}}\sin^2\tfrac{1}{4}(u'-u)\\+v'\cos^2\tfrac{1}{4}(u'-u)+v\cos^2\tfrac{1}{4}(u'-u)-2(vv')^{\frac{1}{2}}\cos^2\tfrac{1}{4}(u'-u)\end{array}\right\}}$$

$$=\frac{vv'\sin^2\tfrac{1}{2}(u'-u)}{v'+v-2(vv')^{\frac{1}{2}}[\cos^2\tfrac{1}{4}(u'-u)-\sin^2\tfrac{1}{4}(u'-u)]}$$

$$=\frac{vv'\sin^2\tfrac{1}{2}(u'-u)}{v'+v-2(vv')^{\frac{1}{2}}[1-2\sin^2\tfrac{1}{4}(u'-u)]}$$

$$=\frac{vv'\sin^2\tfrac{1}{2}(u'-u)}{v'+v-2(vv')^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)}.$$

Ce théorème est de Lambert, on en tire

44. $$h^{\frac{1}{2}}=\frac{(vv')^{\frac{1}{2}}\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)}{[v'+v-2(vv')^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)]^{\frac{1}{2}}};$$

portons cette valeur dans l'expression de $T'-T$

$$T'-T=\frac{v^{\frac{1}{2}}v'^{\frac{3}{2}}C\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)+v'^{\frac{1}{2}}v^{\frac{3}{2}}C\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)+vv'C\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)}{\dfrac{(vv')^{\frac{3}{2}}\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)}{[v'+v-2(vv')^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)]^{\frac{3}{2}}}}$$

$$=\frac{[v'+v-2(vv')^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)]^{\frac{3}{2}}C}{(vv')^{\frac{3}{2}}\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)}\left[\begin{array}{l}v^{\frac{1}{2}}v'^{\frac{3}{2}}\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)+v'^{\frac{1}{2}}v^{\frac{3}{2}}\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)\\+vv'\sin\tfrac{1}{2}(u'-u)\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)\end{array}\right]$$

$$=C[v'+v-2(vv')^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)]^{\frac{3}{2}}[v'+v+(vv')^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)]$$

$$=C[v+v'+(vv')^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)][(v'+v-2(vv')^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)]^{\frac{1}{2}},$$

c'est encore un théorème de Lambert; mettez $(v+v')$ hors du signe.

45. $$T'-T=C(v'+v)^{\frac{3}{2}}\left[1+\frac{(vv')^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)}{v'+v}\right]\left[1-\frac{2(vv')^{\frac{1}{2}}}{v'+v}\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=C(v'+v)^{\frac{3}{2}}\left\{1+\frac{\left(\frac{v}{v'}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)}{\left(1+\frac{v}{v'}\right)}\right\}\left\{1-\frac{2\left(\frac{v}{v'}\right)^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)}{\left(1+\frac{v}{v'}\right)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=C(v'+v)^{\frac{3}{2}}\left[1+\frac{\text{tang}\,z\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)}{1+\text{tang}^2 z}\right]\left[1-\frac{2\,\text{tang}\,z\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)}{1+\text{tang}^2 z}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=C(v'+v)^{\frac{3}{2}}[1+\sin z\cos z\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)]$$

$$\times[1-2\sin z\cos z\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)]^{\frac{1}{2}}.$$

Soit

$$\sin 2z \cos \tfrac{1}{2}(u' - u) = \sin x,$$

ou

$$2 \sin z \cos z \cos \tfrac{1}{2}(u' - u) = \sin x$$

$$T' - T = C(v+v')^{\frac{3}{2}}(1+\tfrac{1}{2}\sin x)(1-\sin x)^{\frac{1}{2}};$$

quantité nécessairement positive

$$= C(v'+v)^{\frac{3}{2}}(1+\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x)\,[2\sin^2(45^\circ-\tfrac{1}{2}x)]^{\frac{1}{2}}$$
$$= C(v'+v)^{\frac{3}{2}}(1+\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x)\sin(45^\circ-\tfrac{1}{2}x)\,.\,2^{\frac{1}{2}}$$
$$= C(v'+v)^{\frac{3}{2}}(1+\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x)(\sin 45^\circ\cos\tfrac{1}{2}x-\cos 45^\circ\sin\tfrac{1}{2}x)\frac{1}{\sin 45^\circ}$$
$$= C(v'+v)^{\frac{3}{2}}(1+\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x)(\cos\tfrac{1}{2}x-\sin\tfrac{1}{2}x)\frac{\sin 45^\circ}{\sin 45^\circ}$$
$$= C(v'+v)^{\frac{3}{2}}(1+\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x)(\cos\tfrac{1}{2}x-\sin\tfrac{1}{2}x)$$
$$= C(v'+v)^{\frac{3}{2}}(\cos\tfrac{1}{2}x+\sin\tfrac{1}{2}x\cos^2\tfrac{1}{2}x-\sin\tfrac{1}{2}x-\sin^2\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x)$$
$$= C(v'+v)^{\frac{3}{2}}(\cos^3\tfrac{1}{2}x-\sin^3\tfrac{1}{2}x) = C(v+v')^{\frac{3}{2}}\cos^3\tfrac{1}{2}x(1-\operatorname{tang}^3\tfrac{1}{2}x).$$

Cette formule me paraît plus propre à être mise en table que celle de Lambert.

On peut faire

$$(v'+v)^{\frac{3}{2}} = v^{\frac{3}{2}}\left(\frac{v'}{v}+1\right)^{\frac{3}{2}} = v^{\frac{3}{2}}(\cot^2 z+1)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{v}{\sin^2 z}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^3,$$

et alors

$$T' - T = C\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^3(\cos^3\tfrac{1}{2}x - \sin^3\tfrac{1}{2}x);$$

on doit avoir toujours $\cos^3\frac{1}{2}x > \sin^3\frac{1}{2}x$, et nous pourrons faire

$$\tfrac{1}{2}x = 45^\circ - \tfrac{1}{2}\omega, \qquad x = 90^\circ - \omega. \qquad (45)$$

46. $$T' - T = C[(v'+v)^{\frac{3}{2}}\cos^3\tfrac{1}{2}x - (v'+v)^{\frac{3}{2}}\sin^3\tfrac{1}{2}x]$$
$$= C[((v'+v)\cos^2\tfrac{1}{2}x)^{\frac{3}{2}} - ((v'+v)\sin^2\tfrac{1}{2}x)^{\frac{3}{2}}]$$
$$= C\left[\left(\frac{(v'+v)(1+\cos x)}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{(v'+v)(1-\cos x)}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$
$$= C\left[\left(\frac{(v'+v)+(v'+v)\cos x}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{(v'+v)-(v'+v)\cos x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$
$$= C\left[\left(\frac{v'+v+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{v'+v-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

En faisant $k=(\nu'+\nu)\cos x=$ corde parabolique qui joint les rayons vecteurs ν' et ν; en effet

$$\begin{aligned}(\text{corde})^2&=\nu'^2+\nu^2-2\nu\nu'\cos(u'-u)=\nu'^2+\nu^2+2\nu\nu'-4\nu\nu'\cos^2\tfrac{1}{2}(u'-u)\\&=(\nu'+\nu)^2-4\nu\nu'\cos^2\tfrac{1}{2}(u'-u)\end{aligned}$$

$$\text{corde}=(\nu'+\nu)\left(1-\frac{4\nu\nu'\cos^2\frac{1}{2}(u'-u)}{(\nu'+\nu)^2}\right)^{\frac{1}{2}}=(\nu'+\nu)(1-\sin^2x)^{\frac{1}{2}}=(\nu'+\nu)\cos x.$$

Nous avons fait

$$\frac{2(\nu\nu')^{\frac{1}{2}}\cos\frac{1}{2}(u'-u)}{\nu'+\nu}=\sin x \qquad (45)$$

Ce théorème est célèbre; il est en effet d'une symétrie remarquable qui aide à le retenir; il est l'un des principes fondamentaux de la méthode de M Olbers, pour les comètes. M. Gauss y parvient aussi par ses formules, et il en réclame l'honneur pour Euler, qui l'a donné le premier, mais sans en tirer un grand parti, ensorte qu'il avait été oublié. Lambert l'a trouvé par une autre voie, et il l'a étendu depuis à l'ellipse et à l'hyperbole; il en résulte que dans chacune des trois sections coniques, quelles qu'en soient d'ailleurs les dimensions, l'intervalle des tems entre deux observations ne dépend que des deux rayons vecteurs et de la corde qui les joint.

47. Dans notre formule $T'-T=C(\nu'+\nu)^{\frac{3}{2}}(\cos^3\frac{1}{2}x-\sin^3\frac{1}{2}x)$, il faut que le second membre soit toujours positif, puisque le premier ne saurait être négatif; donc $\cos^3\frac{1}{2}x>\sin^3\frac{1}{2}x$; donc $\frac{1}{2}x<45°$. Si le calcul le donnait plus grand, on en prendrait le complément à 90°.

Mais au lieu de x prenons $90°-\omega=x$, ou $\omega=90°-x$; $\frac{1}{2}\omega=45°-\frac{1}{2}x$; nous aurons

$$\begin{aligned}\cos^3\tfrac{1}{2}x&=\cos^3(45°-\tfrac{1}{2}\omega)=(\cos 45°\cos\tfrac{1}{2}\omega+\sin 45°\sin\tfrac{1}{2}\omega)^3\\&=\cos^3 45°(\cos\tfrac{1}{2}\omega+\sin\tfrac{1}{2}\omega)^3\\&=\sin^3 45°(\cos^3\tfrac{1}{2}\omega+3\cos^2\tfrac{1}{2}\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega+3\cos\tfrac{1}{2}\omega\sin^2\tfrac{1}{2}\omega+\sin^3\tfrac{1}{2}\omega)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^3\tfrac{1}{2}x&=\sin^3(45°-\tfrac{1}{2}\omega)=(\sin 45°\cos\tfrac{1}{2}\omega-\cos 45°\sin\tfrac{1}{2}\omega)^3\\&=\sin^3 45°(\cos\tfrac{1}{2}\omega-\sin\tfrac{1}{2}\omega)^3\\&=\sin^3 45°(\cos^3\tfrac{1}{2}\omega-3\cos^2\tfrac{1}{2}\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega+3\cos\tfrac{1}{2}\omega\sin^2\tfrac{1}{2}\omega-\sin^3\tfrac{1}{2}\omega)\end{aligned}$$

$$\cos^3 \tfrac{1}{2}x - \sin^3 \tfrac{1}{2}x = \sin^3 45^\circ (6\cos^2 \tfrac{1}{2}\omega \sin \tfrac{1}{2}\omega + 2\sin^3 \tfrac{1}{2}\omega)$$
$$= 2\sin^3 45^\circ (3\cos^2 \tfrac{1}{2}\omega \sin \tfrac{1}{2}\omega + \sin^3 \tfrac{1}{2}\omega)$$
$$= 2\sin^2 45^\circ \sin 45^\circ (3\cos^2 \tfrac{1}{2}\omega \sin \tfrac{1}{2}\omega + \sin^3 \tfrac{1}{2}\omega)$$
$$= 3\sin 45^\circ \sin \tfrac{1}{2}\omega \cos^2 \tfrac{1}{2}\omega + \sin 45^\circ \sin^3 \tfrac{1}{2}\omega$$
$$= 3\sin 45^\circ \sin \tfrac{1}{2}\omega \cos^2 \tfrac{1}{2}\omega (1 + \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\omega)$$

$$\log(\cos^3 \tfrac{1}{2}x - \sin^3 \tfrac{1}{2}x) = \log(3\sin 45^\circ \sin \tfrac{1}{2}\omega \cos^2 \tfrac{1}{2}\omega)$$
$$+ K(\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{2.3^2}\operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{3.3^3}\operatorname{tang}^6 \tfrac{1}{2}\omega - \text{etc.}),$$

sous cette forme on voit que le second membre est positif.

Cette formule est plus facile à réduire en tables, parce que les deux nombres sont plus petits et de même signe, et que le second terme est souvent insensible, parce que $\frac{1}{2}\omega$ sera un arc de peu de degrés; mais il en résulte que les logarithmes de $(\cos^3 \frac{1}{2}x - \sin^3 \frac{1}{2}x)$ croîtraient rapidement et inégalement, au lieu que les nombres croîtraient plus lentement et plus uniformément, et qu'on fera mieux de calculer la table en nombres.

48. Développons cette dernière formule, elle deviendra successivement

$$= \sin 45^\circ (3\sin \tfrac{1}{2}\omega - 3\sin^3 \tfrac{1}{2}\omega + \sin^3 \tfrac{1}{2}\omega)$$
$$= \sin 45^\circ (3\sin \tfrac{1}{2}\omega - 2\sin^3 \tfrac{1}{2}\omega)$$
$$= 2\sin 45^\circ (\tfrac{3}{2}\sin \tfrac{1}{2}\omega - \sin^3 \tfrac{1}{2}\omega) \ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$
$$= 2\sin 45^\circ (\tfrac{3}{2}\sin \tfrac{1}{2}\omega - \sin \tfrac{1}{2}\omega + \sin \tfrac{1}{2}\omega \cos^2 \tfrac{1}{2}\omega)$$
$$= 2\sin 45^\circ (\tfrac{1}{2}\sin \tfrac{1}{2}\omega + \sin \tfrac{1}{2}\omega \cos^2 \tfrac{1}{2}\omega)$$
$$= \sin 45^\circ \sin \tfrac{1}{2}\omega + 2\sin 45^\circ \sin \tfrac{1}{2}\omega \cos^2 \tfrac{1}{2}\omega$$
$$= \sin 45^\circ \sin \tfrac{1}{2}\omega (1 + 2\cos^2 \tfrac{1}{2}\omega).$$

Autre formule facile à calculer. Nous avons trouvé chemin faisant, la formule (a) que M. Burckhardt a donnée sans démonstration, dans les Mémoires de l'Institut; car si nous portions la valeur de (a) dans l'équation de l'article 45, nous aurions

$$T' - T = C\left(\frac{\nu^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^3 2\sin 45^\circ (\tfrac{3}{2}\sin \tfrac{1}{2}\omega - \sin^3 \tfrac{1}{2}\omega);$$

nous aurions aussi

$$T' - T = C\left(\frac{\nu^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^3 \sin 45^\circ (3\sin \tfrac{1}{2}\omega \cos^2 \tfrac{1}{2}\omega + \sin^3 \tfrac{1}{2}\omega);$$

nous ferons donc

$$\tang z = \left(\frac{v}{v'}\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad \sin x = \cos \omega = 2 \sin z \cos z \cos \tfrac{1}{2}(u' - u)$$

avec ω, nous entrerons dans la table qui nous donnera le logarithme de la fonction 3C $\sin 45^\circ (\sin \frac{1}{2}\omega \cos^2 \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3} \sin^3 \frac{1}{2}\omega)$, à ce logarithme nous ajouterons celui de $\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^3$ et nous aurons le logarithme de l'intervalle de tems qui résulte de nos suppositions pour v, v' et $\cos \frac{1}{2}(u' - u)$; si cet intervalle calculé n'est pas égal à l'intervalle observé, il faudra modifier nos suppositions, calculer de nouveau, et nous verrons à la marche des erreurs quelles seront les suppositions convenables. Si nous substituons $\frac{v + dv}{v' + dv'} = \frac{v}{v'}$ à $\frac{v}{v'}$, en conservant à très-peu près $(u' - u)$, il est évident que z, x, ω resteront les mêmes, mais $\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right) = (v' + v)^{\frac{3}{2}}$ augmentera nécessairement, et par conséquent aussi $(T' - T)$; si les changemens dv, dv' sont négatifs $(T' - T)$ diminuera.

$\frac{v + dv}{v' + dv'} = \frac{v}{v'} = \tang^2 z$; donc $(v' + dv') = (v + dv) \cot^2 z$; ainsi quand vous aurez choisi $(v + dv)$, vous en conclurez facilement $v' + dv'$ qui fera varier $(T' - T)$ comme vous le desirerez. En changeant ainsi les valeurs absolues des rayons vecteurs, sans en changer le rapport, vous verrez souvent qu'il en résultera un petit changement dans l'angle $\frac{1}{2}(u' - u)$; mais cet angle n'entre dans la formule que par son cosinus qui varie peu, il n'en résultera pas un changement considérable, quoique l'angle ω qui se trouve par son cosinus varie assez rapidement, de sorte qu'en général $(T' - T)$ croît et décroît avec $(v + v')$.

Suivant le théorème de Lambert

$$\left(\frac{T' - T}{C}\right) = \left(\frac{v + v' + k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{v + v' - k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{v + v' + (v + v')\cos x}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$- \left(\frac{v + v' - (v + v')\cos x}{2}\right)^{\frac{3}{2}} = [(v + v')\cos^2 \tfrac{1}{2}x]^{\frac{3}{2}} - [(v + v')\sin^2 \tfrac{1}{2}x]^{\frac{3}{2}}.$$

Le premier membre est constant; ainsi

$$0 = \tfrac{3}{2}\left(\frac{v + v' + k}{2}\right)^{\frac{1}{2}}[d(v + v') + dk] - \tfrac{3}{2}\left(\frac{v + v' - k}{2}\right)^{\frac{1}{2}}[d(v + v') - dk];$$

d'où

d'où

$$\frac{d(v+v')-dk}{d(v+v')+dk}=\left(\frac{v+v'+k}{v+v'-k}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{(v+v')\cos^2\frac{1}{2}x}{(v+v')\sin^2\frac{1}{2}x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\cot\tfrac{1}{2}x=\frac{1-\frac{dk}{d(v+v')}}{1+\frac{dk}{d(v+v')}}=\frac{1-\cos\frac{1}{2}\varphi}{1+\cos\frac{1}{2}\varphi};$$

et

$$\frac{dk}{d(v+v')}=\frac{1-\cot\frac{1}{2}x}{1+\cot\frac{1}{2}x}=\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}x-1}{\text{tang}\,\frac{1}{2}x+1}=\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}x-\text{tang}\,45^\circ}{\text{tang}\,\frac{1}{2}x+\text{tang}\,45^\circ}=\frac{\sin(\frac{1}{2}x-45^\circ)}{\sin(\frac{1}{2}x+45^\circ)}$$

$$=\text{tang}\,(\tfrac{1}{2}x-45^\circ)=-\text{tang}\,(45^\circ-\tfrac{1}{2}x)=-\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\omega;$$

ainsi $$dk=-d(v+v')\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\omega;$$

dk est donc de signe contraire à $d(v+v')$; si l'on augmente la somme des rayons vecteurs, il faut diminuer la corde pour retrouver le même intervalle. Si on diminue la somme, il faut augmenter la corde.

$$k=(v+v')\cos x;$$

$$dk=d(v+v')\cos x-dx\sin x(v+v')=-d(v+v')\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\omega$$

$$d(v+v')\cos x+d(v+v')\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\omega=dx\sin x(v+v')$$

$$dx=\frac{d(v+v')(\cos x+\text{tang}\,\frac{1}{2}\omega)}{(v+v')\sin x}=\frac{d(v+v')}{v+v'}\left(\cot x+\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\omega}{\cos\omega}\right)$$

$$=\frac{d(v+v')}{v+v'}\left(\text{tang}\,\omega+\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\omega}{\cos\omega}\right)$$

$$-d\omega=\frac{d(v+v')}{v+v'}\left(\frac{\sin\omega+\text{tang}\,\frac{1}{2}\omega}{\cos\omega}\right)=\frac{d(v+v')\frac{3}{2}\text{tang}\,\omega}{(v+v')\cos\omega}$$

à peu près.

49. $\left(\frac{T'-T}{C}\right)$ est une quantité qui appartient à toutes les paraboles possibles et à tous les points d'une même parabole; ainsi dans une parabole quelconque pour un même intervalle (T′ — T), on trouvera une infinité de points qui satisferont à l'équation

$$\left(\frac{T'-T}{C}\right)=[v+v'+(vv')^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)][v+v'-2(vv')^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)]^{\frac{1}{2}}$$

ou

$$\left(\frac{T'-T}{C}\right)^2=[v+v'+(vv')^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)]^2[v+v'-2(vv')^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}(u'-u)]$$

$$=(v+v')^3-3(v+v')(vv')\cos^2\tfrac{1}{2}(u'-u)-2(vv')^{\frac{3}{2}}\cos^3\tfrac{1}{2}(u'-u).$$

On peut donc dans toute parabole donner à v toutes les valeurs possibles depuis h jusqu'à l'infini, et l'on trouvera une valeur de v' et de $(u'-u)$ qui satisfera à l'équation, mais à mesure que v augmentera, l'angle $(u'-u)$ diminuera, parce que le mouvement angulaire se ralentit quand le rayon vecteur augmente.

Mais les observations qui donnent les longitudes correspondantes aux rayons vecteurs, ne permettront pas ordinairement de trouver à la fois le rayon vecteur v' et l'angle $(u'-u)$ qui laissent à $(T'-T)$ sa valeur, ainsi en changeant la valeur de v on changera le plus souvent la parabole pour représenter à la fois les trois observations.

50. Quand, par ces essais, on a trouvé les quantités v, v', $(u'-u)$ qui satisfont à l'intervalle, on calcule les anomalies u' et u dont on n'a que la différence, on cherche la distance h, le nœud, l'inclinaison, les longitudes sur l'orbite, le lieu du périhélie et le tems où la comète a dû ou doit y passer; on détermine enfin la parabole qui satisfait aux deux observations. Mais comme deux lieux observés peuvent appartenir à plusieurs paraboles différentes, celle que vous aurez trouvée ne satisfera probablement pas aussi bien à une troisième observation, surtout si elle est éloignée; ainsi pour vérifier votre parabole, vous l'emploierez au calcul d'une observation plus éloignée. Si l'accord se soutient l'orbite est bonne, sinon vous en chercherez une autre qui, satisfaisant aux premières observations, représente également bien la troisième.

51. Quand vous aurez une parabole qui satisfera aux trois longitudes et aux trois rayons vecteurs, vous aurez trois points de la courbe, vous aurez le foyer origine commune des rayons vecteurs, vous aurez aussi le périhélie avec les trois anomalies; la parabole sera donc entièrement déterminée; pour calculer le nœud et l'inclinaison, vous emploierez deux latitudes avec l'arc compris de l'écliptique; si les observations étaient parfaites, la troisième latitude serait également satisfaite; mais comme les trois longitudes ont leur erreur ainsi que les trois latitudes, vous n'aurez qu'une orbite approximative, assujétie aux trois longitudes et à deux des latitudes, toute l'erreur se portera sur la troisième latitude.

Vous n'aurez même qu'une parabole qui n'est probablement pas la courbe véritable. Pour trouver l'ellipse

52. Soit $\zeta = \left(\frac{v + v' - k}{2}\right)$, $z = \left(\frac{v + v' + k}{2}\right)$, A le grand axe de l'ellipse $= 2a$; $m = \frac{1}{n} = \frac{1}{116.2648}$; T le tems d'une première anomalie, T' le tems d'une seconde.

Lambert démontre, pag. 201, de ses *Propriétés des orbites cométaires*, les deux équations suivantes

$$\frac{2\sqrt{2}.mT'}{\sqrt{A}} = \int \frac{zdz}{\sqrt{Az - zz}}; \qquad \frac{2\sqrt{2}.mT}{\sqrt{A}} = \int \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{A\zeta - \zeta\zeta}};$$

d'où

$$\frac{2\sqrt{2}.mT'}{\sqrt{A}} = \int zdz(Az - zz)^{-\frac{1}{2}} = \int \frac{zdz}{A^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}}\left(1 - \frac{z}{A}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$2\sqrt{2}.mT' = \int z^{\frac{1}{2}} dz \left(1 - \frac{z}{A}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \int z^{\frac{1}{2}} dz \left(1 + \frac{1}{2}\frac{z}{A} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}\frac{z^2}{A^2} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\frac{z^3}{A^3} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}\frac{z^4}{A^4} + \text{etc.}\right)$$

$$= \int \left[z^{\frac{1}{2}} dz + \frac{1}{2}\frac{z^{\frac{3}{2}}}{A} dz + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{z^{\frac{5}{2}}}{A^2} dz + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\frac{z^{\frac{7}{2}}}{A^3} dz + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}\frac{z^{\frac{9}{2}}}{A^4} dz + \text{etc.}\right]$$

intégrez

$$= \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}.\frac{2}{5}.\frac{z^{\frac{5}{2}}}{A} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{2}{7}.\frac{z^{\frac{7}{2}}}{A^2} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{2}{9}.\frac{z^{\frac{9}{2}}}{A^3} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}.\frac{2}{11}.\frac{z^{\frac{11}{2}}}{A^4} + \text{etc.}$$

expression dont la loi est visible que l'on peut vérifier par la différentiation et qu'on peut continuer à volonté. On en déduit

$$T' = \frac{1}{2m\sqrt{2}}\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}.\frac{2}{5}.\frac{z^{\frac{5}{2}}}{A} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{2}{7}.\frac{z^{\frac{7}{2}}}{A^2} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{2}{9}.\frac{z^{\frac{9}{2}}}{A^3} \\ \qquad + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}.\frac{2}{11}.\frac{z^{\frac{11}{2}}}{A^4} + \text{etc.} \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{3m\sqrt{2}}\left\{\begin{array}{l} z^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\frac{2}{5}.\frac{z^{\frac{5}{2}}}{A} + \frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{2}{7}.\frac{z^{\frac{7}{2}}}{A^2} + \frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{2}{9}.\frac{z^{\frac{9}{2}}}{A^3} \\ \qquad + \frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}.\frac{2}{11}.\frac{z^{\frac{11}{2}}}{A^4} + \text{etc.} \end{array}\right\}$$

$$= \frac{n}{3\sqrt{2}}\left(z^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{10A} z^{\frac{5}{2}} + \frac{9}{56A^2} z^{\frac{7}{2}} + \frac{5}{48A^3} z^{\frac{9}{2}} + \frac{105}{1408A^4} z^{\frac{11}{2}} + \text{etc.}\right)$$

On aurait de même

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}\left(\zeta^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{10\,A}\zeta^{\frac{5}{2}} + \frac{9}{56A^2}\zeta^{\frac{7}{2}} + \frac{5}{48A^3}\zeta^{\frac{9}{2}} + \frac{105}{1408A^4}\zeta^{\frac{11}{2}} + \text{etc.}\right)$$

Le facteur $\frac{n}{3\sqrt{2}}$ de Lambert est notre facteur $C = 27^{\text{i}},40385$. On aura donc dans l'ellipse dont A est le grand axe

$$T' - T = C\left\{\begin{array}{l}(z^{\frac{3}{2}} - \zeta^{\frac{3}{2}}) + \frac{3}{10\,A}(z^{\frac{5}{2}} - \zeta^{\frac{5}{2}}) + \frac{9}{56A^2}(z^{\frac{7}{2}} - \zeta^{\frac{7}{2}}) \\ \qquad + \frac{5}{48A^3}(z^{\frac{9}{2}} - \zeta^{\frac{9}{2}}) + \frac{105}{1408A^4}(z^{\frac{10}{2}} - \zeta^{\frac{11}{2}}) + \text{etc.}\end{array}\right\}$$

équation curieuse, mais peu commode pour le calcul.

Or

$$z = \frac{v + v' + k}{2} = (v + v')\cos^2 \tfrac{1}{2}x\,;$$

et

$$\zeta = \left(\frac{v + v' - k}{2}\right) = (v + v')\sin^2 \tfrac{1}{2}x \ldots (45),$$

et

$$z^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^n \cos^n \tfrac{1}{2}x, \quad \text{et} \quad \zeta^{\frac{n}{2}} = \left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^n \sin^n \tfrac{1}{2}x\,;$$

d'où je tire

$$T' - T = C\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^3(\cos^3 \tfrac{1}{2}x - \sin^3 \tfrac{1}{2}x) + \frac{3}{10A}\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^5(\cos^5 \tfrac{1}{2}x - \sin^5 \tfrac{1}{2}x) \\ + \frac{9}{56A^2}\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^7(\cos^7 \tfrac{1}{2}x - \sin^7 \tfrac{1}{2}x) + \frac{5}{48A^3}\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^9(\cos^9 \tfrac{1}{2}x - \sin^9 \tfrac{1}{2}x) \\ + \frac{105}{1408A^4}\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^{11}(\cos^{11} \tfrac{1}{2}x - \sin^{11} \tfrac{1}{2}x) + \text{etc.}\end{array}\right.$$

série qu'on aurait pu prolonger à volonté, mais qui serait déjà trop incommode pour l'usage si l'on était obligé de conserver tous les termes que nous avons pris la peine de calculer.

55. Pour la rendre plus commode, soit comme ci-dessus

$$\tfrac{1}{2}x = 45° - \tfrac{1}{2}\omega\,;$$
$$\cos \tfrac{1}{2}x = \cos 45° \cos \tfrac{1}{2}\omega + \sin 45° \sin \tfrac{1}{2}\omega = \sin 45° (\cos \tfrac{1}{2}\omega + \sin \tfrac{1}{2}\omega)$$

et

$$\sin\tfrac{1}{2}x = \sin 45^\circ \cos\tfrac{1}{2}\omega - \cos 45^\circ \sin\tfrac{1}{2}\omega = \sin 45^\circ(\cos\tfrac{1}{2}\omega - \sin\tfrac{1}{2}\omega)$$

$$\cos^n\tfrac{1}{2}x - \sin^n\tfrac{1}{2}x = \sin^n 45^\circ[(\cos\tfrac{1}{2}\omega + \sin\tfrac{1}{2}\omega)^n - (\cos\tfrac{1}{2}\omega - \sin\tfrac{1}{2}\omega)^n]$$

$$= \sin^n 45^\circ \left\{ \begin{array}{l} \cos^n\tfrac{1}{2}\omega + n\cos^{n-1}\tfrac{1}{2}\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega + \frac{n.n-1}{2}\cos^{n-2}\tfrac{1}{2}\omega\sin^2\tfrac{1}{2}\omega \\ \quad + \frac{n.n-1.n-2}{2.3}\cos^{n-3}\tfrac{1}{2}\omega\sin^3\tfrac{1}{2}\omega + \text{etc.} \\ -\cos^n\tfrac{1}{2}\omega + n\cos^{n-1}\tfrac{1}{2}\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega - \frac{n.n-1}{2}\cos^{n-2}\tfrac{1}{2}\omega\sin^2\tfrac{1}{2}\omega \\ \quad + \frac{n.n-1.n-2}{2.3}\cos^{n-3}\tfrac{1}{2}\omega\sin^3\tfrac{1}{2}\omega - \text{etc.} \end{array} \right\}$$

On voit que tous les termes de rang impair se détruiront et que les autres seront positifs et doublés.

$$\cos^n\tfrac{1}{2}x - \sin^n\tfrac{1}{2}x$$

$$= \sin^n 45^\circ \left\{ \begin{array}{l} 2n\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos^{n-1}\tfrac{1}{2}\omega + \frac{n.n-1.n-2}{3}\sin^3\tfrac{1}{2}\omega\cos^{n-3}\tfrac{1}{2}\omega \\ \quad + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{3.4.5}\sin^5\tfrac{1}{2}\omega\cos^{n-5}\tfrac{1}{2}\omega + \text{etc.} \end{array} \right\}$$

Soit $n = 3$

$$\begin{aligned} \cos^3\tfrac{1}{2}x - \sin^3\tfrac{1}{2}x &= \sin^3 45^\circ(6\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos^2\tfrac{1}{2}\omega + 2\sin^3\tfrac{1}{2}\omega) \\ &= \tfrac{1}{2}\sin 45^\circ(6\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos^2\tfrac{1}{2}\omega + 2\sin^3\tfrac{1}{2}\omega) \\ &= 3\sin 45^\circ\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos^2\tfrac{1}{2}\omega(1 + \tfrac{1}{3}\text{tang}^2\tfrac{1}{2}\omega) \\ &= 3\sin 45^\circ\sin\tfrac{1}{2}\omega\left(\frac{1+\tfrac{1}{3}\text{tang}^2\tfrac{1}{2}\omega}{1+\text{tang}^2\tfrac{1}{2}\omega}\right), \end{aligned}$$

et le terme commun à la parabole et à l'ellipse

$$+ 3C\sin 45^\circ\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^3\sin\tfrac{1}{2}\omega\,(1 - \tfrac{2}{3}\sin^2\tfrac{1}{2}\omega)$$

ou

$$58''.13233\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^3\sin\tfrac{1}{2}\omega\,(1 - \tfrac{2}{3}\sin^2\tfrac{1}{2}\omega).$$

Soit $n = 5$

$$\cos^5\tfrac{1}{2}x - \sin^5\tfrac{1}{2}x = \sin^5 45^\circ(10\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos^4\tfrac{1}{2}\omega + 20\sin^3\tfrac{1}{2}\omega\cos^2\tfrac{1}{2}\omega + 2\sin^5\tfrac{1}{2}\omega)$$

$$= 10\sin^4 45^\circ\sin 45^\circ\sin\tfrac{1}{2}\omega\cos^4\tfrac{1}{2}\omega(1 + 2\text{tang}^2\tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{5}\text{tang}^4\tfrac{1}{2}\omega)$$

$$= \tfrac{10}{4}\sin 45^\circ\sin\tfrac{1}{2}\omega\left(\frac{1+2\text{tang}^2\tfrac{1}{2}\omega+\text{tang}^4\tfrac{1}{2}\omega-\tfrac{4}{5}\text{tang}^4\tfrac{1}{2}\omega}{1+2\text{tang}^2\tfrac{1}{2}\omega+\text{tang}^4\tfrac{1}{2}\omega}\right)$$

$$= \tfrac{10}{4}\sin 45^\circ\sin\tfrac{1}{2}\omega(1 - \tfrac{4}{5}\text{tang}^4\tfrac{1}{2}\omega\cos^4\tfrac{1}{2}\omega) = \tfrac{10}{4}\sin 45^\circ\sin\tfrac{1}{2}\omega(1 - \tfrac{4}{5}\sin^4\tfrac{1}{2}\omega),$$

et le premier terme de correction pour l'ellipse

$$\frac{3}{10A} \cdot \tfrac{10}{4} \, C \sin 45^\circ \left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^5 \sin \tfrac{1}{2}\omega \left(1 - \tfrac{4}{5} \sin^4 \tfrac{1}{2}\omega\right);$$

ou

$$\frac{3}{4A} \, C \sin 45^\circ \left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^5 \sin \tfrac{1}{2}\omega \left(1 - \tfrac{4}{5} \sin^4 \tfrac{1}{2}\omega\right),$$

mettons $8a = 4a$; or

$$\frac{7'.26654}{a} \left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^5 \sin \tfrac{1}{2}\omega \left(1 - \tfrac{4}{5} \sin^4 \tfrac{1}{2}\omega\right).$$

Ce premier terme suffira le plus souvent, et même sans le petit terme $\frac{4}{5} \sin^4 \frac{1}{2}\omega$, très-facile d'ailleurs à calculer d'après le terme parabolique précédent.

$$\cos^7 \tfrac{1}{2}x - \sin^7 \tfrac{1}{2}x$$

$$= \sin^7 45^\circ \left\{ \begin{array}{l} \quad 14 \sin \tfrac{1}{2}\omega \cos^6 \tfrac{1}{2}\omega + 70 \sin^3 \tfrac{1}{2}\omega \cos^4 \tfrac{1}{2}\omega \\ + \; 42 \sin^5 \tfrac{1}{2}\omega \cos^2 \tfrac{1}{2}\omega + 2 \sin^7 \tfrac{1}{2}\omega \end{array} \right\}$$

$$= \tfrac{14}{8} \sin 45^\circ \sin \tfrac{1}{2}\omega \cos^6 \tfrac{1}{2}\omega \left(1 + 5 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\omega + 3 \operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{7} \operatorname{tang}^6 \tfrac{1}{2}\omega\right)$$

$$= \tfrac{7}{4} \sin 45^\circ \sin \tfrac{1}{2}\omega \left(\frac{1 + 3 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\omega + 3 \operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2}\omega + \operatorname{tang}^6 \tfrac{1}{2}\omega + 2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{6}{7} \operatorname{tang}^6 \tfrac{1}{2}\omega}{1 + 3 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\omega + 3 \operatorname{tang}^4 \tfrac{1}{2}\omega + \operatorname{tang}^6 \tfrac{1}{2}\omega = \sec^6 \tfrac{1}{2}\omega}\right)$$

$$= \tfrac{7}{4} \sin 45^\circ \sin \tfrac{1}{2}\omega \left\{1 + \left(2 \operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{6}{7} \operatorname{tang}^6 \tfrac{1}{2}\omega\right) \cos^6 \tfrac{1}{2}\omega\right\}$$

$$= \tfrac{7}{4} \sin 45^\circ \sin \tfrac{1}{2}\omega \left(1 + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega \cos^4 \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{6}{7} \sin^6 \tfrac{1}{2}\omega\right);$$

et le second terme de correction pour l'ellipse

$$\frac{9}{56A^2} \cdot \tfrac{7}{4} \, C \sin 45^\circ \left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^7 \sin \tfrac{1}{2}\omega \left(1 + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega \cos^4 \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{6}{7} \sin^6 \tfrac{1}{2}\omega\right)$$

$$\frac{9}{32A^2} \, C \sin 45^\circ \left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^7 \sin \tfrac{1}{2}\omega \left(1 + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega \cos^4 \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{6}{7} \sin^6 \tfrac{1}{2}\omega\right),$$

ou

$$\frac{1'.362476}{a^2} \left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^7 \sin \tfrac{1}{2}\omega \left(1 + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega \cos^4 \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{6}{7} \sin^6 \tfrac{1}{2}\omega\right)$$

$$\frac{1'.362476}{a^2} \left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^7 \sin \tfrac{1}{2}\omega \left(1 + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega - 4 \sin^4 \tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{8}{7} \sin^6 \tfrac{1}{2}\omega\right)$$

$$\cos^8 \tfrac{1}{2} x - \sin^9 \tfrac{1}{2} x$$

$$= \sin^9 45^\circ \left\{ \begin{array}{l} 18 \sin \tfrac{1}{2}\omega \cos^8 \tfrac{1}{2}\omega + 168 \sin^3 \tfrac{1}{2}\omega \cos^6 \tfrac{1}{2}\omega \\ + 252 \sin^5 \tfrac{1}{2}\omega \cos^4 \tfrac{1}{2}\omega + 72 \sin^7 \tfrac{1}{2}\omega \cos^2 \tfrac{1}{2}\omega + 2 \sin^9 \tfrac{1}{2}\omega) \end{array} \right\}$$

$$= \tfrac{18}{16} \sin 45^\circ \sin \tfrac{1}{2}\omega \left(\frac{1 + \frac{28}{3} \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\omega + 14 \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2}\omega + 4 \operatorname{tang}^6 \frac{1}{2}\omega + \frac{1}{9} \operatorname{tang}^8 \frac{1}{2}\omega}{1 + 4 \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2}\omega + 6 \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2}\omega + 4 \operatorname{tang}^6 \frac{1}{2}\omega + \operatorname{tang}^8 \frac{1}{2}\omega} \right)$$

$$= \tfrac{9}{8} \sin 45^\circ \sin \tfrac{1}{2}\omega \left(1 + \tfrac{16}{3} \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega \cos^6 \tfrac{1}{2}\omega + 18 \sin^4 \tfrac{1}{2}\omega \cos^4 \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{8}{9} \sin^8 \tfrac{1}{2}\omega \right)$$

$$= \tfrac{9}{8} \sin 45^\circ \sin \tfrac{1}{2}\omega \left(1 + \tfrac{16}{3} \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega - 8 \sin^4 \tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{16}{9} \sin^8 \tfrac{1}{2}\omega \right);$$

et le troisième terme de correction pour l'ellipse

$$\frac{5}{48 A^3} C \tfrac{9}{8} \sin 45^\circ \sin \tfrac{1}{2}\omega (1 + \text{etc.})$$

$$\frac{45}{384 A^3} C \sin 45^\circ \sin \tfrac{1}{2}\omega (1 + \text{etc.})$$

$$\frac{0'{,}28385}{a^3} \left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z} \right)^9 \sin \tfrac{1}{2}\omega \left(1 + \tfrac{16}{3} \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega - 8 \sin^4 \tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{16}{9} \sin^8 \tfrac{1}{2}\omega \right),$$

à la petitesse de ce coefficient qui deviendra insensible quand il sera divisé par a^3, il est aisé de voir qu'il est inutile d'évaluer le terme qui dépend de a^4 et des $11^{\text{èmes}}$ puissances.

54. Ainsi nous aurons généralement

$$T' - T = 58'.13233 \left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z} \right)^3 \sin \tfrac{1}{2}\omega \left(1 - \tfrac{2}{3} \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega \right)$$

$$+ \frac{7'{,}26654}{a} \left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z} \right)^5 \sin \tfrac{1}{2}\omega \left(1 - \tfrac{4}{5} \sin^4 \tfrac{1}{2}\omega \right)$$

$$+ \frac{1'{,}362476}{a^2} \left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z} \right)^7 \sin \tfrac{1}{2}\omega \left(1 + 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega - 4 \sin^4 \tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{8}{7} \sin^6 \tfrac{1}{2}\omega \right)$$

$$+ \frac{0'{,}28385}{a^3} \left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z} \right)^9 \sin \tfrac{1}{2}\omega \left(1 + \tfrac{16}{3} \sin^2 \tfrac{1}{2}\omega - 8 \sin^4 \tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{16}{9} \sin^8 \tfrac{1}{2}\omega \right)$$

$$+ \text{etc.}.$$

Les logarithmes des coefficiens sont

	1.7644178; 0.8613278;	0.1343290 et	9.4530879
dont il faudra retrancher	$\log a$	$2 \log a$	$3 \log a$:
ainsi pour la comète de Halley	8.7442821	7.4885642	6.2328463
	9.6056099	7.6228932	5.6859342
et les trois coeff. deviendront	0'.40328	0'.0041966	0'.000048522

55. Lambert a tiré quelques conséquences remarquables de son théorème ci-dessus; ce théorème qui n'emploie que les côtés du triangle n'est pourtant pas indépendant de l'angle $(u' - u)$. Supposons cet angle nul, le triangle se réduit à une ligne, et $k = v' - v$, donc

$$T' - T = C\left[\left(\frac{v' + v + v' - v}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{v' + v - v' + v}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right] = C(v'^{\frac{3}{2}} - v^{\frac{3}{2}}).$$

La comète, en ce cas, se mouvrait le long de l'axe de la parabole; et $T' - T$ serait le tems du chemin le long de la droite $(v' - v)$; Supposez $v = 0$; $T' - T = Cv'^{\frac{3}{2}}$ sera le tems employé par la comète à tomber de la distance v' au centre du soleil; ou en général le tems qu'un corps quelconque emploierait à tomber sur le soleil dont il serait éloigné de la quantité v'; donnons à v' pour valeurs successives les demi-grands axes des ellipses planétaires, nous aurons pour le tems que chacune des planètes emploierait à tomber sur le soleil, les tems renfermés dans la table suivante calculée sur la formule $t = 27^j.40385 v^{\frac{3}{2}}$.

Planètes.	Tems de la chute.
☿	$6^j.600$
♀	16.858
♁	27.40385
♂	51.547
⚳	125.85
♃	525.42
♄	806.64
♅	2284.50

Cette chute étant plus rapide qu'aucun mouvement circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique, Lambert en conclut que jamais aucune comète ne peut faire un chemin égal aux nombres que donne ou suppose cette table; ainsi jamais en $27^j.4$ elle ne pourra décrire un arc égal à la distance moyenne de la terre au soleil. Doublez les nombres de cette table et vous aurez le tems qui ne suffira jamais à une comète pour traverser centralement l'orbite d'une planète; ainsi jamais en 55 jours une comète ne traverserait centralement l'orbite de la terre.

56.

56. Lambert a fait une table des quantités $\left(\frac{v'+v\pm k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$; quand on connaît les trois côtés v', v et k on entre dans la table successivement avec les deux quantités $\frac{v'+v+k}{2}$ et $\frac{v'+v-k}{2}$. On y trouve deux nombres, on retranche le second du premier, le reste est le tems que la comète aurait employé à décrire le secteur parabolique dans lequel est inscrit le triangle rectiligne (v', v, k). Pingré a refait cette table avec plus d'étendue et d'exactitude; Cométographie, tome II, page 461. Mais je préfère la table (48) ou la formule

$$C\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^3 \sin 45^\circ \left(3\sin\tfrac{1}{2}\omega \cos^2\tfrac{1}{2}\omega + \sin^3\tfrac{1}{2}\omega\right).$$

57. Nous avons dans la théorie des planètes tiré un grand parti du passage par les nœuds, cette observation est beaucoup plus rare et presqu'impossible pour les comètes; mais si un hasard l'amenait, elle abrégerait considérablement le calcul de l'orbite. En effet la corde serait alors égale à la somme des rayons vecteurs; le théorème de Lambert deviendrait alors

$$\frac{T'-T}{C}=\left(\frac{v'+v+v'+v}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{v'+v-v'-v}{2}\right)^{\frac{3}{2}}=(v'+v)^{\frac{3}{2}};$$

d'où

$$v'+v=\left(\frac{T'-T}{C}\right)^{\frac{2}{3}}:$$

Soient N et N′ les nœuds de la comète (fig. 67, 68, 69), T et T′ les deux lieux de la terre; dans le triangle TST′ tout est connu.

Pour la première observation

$$\sin SNT : \sin STN :: ST : SN = v = \frac{ST \sin STN}{\sin SNT} = \frac{V \sin T}{\sin N};$$

pour la seconde

$$\sin SN'T' : \sin ST'N' :: ST' : SN' = v' = \frac{ST' \sin ST'N'}{\sin SN'T'} = \frac{V' \sin T'}{\sin N'};$$

donc

$$v'+v=k=\frac{V \sin T}{\sin N}+\frac{V' \sin T'}{\sin N'}.$$

en nommant T et T′ les angles à la terre, N et N′ les angles à la comète.

Les distances TN et T'N', prolongées s'il est nécessaire, se croiseront en un point C. Ce point peut être en-deçà du soleil (fig. 67), alors le quadrilatère STT'C aura un angle rentrant $= 360° - C$, et l'on aura

$$T + T' + S + 360° - C = 360°,$$

d'où

$$C = T + T' + S :$$

S sera le mouvement de la terre ou du soleil dans l'intervalle, mais

$$C = 180° - N - N' = T + T' + S,$$

donc

$$N' + N = 180° - (T + T' + S) = A \quad \text{et} \quad N' = A - N.$$

Le point C peut être au-delà du soleil (fig. 68), alors le quadrilatère STT'C donnera

$$T + T' + 360° - S + C = 360°,$$
$$C = S - (T + T') = 180° - (180° - N) - (180° - N') = N' + N - 180°;$$
$$N' + N = 180° + S - T - T' = 180° - (T + T' - S) = A \quad \text{et}$$
$$N' = A - N.$$

Le point C peut être au-delà de la terre (fig. 69); alors

$$S + 180° - T + 180° - T' + C = 360°,$$
$$C = T + T' - S = 180° - (N' + N),$$
$$N' + N = 180° - (T + T' - S) = A.$$

Soit donc $A = 180° - (T + T' \pm S)$, le signe $+$ si les distances TN et T'N' se croisent sans être prolongées, et le signe $-$ s'il faut les prolonger; dans tous les cas $N' = A - N$,

$$v' + v = k = \frac{V \sin T}{\sin N} + \frac{V' \sin T'}{\sin (A - N)} = \frac{a}{\sin N} + \frac{b}{\sin (A - N)},$$

cette équation est facile à résoudre en essayant pour N des valeurs en progression arithmétique, les valeurs qui en résulteront pour k indiqueront aisément la véritable valeur de N, et ce moyen est le plus commode; mais voulez-vous une solution directe, multipliez tout par $\sin(A - N)$

$$k \sin(A - N) = b + \frac{a \sin (A - N)}{\sin N};$$

$$k \sin A \cos N - k \cos A \sin N = b + a \sin A \cot N - a \cos A,$$
$$k \sin A \cos N - k \cos A \sin N - a \sin A \cot N = b - a \cos A,$$
$$m \cos N - n \sin N - p \cot N = q,$$

pour abréger.

$$m\left(\frac{1-\text{tang}^2\tfrac{1}{2}N}{1+\text{tang}^2\tfrac{1}{2}N}\right) - \frac{2n\,\text{tang}\tfrac{1}{2}N}{1+\text{tang}^2\tfrac{1}{2}N} - p\left(\frac{1-\text{tang}^2\tfrac{1}{2}N}{1+\text{tang}^2\tfrac{1}{2}N}\right)\left(\frac{1+\text{tang}^2\tfrac{1}{2}N}{2\,\text{tang}\tfrac{1}{2}N}\right) = q$$
$$m(1-\text{tang}^2\tfrac{1}{2}N)\,2\,\text{tang}\tfrac{1}{2}N - 4n\,\text{tang}^2\tfrac{1}{2}N - p(1-\text{tang}^4\tfrac{1}{2}N)$$
$$= 2q\,\text{tang}\tfrac{1}{2}N(1+\text{tang}^2\tfrac{1}{2}N)$$
$$2m\,\text{tang}\tfrac{1}{2}N - 2m\,\text{tang}^3\tfrac{1}{2}N - 4n\,\text{tang}^2\tfrac{1}{2}N - p + p\,\text{tang}^4\tfrac{1}{2}N$$
$$= 2q\,\text{tang}\tfrac{1}{2}N + 2q\,\text{tang}^3\tfrac{1}{2}N$$
$$p\,\text{tang}^4\tfrac{1}{2}N - 2(m+q)\,\text{tang}^3\tfrac{1}{2}N - 4n\,\text{tang}^2\tfrac{1}{2}N + 2(m-q)\,\text{tang}\tfrac{1}{2}N = p,$$

équation trop incommode pour la pratique; mais d'une ou d'autre manière, quand vous connaîtrez N et N', vous en déduirez v et v' par les formules primitives, les deux angles TSN, T'SN' au soleil, qui seront les distances héliocentriques de la terre aux nœuds, et par suite la longitude du nœud. Vous aurez les deux anomalies par le théorème de Nicolic, et vous observerez que $\tfrac{1}{2}(u'-u) = \frac{180°}{4} = 45°$. Enfin vous aurez la distance périhélie $h = v \cos^2\tfrac{1}{2}u = v' \cos^2\tfrac{1}{2}u'$. Il ne resterait à trouver que l'inclinaison pour laquelle il faudrait une observation intermédiaire.

Lambert en indiquant cet usage de son théorème, se contente de dire que le problème se réduit ensuite à mener une ligne donnée, par un point donné, et terminée à deux lignes données de position, ce qui est évident par la figure.

58. Dans ce cas particulier comme dans tous les autres, il faut trois observations pour déterminer entièrement l'orbite d'une comète, comme celle d'une planète. L'approximation parabolique donne quelques facilités, et la rapidité du mouvement fait qu'on obtient en moins de tems un arc suffisant.

Nous allons exposer plusieurs méthodes, car presque tous les géomètres et les astronomes, à commencer par Newton, se sont exercés sur ce problème. Nous commencerons par la méthode que les astronomes ont toujours préférée; nous tâcherons seulement de mettre plus d'ordre dans les calculs; d'abréger les opérations autant qu'il nous sera possible, par

quelques considérations qu'on avait négligées, et qui feront de cette solution trigonométrique une méthode toute nouvelle.

59. Une comète a été observée dans un cercle de latitude qui faisait avec le cercle de latitude passant par le soleil un angle $T =$ élongation.

Abaissons la perpendiculaire SP du soleil sur la distance accourcie TC de la terre à la comète (fig. 70). Nous aurons en nommant V le rayon vecteur de la terre

$$SP = V \sin T, \quad TP = V \cos T, \quad TSP = 90° - T;$$

soit $PSC = x$

$$PC = SP \tang x = V \sin T \tang x;$$
$$TC = (TP + PC) = V \cos T + V \sin T \tang x;$$

ou

$$TC = \frac{V \cos T \cos x + V \sin T \sin x}{\cos x} = \frac{V \cos (T - x)}{\cos x} = \rho$$
$$SC = \frac{SP}{\cos x} = \frac{V \sin T}{\cos x}.$$

Soit λ la latitude héliocentrique, g la latitude géocentrique

$$\tang \lambda = \frac{TC}{SC} \cdot \tang g = \frac{V \cos (T - x) \cos x}{\cos x V \sin T} \tang g = \frac{\cos (T - x) \tang g}{\sin T};$$

soit L la longitude héliocentrique de la comète

$$L = ☋ - TSC = ☋ - TSP - x = ☋ - 90° + T - x$$
$$= 180° + \odot - 90° + T - x = 90° + \odot + T - x;$$
$$\nu = \text{rayon vecteur} = \frac{SC}{\cos \lambda} = \frac{V \sin T}{\cos \lambda \cos x}.$$

Tout dépend donc de l'angle x, mais il est inconnu.

60. Le jour qu'on découvre une comète, on n'en a qu'une observation, ou du moins, si l'on en a plusieurs, elles sont à très-peu d'intervalle l'une de l'autre, et pour atténuer les erreurs de l'observation, on les réunit toutes et l'on en prend le milieu.

Tout ce qu'on peut faire ce premier jour est donc de calculer des longitudes, des latitudes héliocentriques et des rayons vecteurs, en faisant

pour x des suppositions différentes, à commencer de $x = 0$ qui simplifie les formules.

Il est infiniment peu probable que $x = 0$, c'est-à-dire, que la comète soit en P dans la perpendiculaire SP.

Ces calculs se font avec facilité et promptitude, on ne peut y craindre aucune erreur importante, et on les fait avec intérêt, ce qui est une chose essentielle; jamais je n'ai trouvé le calcul d'une observation ennuyeux quand il est fait le jour même.

61. Le second jour on fera des calculs semblables. La comète peut dans l'intervalle avoir changé de grandeur, d'éclat et de latitude, assez pour indiquer si elle s'est rapprochée ou éloignée de la terre; cette remarque peut limiter le nombre des suppositions à faire pour x.

Nous avons vu qu'en supposant la longitude géocentrique de la comète plus grande que celle du soleil, ou à l'orient du soleil, on a

$$L = 90^\circ + \odot + T - x.$$

Ainsi le mouvement entre les deux observations ou

$$dL = d\odot + dT - dx \quad \text{et} \quad dL + dx = d\odot + dT = dC.$$

dL est rarement de plusieurs degrés, ainsi dx ne diffère jamais considérablement de $d\odot + dT$; $v = \frac{V \sin T}{\cos\lambda \cos x}$, ainsi $v > V \sin T$, on a donc une limite pour la valeur de v, d'ailleurs

$$du = \frac{dt \cos^4 \frac{1}{2} u}{h^{\frac{3}{2}} 41.1057775 \sin 1''} = \frac{h^{\frac{1}{2}} dt}{v^2 . 41.10 \sin 1''};$$

et supposant $v = h$, ce qui est le *minimum*, $du = \frac{dt}{v^{\frac{3}{2}} . 41.10 \sin 1''}$ tout au plus.

Malgré toutes ces considérations, on ne peut le second jour avoir encore qu'une idée fort vague des mouvemens de la comète.

62. Dès qu'on a une troisième observation, on voit assez aisément quelles suppositions pour x donnent à la fois une marche probable aux v, aux λ, aux dL et aux $d\rho$, ρ étant la distance accourcie de la comète à la terre.

Le second jour on a déjà resserré les limites des suppositions pour x, on les resserre davantage le troisième jour.

On a fait successivement des tableaux des L, λ, ν et ρ pour chaque valeur de x de degré en degré dans une certaine étendue. Ces calculs resteront et serviront dans toutes les opérations subséquentes à la réserve de quelques x des deux premiers jours que l'on pourra supprimer. On conservera ceux qui paraissent utiles, on pourra même étendre les trois tableaux par interpolation jusqu'aux dixaines de minutes, ce qui ne donnera jamais d'autre peine que celle d'écrire.

Mais pour fixer les idées, appliquons cette méthode à un exemple, et pour mieux examiner la marche des opérations, prenons pour exemples, non des observations réelles, mais des lieux calculés dans une orbite connue, avec laquelle nous calculerons des lieux géocentriques que nous prendrons pour des observations véritables, nous pourrons mieux juger de nos approximations successives.

63. De toutes les comètes la plus célèbre, la seule bien connue, la plus intéressante est celle dont Halley avait annoncé le retour pour 1759. Elle reparut en effet et fut aperçue d'abord par un paysan nommé *Palitzch* à Prohlis près de Dresde, le 25 et le 27 décembre 1758. Le docteur Hoffmann l'observa le 28. Un astronome de Leipsic reconnut que c'était la comète attendue; il en donna une éphéméride (*Académie des Sc. Mémoires de* 1760, *page* 445).

Le moyen que prit Delisle pour la retrouver fut peut-être ce qui la fit échapper si long-tems aux regards de Messier, qui la cherchait où elle n'était pas. Delisle s'était persuadé qu'elle ne serait visible qu'un mois avant le passage au périhélie; elle fut trouvée à 75 jours de distance.

64. Examinons d'abord les observations de Messier; elles s'étendent du 21 janvier au 14 février, la comète se perdit alors dans les rayons du soleil; il la revit du 31 mars au 16 avril, où elle disparut une seconde fois, parce que la déclinaison était devenue trop australe. On la revit le 1[er] mai et on l'observa jusqu'au 3 juin; ainsi nous avons trois apparitions différentes, qui séparément pourraient donner l'orbite.

Voici ces observations.

		Æ	D	Mouvement diurne.	
21 janvier.	7h t. moy.	352° 15′ 52″	1° 32′ 32″ B	— 24′ 47″	— 2′ 59″
22	7. 3′ 31″	351.51. 5	1.29 33	— 24.49	— 5. 6
23	7.20.20	351.26.16	....	— 23.44	— 4.45
25	7.16.40	350.38.48	1.14.14	— 22.46	— 5. 0
27	6.55.30	349.53.16	1. 4.45	— 21.23	— 4.55
28	6.28.22	349.31.53	0.59.45	— 22. 4	— 4.39
31	7.29.30	348.25.40	0.44.50	— 19.58	— 4.25
1er févr.	6. 5. 0	348. 5.42	0.40.11	— 20.18	— 4.22
3	7.21. 7	347.25. 6	0.31.20	— 20. 0	— 3.31
4	6.54.52	347. 5. 6	0.26.58	— 20.21	— 8.20
11	6.46.12	344.42.20	0. 2.20 B	— 23.30	— 9.47
12	6.34.40	344.18.50	0. 6. 0 A	— 18.45	
14	6.44.37	343.41.20	0.15.47 A		
31 mars.	16h 21′ 16″	328. 0.53	8° 25′ 36″ A	— 16′ 54″	— 18′ 31″
1er avril.	16.37.44	327.44.29	8.44. 7	— 15.44	— 25.21
5	16.37.36	326.41.43	10.25.30	— 15.23	— 33.53
6	16.25.30	326.26.20	10.59.23	— 16.15	— 35.37
7	16.21.43	326.10. 5	11.35.10	— 21.58	— 50. 1
13	16.12.18	323.58.16	16.35.18	— 33.38	— 63.58
14	16. 1. 6	323.24.38	17.49.16	— 41.23	— 52.23
16	16.11.21	322. 1.55	21.14. 1		
1er mai.	9h 38′ 50″	159.50.29	25° 41′ 18″	— 72′ 30″	+ 183′ 5″
3	9. 0. 4	157.25.50	19.35. 7	— 42.19	+ 142.30
5	9.20.11	156. 0.52	15.30. 7	— 31. 5	+ 91.16
6	9.55.40	155.29.49	13.59.51	— 24. 8	+ 77.38
7	10. 9.34	155. 5.39	12.42.13	— 19.35	+ 61.36
8	10.39.22	154.46. 4	11.40.37	— 15.39	+ 54.45
9	10.31.57	154.30.25	10.45.52	— 16.15	+ 43.55
12	10.46.30	153.59.55	8.34. 6	— 6.23	+ 30.20
13	9.20. 9	153.53.32	8. 3.26	— 6.25	+ 32.26
14	9.36.22	153.47. 7	7.30.59	— 2.50	+ 26.31
15	10.20.48	153.44.17	7. 4.28	— 3. 7	+ 25. 5
16	9.50.13	153.41.10	6.41.23	— 2.12	+ 21.21
17	10.25.35	153.38.58	6.20. 2	— 0.45	+ 19.55
18	10. 0. 9	153.38.15	6. 0.27	— 0.20	+ 16.37
19	9.50. 4	153.37.55	5.43.50	+ 0.36	+ 15.27
20	9. 7.52	153.38.31	5.28.23	+ 0.47	+ 14.21
21	9.13.40	153.39.18	5.14. 2	+ 1.28	+ 13. 0
22	9.30.42	153.40.56	5. 1. 0	+ 1.53	+ 11.50
23	9.38.18	153.42.49	4.49.12	+ 2.35	+ 11.15
24	9.53.56	153.45.24	4.37.57	+ 2.38	+ 9.34
25	9.23.26	153.48. 2	4.28.23	+ 3.19	+ 8.50
26	9.30.33	153.51.21	4.19.33	+ 4. 5	+ 8.21
27	9.25.57	153.55.26	4.11.12	+ 3.38	+ 8. 1
28	9.16.49	153.59. 4	4. 3.11	+ 5. 2	+ 7.28
30	10. 9.53	154. 9. 9	3.48.15	+ 4.25	+ 5.25
3 juin.	9.59.20	154.26.50	3.26.11		

Longitudes et latitudes de Messier comparées à celles de Lacaille.

		Longitude.	Latitude.		^{h} $'$	Longitude.	Latitude.
13 avr.	$16^h 12'$	10.20.51.26	2. 9.18 A Messier.	18 mai.	10. 0	9. 7.48.51	15.46.35 A Messier.
	16.12	10.21.51.42	2. 8.27 A LaCaille.		10. 8	9. 7.50.20	15.46.22 A LaCaille.
1er mai	9.39	9.22.28.20	31.26.27 A	20 mai.	9. 8	9. 7.36.46	15.16.41
	9.23	9.22.31.40	21.26.32 A		9.29	9. 7.38.20	15.16.18
3 mai.	9. 0	9.17. 9.45	26.50.25	21 mai.	9.14	9. 7.32.12	15. 3.18
	9. 4	9.17.10.42	26.47. 5		9. 6	9. 7.35.22	15. 4. 0
5 mai.	9.20	9.13.59. 3	23.40.14	22 mai.	9.31	9. 7.28.37	14.50.23
	8.50	9.14. 1.35	23.41.35		9.49	9. 7.31.25	14.49.30
6 mai.	9.36	9.12.49.56	22.28. 0	23 mai.	9.38	9. 7.25.55	14.38.42
	9.40	9.13.53. 0	22.26.20		9.56	9. 7.28.42	14.37.10
8 mai.	10.39	9.11. 9.24	20.36.16	24 mai.	9.54	9. 7.24. 5	14.27.17
	9. 6	9.11.41. 0	20.36.25		9.30	9. 7.26.50	14.26.56
9 mai.	10.32	9.10.31.35	19.51.34	25 mai.	9.23	9. 7.22.57	14.17.26
	9. 2	9.10.33. 5	19.49.45		9.49	9. 7.24.46	14.16. 0
12 mai.	10.47	9. 9. 9.39	18. 1.15	26 mai.	9.31	9. 7.22.46	14. 8. 0
	9.38	9. 9.10.40	18. 2. 5		9.53	9. 7.25.30	14. 7. 7
14 mai.	9.36	9. 8.32.36	17. 7.24	27 mai.	9.26	9. 7.23.29	13.58.44
	8.53	9. 8.35.20	17. 8.25		10. 1	9. 7.25.53	13.57. 8
15 mai.	10.21	9. 8.19.28	16.43.46	28 mai.	9.17	9. 7.23.54	13.49.58 A
	9. 2	9 8.21.50	16.46.20		10.10	9. 7.26.32	13.49. 0 A
17 mai.	10.26	9. 7.56.53	16. 4.29 A				
	9.39	9. 7.59.48	16. 4.55 A				

65. Si nous examinons les observations par les mouvemens diurnes qui s'en déduisent, nous pourrons soupçonner quelques erreurs vers le 12 février, car les différences secondes du mouvement en ascension droite augmentent brusquement pour diminuer de même. Le mouvement en déclinaison est encore plus irrégulier.

On voit en général que le mouvement est assez lent pour que l'on puisse prendre un milieu entre les observations d'un même jour.

Le 7 avril la latitude était à $16^h 10'$........	1.53.28 B
Le 13 à $16^h 10'$........................	2. 9.33 A
Mouvement de 6 jours..................	4. 3. 1

$$4^{\circ} 3' 1'' : 6^j :: 1^{\circ} 53' 28'' : 2^j{,}8014;$$

ainsi $2^j{,}8014$ après le 7, la comète était au nœud descendant.

66.

66. Généralement Messier fait les longitudes plus faibles que La Caille de 1 à 3′, ce qui vient probablement des étoiles peu sûres employées par Messier

Messier fait les latitudes tantôt plus faibles, tantôt plus fortes que celles de La Caille de 1 à 3′, ce qui peut encore tenir à la même cause.

Hell se rapproche plus souvent de La Caille, quelquefois aussi de Messier.

J'en dis autant de Ratte à Montpellier. On voit donc qu'il est difficile de répondre de deux ou trois minutes sur une observation que l'on trouve sans aucun détail qui puisse mettre l'astronome en état de recommencer les calculs et d'apprécier l'observation, et c'est le cas le plus ordinaire.

67. Plusieurs astronomes ont calculé l'orbite de cette comète. D'après le témoignage de Pingré, l'une des orbites de La Caille est celle qui satisfait le mieux aux premières observations de Messier; il y a cependant des erreurs qui vont jusqu'à 7′. En traitant la comète comme nouvelle et simplement parabolique, Pingré dit encore qu'on aurait pu se tromper de 2° sur le périhélie.

M. Olbers, en prenant cette comète pour exemple, a fait choix de l'ellipse de Klinkenberg; nous l'imiterons parce que cette ellipse diffère très-peu de celle de La Caille, et que d'ailleurs c'est une chose assez indifférente pour notre objet.

Suivant Klinkenberg, le demi-grand axe est 18.018467 $= a$, $\log a = 1.2557179$. La distance périhélie est... 0.5829729 $= h$, $\log h = 9.7656484$. Le lieu du nœud........ $1^s 23° 45' 35''$. L'inclin. $17° 40' 5''$. La longit du périhélie.... 10. 3.16.18.

Passage au périhélie mars $12^j\ 13^h\ 7'\ 35'',5$, ou $71^j,546933$.

Les observations du 21 janvier au 24 février, ayant été faites de 6^h à $7^h \frac{1}{2}$. Je suppose 7^h environ, ou $0^j,2969$ pour toute cette première époque, afin que les distances au périhélie soient toutes d'un nombre de jours + un quart, ce qui au reste n'est nullement nécessaire dans notre méthode.

Les observations d'avril ont été faites de 16^h à $16^h\ 38'$; j'ai supposé $0^j,6469$ pour cette seconde époque, afin d'avoir toujours pour distance au périhélie un nombre rond de jours plus $\frac{1}{10}$.

Pour la troisième époque, j'ai pris $0^j,4469$, pour que la distance fût un nombre entier plus $\frac{9}{10}$.

68. Pour essayer nos formules et nos méthodes sur cette orbite, je cherche

$$\log e = \log \frac{a-h}{a} = \frac{17.4354941}{18.0184467} = 0.96764567 = \sin 75^\circ\ 23'\ 8'',2,$$

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}x = \left(\frac{a-e}{a+e}\right)^{\frac{1}{2}} \text{tang}\,\tfrac{1}{2}u$$

$$= \left(\frac{h}{2a-h}\right)^{\frac{1}{2}} \text{tang}\,\tfrac{1}{2}u = \text{tang}\,(7^\circ\ 12'\ 25'',9)\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u.$$

C'est sur cette formule que j'ai calculé la table des anomalies excentriques pour tous les degrés de l'anomalie vraie.

x ainsi connu, nous pouvons déterminer t par la formule (5).

$$t = \frac{2a^{\frac{3}{2}}}{\sin 59'\ 8'',36}\left[m\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}x + (\tfrac{2}{3}-m)\,\text{tang}^3\tfrac{1}{2}x - (\tfrac{4}{5}-m)\,\text{tang}^5\tfrac{1}{2}x \right.$$
$$\left. + (\tfrac{6}{7}-m)\,\text{tang}^7\tfrac{1}{2}x - \text{etc.}\right]$$

dont il faut d'abord calculer les coefficiens; on trouvera

$$t = 287^j,7105\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}x + 5640^j,644\,\text{tang}^3\tfrac{1}{2}x - 6826^j,316\,\text{tang}^5\tfrac{1}{2}x$$
$$+ 7334,46\,\text{tang}^7\tfrac{1}{2}x - 7616,754\,\text{tang}^9\tfrac{1}{2}x + 7796,422\,\text{tang}^{11}\tfrac{1}{2}x.$$

Cette formule ne converge que par les tangentes, et seulement tant que $\frac{1}{2}x < 45^\circ$. Soit $u = 110$ et $\frac{1}{2}u = 55^\circ$, c'est le *maximum* pour notre comète. On trouvera $t = 85^j,97606$; et dans ce cas, qui est ici le plus défavorable, six termes ont suffi. J'ai cependant préféré la formule (XXI. 201). Cherchons le rayon vecteur pour cette même anomalie de 110°,

	$\log h$	9.7656484
	C. $\cos^2\frac{1}{2}u = 55^\circ$......	0.4828174
rayon vect. parabol. = 1.772008		0.2484658
	$\cos^2\frac{1}{2}x$..............	9.9856736
rayon vect. elliptiq. = 1.714508		0.2341394
différence = 0.057500.		

Cette différence est la plus forte pour notre ellipse; elle suppose que l'anomalie est la même.

69. Pour changer ces tems en ceux de la comète de 109 jours; il faut les diviser par $h^{\frac{3}{2}}$,

compl. log h.....	0.2343516
moitié.........	0.1171758
compl. log $h^{\frac{3}{2}}$.........	0.3515274
$t =$ 85.97606...	1.9343775
$t' =$ 193.1545....	2.2859049

Ainsi $t = 85^j,97606$ devient $t' = 193^j,1545$. Avec cette anomalie, notre table nous donne,

pour 193^j.......	109° 21′ 3″,5
pour 0,1......	56 ,0
0,05.....	28 ,0
004....	2 ,24
0005...	28
anomalie parabolique.....	109.22.30.02
elliptique.....	110
différence....	0.37.29,98
la formule de correction (8)...	37.32,60
erreur de la formule...	+ 2″62
log h.......	9.7656484
C. cos² $\frac{1}{2}u$ = 54° 41′ 15″........	0.4760907
rayon vecteur parabol. = 1.744773	0.2417391
rayon vecteur elliptiq. = 1.714508	
différence... = 0.030265.	

70. Pour faire mes essais sur la comète de Halley, j'ai commencé par calculer pour tout le tems de l'apparition, les x pour tous les u de degré en degré par la formule $\tang \frac{1}{2}x = \left(\frac{a-e}{a+e}\right)^{\frac{1}{2}} \tang \frac{1}{2}u$. C'est la seconde colonne de la table I.

Avec les x, j'ai calculé les t par la formule (XXI. 201); c'est la quatrième colonne. J'en ai déduit $t' = \frac{t}{h^{\frac{3}{2}}}$; c'est la sixième colonne. Avec les t', la table générale m'a donné les u paraboliques ou les u' qu'on voit dans la seconde colonne de la table II.

Dans cette seconde table on voit à côté des anomalies vraies, elliptiques et paraboliques, de degré en degré, les différences $(u' - u)$. Dans la colonne suivante on trouve, sous le titre F, ces mêmes différences calculées suivant la formule (8). Dans la colonne F′, on trouve ces mêmes différences calculées sur la formule (F′) qui conserve $\frac{1}{2}u'$ avec $\frac{1}{2}u$; elle paraîtrait devoir être un peu plus exacte, et cependant elle s'écarte encore un peu plus des différences trouvées directement. Mais, à cause des m^2 qui sont négligées, ni l'une ni l'autre ne peut donner des quantités bien exactes. A 120°, la formule (F) est en erreur de 18″; à 105°, l'erreur n'était que de 0″,2; elle paraît augmenter très-rapidement. Pour notre comète, l'erreur la plus forte sera de 8″,4 à 56°, dont la formule donne la différence trop petite. On pourra donc, sans beaucoup de scrupule, faire usage de notre formule

$$du = \left(\frac{m}{\sin 8''}\right) \sin 2u - \left(\frac{0{,}4\,m}{\sin 1''}\right) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}u \sin^4 \tfrac{1}{2}u$$
$$= 834'',24 \sin 2u - 2669'',45 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}u \sin^4 \tfrac{1}{2}u,$$

qui donnera pour $u = 110°$.

$$du = -8'\,56'',21 - 28'\,36'',52 = -37'\,32'',73.$$

Sous une forme différente et beaucoup plus commode pour le calcul, notre formule est identique à celles de Simpson et de M. Laplace. Le premier terme n'a qu'une valeur bornée qui croît jusqu'à 45° et change de signe à 90°; l'autre terme, toujours négatif tant que u ne surpasse pas 180°, croît indéfiniment.

73. La table que nous avons calculée pour la comète de 1759, servirait pour toute autre comète; il suffirait d'en multiplier les termes par la constante $\frac{m'}{m}$, m' étant $\left(\frac{h'}{a'}\right)$ ou le rapport de la distance périhélie au demi-grand axe. En divisant les nombres de notre table par $m = 0.0323542$, on aurait une table générale dont il suffirait de multiplier les nombres par m'. Si l'on voulait refaire avec plus d'étendue

cette table générale, on se servirait de la formule

$$\frac{du}{m} = \frac{\sin 2u}{\sin 8''} - \frac{0{,}4 \operatorname{tang}\frac{1}{2}u \sin^4\frac{1}{2}u}{\sin 1''} = \frac{\sin 2u}{\sin 8''} - \frac{0{,}4 \sin^5\frac{1}{2}u}{\sin 1'' \cos\frac{1}{2}u},$$

ou

$$\frac{\sin du}{m} = \frac{\sin 2u}{8} - \frac{0{,}4 \sin^5\frac{1}{2}u}{\cos\frac{1}{2}u}.$$

M. de Zach a calculé cette table sur la formule de M. Laplace; cherchons par nos formules le log $\sin du$ pour 179° d'anomalie vraie,

C. 8...	9.0969100	0,4...	9.6020600
$\sin 2u = 358$ —	8.5428192	C. $\cos\frac{1}{2}u = 89°\ 30'$	2.0591581
log B... —	7.6397292	$\sin^5\frac{1}{2}u =$	9.9999175
C. log A......	8.3388644	log A....	1.6611356
log constant....	9.6377843	D....	1.0000413
log D..........	5.6163779	$\log\left(\frac{\sin du}{m}\right)$...	1.6611769
		Suivant M. de Zach.......	1.6611767.

La table de M. de Zach est donc suffisamment exacte, mais les différences énormes d'un degré à l'autre font qu'elle sera rarement utile. On aura plutôt fait par la formule ci-dessus. L'argument de cette table est l'anomalie vraie dans la parabole, ce serait bien plutôt l'anomalie vraie dans l'ellipse; mais dans le fait ce n'est ni l'une ni l'autre. Notre formule (F) donne une correction additive à l'anomalie elliptique, ou une correction soustractive de l'anomalie parabolique; mais cette correction ne serait sûre, pour 120°, qu'à 18" près; elle le serait moins encore pour une comète pour laquelle m serait plus considérable que pour la comète de 1759.

72. Le rayon vecteur elliptique

$$V = \frac{h \cos^2\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}u} = \frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u} - \frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u}\sin^2\frac{1}{2}x.$$

Le rayon vecteur parabolique

$$\mathrm{V}' = \frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u'} = \frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}(u+du)}$$

$$= \frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u\cos^2\frac{1}{2}du + \sin^2\frac{1}{2}u\sin^2\frac{1}{2}du - 2\sin\frac{1}{2}du\cos\frac{1}{2}du\sin\frac{1}{2}u\cos\frac{1}{2}u}$$

$$= \frac{\left(\frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u\cos^2\frac{1}{2}du}\right)}{1 + \mathrm{tang}^2\frac{1}{2}du\,\mathrm{tang}^2\frac{1}{2}u - 2\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}du\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}u}$$

$$= \frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u}(1 + \mathrm{tang}^2\tfrac{1}{2}du)\{1 + 2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}u\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}du + 3\,\mathrm{tang}^2\tfrac{1}{2}u\,\mathrm{tang}^2\tfrac{1}{2}du$$
$$+ 4\,\mathrm{tang}^3\tfrac{1}{2}u\,\mathrm{tang}^3\tfrac{1}{2}du\}$$

$$= \frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u}\{1 + 2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}u\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}du + 3\,\mathrm{tang}^2\tfrac{1}{2}u\,\mathrm{tang}^2\tfrac{1}{2}du$$
$$+ \mathrm{tang}^2\tfrac{1}{2}du\}$$

$$= \frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u}\{1 + \mathrm{tang}\tfrac{1}{2}u\sin du + \tfrac{3}{4}\mathrm{tang}^2\tfrac{1}{2}u\sin^2 du + \tfrac{1}{4}\sin^2 du\}$$

$$= \frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u} + \frac{h\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}u}{\cos^2\frac{1}{2}u}\sin du + \frac{\frac{3}{4}h\,\mathrm{tang}^2\frac{1}{2}u}{\cos^2\frac{1}{2}u}\sin^2 du$$
$$+ \frac{\frac{1}{4}h}{\cos^2\frac{1}{2}u}\sin^2 du.$$

Mais

$$\mathrm{V} = \frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}u} - \frac{h\sin^2\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}u};$$

donc

$$\mathrm{V}' - \mathrm{V} = \frac{h\sin^2\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}u} + \frac{h\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}u}{\cos^2\frac{1}{2}u}\sin du + \frac{\frac{3}{4}h\,\mathrm{tang}^2\frac{1}{2}u}{\cos^2\frac{1}{2}u}\sin^2 du + \frac{\frac{1}{4}h\sin^2 du}{\cos^2\frac{1}{2}u}.$$

73. Les termes sont rangés selon leur importance; le second devient négatif avec *du* à 78°. Les deux autres sont insensibles le plus souvent, et surtout le dernier qui ne passe guères 0.00005 à 110°, et qui va diminuant rapidement avec $\frac{\sin^2 du}{\cos^2\frac{1}{2}u}$; le précédent est plus fort quand $\frac{3}{4}\mathrm{tang}^2\frac{1}{2}u > 1$; mais jusqu'à 90°, on peut les négliger tous deux. Il ne serait guères plus long de calculer les deux rayons vecteurs par les formules $\frac{h\cos^2\frac{1}{2}x}{\cos^2\frac{1}{2}u}$ et $\frac{h}{\cos^2\frac{1}{2}(u+du)}$, mais le calcul demanderait plus de précision, au lieu qu'en calculant séparément chacun des termes de la formule (V′ — V), on avance avec moins de peine. C'est ainsi que j'ai calculé les (V′ — V) de la table II; on y voit à quel point sont sensibles les différences des deux courbes. Ainsi, entre les deux anomalies de 110° de part et d'autre du périhélie, le mouvement serait plus grand de 75′ dans l'ellipse, et la somme des deux rayons vecteurs plus grande de 0,0654 dans la parabole.

On voit donc que la parabole ne peut ici remplacer l'ellipse que fort

imparfaitement. Il n'y a qu'un point où l'anomalie et le rayon vecteur soient les mêmes dans les deux courbes, c'est le périhélie; quant au rayon vecteur, il est partout ailleurs plus fort que dans l'ellipse. Il y a encore un point où la différence d'anomalie est nulle, c'est à 78° d'anomalie vraie; mais les rayons vecteurs diffèrent de 0.0103; ainsi la longitude géocentrique ne peut être la même.

Il faut cependant commencer par supposer l'orbite parabolique pour calculer les observations, mais les rayons vecteurs et les différences de longitude appartiennent à une ellipse; il est donc impossible d'arriver à des élémens parfaitement exacts, à moins que m ne soit une quantité tout-à-fait insensible; on ne peut donc jamais être sûr d'avoir des élémens même approchés, quoiqu'on soit parvenu à trouver une parabole qui passe assez exactement par les trois lieux observés, et qui ne s'écarte pas considérablement des autres observations. Le lieu du périhélie surtout peut être en erreur de 1° ou 2°; c'est donc une peine assez superflue que de chercher à perfectionner à un certain point les élémens paraboliques.

74. Avec les tables que nous avons construites, il nous est facile d'avoir les anomalies et les longitudes vraies de notre comète; ses latitudes et ses rayons vecteurs.

Cherchons l'anomalie vraie pour le 31 janvier, c'est-à-dire 50^j,25 avant le périhélie. Je vois par la table, que pour

$t = 49^j,82231$, on avait $u = 91°$

De ce moment jusqu'à.......	50.25	
la différence est..........	0.42769...... log.....	9.6311291
l'anomalie augmentait de 1° en	1^j,31222...... compl. .	9.8819934
	log 1° = 3600''.........	3.5563025
	19' 33'',34....	3.0694250

1.31222 : 3600'' :: 0.42769 : 19' 33'',34.

Ce calcul supposerait le mouvement uniforme : or $\Delta t = 1.31222$ se rapporte principalement au milieu de l'intervalle entre 91 et 92°, c'est-à-dire à 91° 30'; à 90° 30', Δt était 1.26792; à 91°, il doit être environ 1.29014; à 91° $\frac{1}{4}$, il sera, par un milieu, 1.30118; c'est encore un peu trop. Supposons 1.30000, et nous aurons 19' 44''; l'erreur ne sera pas de 1'', ce qui nous suffit. C'est ainsi que j'ai calculé les anomalies de la table III, pour tous les jours de l'apparition pour l'heure marquée

dans la première colonne, c'est-à-dire à fort peu près pour l'heure de chaque observation.

75. Le rayon vecteur

$$v = \frac{(a+e)(a-e)}{a+e\cos u} = \frac{(a+e)(a-e)}{a+e-2a\sin^2\frac{1}{2}u} = \frac{a-e}{1-\left(\frac{2a}{a+e}\right)\sin^2\frac{1}{2}u}$$

$$= \frac{h}{1-q^2\sin^2\frac{1}{2}u} = \frac{h}{1-\sin^2\varphi} = \frac{h}{\cos^2\varphi},$$

C. log. $(1+e) = 1.96764567$....	9.7060532
$2e = 1.93529134$....	0.2867460
$\log q^2$.....	9.9927992
log constant ou $\log q$......	9.9963996
$\sin\frac{1}{2}u = 45°\ 39'\ 52''$....	9.8544634
$\sin\varphi = 45.10.57$.....	9.8508630
C. $\cos^2\varphi$..............	0.3038054
$\log h$.................	9.7656484
$\log v = 1.17343$......	0.0694538.

C'est ainsi que j'ai calculé les rayons vecteurs de la table IV.

76. Le 21 janvier l'anomalie vraie était donc $u = 3^s\ 1°\ 19'\ 44''$

Le lieu du périhélie, d'après nos élémens...........	10. 5.19.18
et comme la comète rétrogradait vers son périhélie,	
la longitude dans l'orbite sera......................	1. 4.39. 2
Le nœud était......................................	1.23.45.35
Depuis le nœud, elle avait rétrogradé d'un arc $A =$	19. 6.33

c'est l'argument de latitude; il est dans la première moitié, la latitude sera boréale.

Nous supposons l'inclinaison $17°\ 40'\ 5'' = I$,

sin I.....	9.4821613	cos I.............	9.9790159
sin A....	9.5150376	tang A $= 19°\ 6'\ 33''$	9.5396534
$\sin\lambda = 5°\ 42'\ 8''$B...	8.9971989	tang A' $= 18.16.\ 8$	9.5186693
A' est l'arg. de latit. sur l'éclipt.		nœud $= 1^s\ 23.45.35$	
Longitude réduite à l'écliptique..........		1. 5.29.27.	

A — A' = réduction à l'écliptique = 50' 25" dont il faudrait diminuer la distance au nœud; mais comme la comète est rétrograde, diminuer la distance au nœud, c'est augmenter la longitude de 50' 25"; la comète a fait moins de chemin sur l'écliptique que sur son orbite, elle a moins rétrogradé; sa longitude est plus grande sur l'écliptique que dans l'orbite.

TABLE

u	x	Δx	t	Δt	t'	Δt'
0	0° 0' 0".000		0'.00000		0'.0000	
1	0. 7.41.643	7'41".643	0.32196	0'.32196	0.7231	0'.7231
2	0.15.23.354	7.41.711	0.64404	0.32208	1.4466	0.7235
3	0.23. 5.207	7.41.853	0.96630	0.32226	2.1707	0.7241
4	0.30.47.263	7.42.056	1.28885	0.32255	2.8955	0.7248
5	0.38.29.604	7.42.341	1.61179	0.32294	3.6211	0.7256
6	0.46.12.280	7.42.676	1.93522	0.32343	4.3477	0.7266
7	0.53.55.378	7.43.098	2.25923	0.32401	5.0757	0.7280
8	1. 1.38.963	7.43.585	2.58391	0.32468	5.8052	0.7295
9	1. 9.23.104	7.44.141	2.90937	0.32546	6.5363	0.7311
10	1.17. 7.873	7.44.769	3.23571	0.32634	7.2694	0.7331
11	1.24.53.341	7.45.468	3.56304	0.32733	8.0048	0.7354
12	1.32.39.578	7.46.237	3.89146	0.32842	8.7426	0.7378
13	1.40.26.657	7.47.079	4.22107	0.32961	9.4831	0.7405
14	1.48.14.650	7.47.993	4.55197	0.33090	10.2265	0.7434
15	1.56. 3.631	7.48.981	4.88426	0.33229	10.9730	0.7465
16	2. 3.53.672	7.50.041	5.21804	0.33378	11.7229	0.7499
17	2.11.44.849	7.51.177	5.55344	0.33540	12.4764	0.7535
18	2.19.37.235	7.52.386	5.89058	0.33714	13.2338	0.7574
19	2.27.30.907	7.53.672	6.22956	0.33898	13.9952	0.7614
20	2.35.25.941	7.55.034	6.57049	0.34093	14.7610	0.7658
21	2.43.22.414	7.56.473	6.91348	0.34309	15.5317	0.7707
22	2.51.20.405	7.57.991	7.25866	0.34518	16.3074	0.7757
23	2.59.19.993	7.59.588	7.60615	0.34749	17.0881	0.7807
24	3. 7.21.257	8. 1.254	7.95607	0.34992	17.8742	0.7861
25	3.15.24.280	8. 3.023	8.30856	0.35249	18.6661	0.7919
26	3.23.29.142	8. 4.862	8.66374	0.35518	19.4640	0.7979
27	3.31.35.929	8. 6.787	9.02173	0.35799	20.2683	0.8443
28	3.39.44.724	8. 8.795	9.38267	0.36094	21.0792	0.8109
29	3.47.55.613	8.10.889	9.74672	0.36409	21.8970	0.8178
30	3.56. 8.684	8.13.071	10.11404	0.36732	22.7221	0.8251
31	4. 4.24.026	8.15.342	10.48476	0.37072	23.5549	0.8328
32	4.12.41.730	8.17.704	10.85900	0.37424	24.3958	0.8409
33	4.21. 1.886	8.20.156	11.23693	0.37793	25.2450	0.8492
34	4.29.24.587	8.22.701	11.61873	0.38180	26.1028	0.8578
35	4.37.49.928	8.25.341	12.00455	0.38582	26.9696	0.8668
36	4.46.18.007	8.28.079	12.39454	0.38999	27.8458	0.8762
37	4.54.48.924	8.30.917	12.78889	0.39435	28.7318	0.8860
38	5. 3.22.780	8.33.856	13.18780	0.39891	29.6289	0.8961
39	5.11.59.677	8.36.897	13.59147	0.40367	30.5348	0.9068
40	5.20.39.719	8.40.042	14.00008	0.40861	31.4527	0.9179
41	5.29.23.012	8.43.293	14.41381	0.41373	32.3822	0.9295
42	5.38. 9.667	8.46.655	14.83287	0.41906	33.3237	0.9415
43	5.46.59.796	8.50.129	15.25747	0.42460	34.2776	0.9539
44	5.55.53.513	8.53.717	15.68781	0.43034	35.2444	0.9668
45	6. 4.50.934	8.57.421	16.12415	0.43634	36.2247	0.9803
46	6.13.52.179	9. 1.245	16.56674	0.44259	37.2191	0.9944
47	6.22.57.372	9. 5.193	17.01583	0.44909	38.2281	1.0090
48	6.32. 6.635	9. 9.263	17.47165	0.45582	39.2521	1.0240
49	2.41.20.100	9.13.465	17.93445	0.46280	40.2917	1.0396
50	6.50.37.897	9.17.797	18.40450	0.47005	41.3477	1.0560
51	7. 0. 0.161	9.22.264	18.88210	0.47760	42.4207	1.0730
52	7. 9.27.029	9.26.868	19.35756	0.48546	43.5113	1.0906
53	7.18.58.647	9.31.618	19.86120	0.49364	44.6203	1.1090
54	7.28.35.157	9.36.510	20.36336	0.50216	45.7484	1.1281
55	7.38.16.711	9.41.554	20.87436	0.51100	46.8964	1.1480

u	x	Δx	t	Δt	t'	Δt'
55	7°38' 16"711	9' 46"751	20' 87436	0' 52017	46' 8964	1' 1686
56	7.48. 3.462	9.52.105	21.39453	0.52968	48.0650	1.1900
57	7.57.55.567	9.57.624	21.92421	0.53957	49.2550	1.2122
58	8. 7.53.191	10. 3.309	22.46378	0.54986	50.4672	1.2353
59	8.17.56.500	10. 9.165	23 01364	0.56060	51.7025	1.2595
60	8.28. 5.665	10.15.201	23.57424	0.57181	52.9620	1.2847
61	8.38.20.866	10.21.417	24.14605	0.58346	54.2467	1.3108
62	8.48.42.283	10.27.823	24.72951	0.59554	55.5576	1.3380
63	8.59.10.106	10.34.420	25.32505	0.60808	56.8956	1.3661
64	9. 9.44.526	10.41.219	25.93313	0.62112	58.2617	1.3953
65	9 20.25.745	10.48.223	26.55425	0.63475	59.6570	1.4260
66	9.31.13.968	10.55.440	27.18900	0.64901	61.0830	1.4581
67	9.42. 9.408	11. 2.878	27.83801	0.66389	62.5411	1.4915
68	9.53.12.286	11.10.536	28.50190	0.67935	64.0326	1.5262
69	10. 4.22.822	11.18.435	29.18125	0.69546	65.5588	1.5623
70	10.15.41.257	11.26.574	29.87671	0.71221	67.1211	1.6001
71	10.27. 7.831	11.34.962	30.58892	0.72966	68.7212	1.6394
72	10.38.42.793	11.43.608	31.31858	0.74792	70.3606	1.6804
73	10.50.26.401	11.52.506	32.06650	0.76702	72.0410	1.7232
74	11. 2.18.919	12. 1.712	32.83352	0.78696	73.7642	1.7678
75	11.14.20.631	12.11.191	33.62048	0.80775	75.5320	1.8147
76	11.26.31.822	12.20.965	34.42823	0.82947	77.3467	1.8636
77	11.38.52.787	12.31.045	35.25770	0.85220	79.2103	1.9146
78	11.51.23.832	12.41.447	36.10990	0.87598	81.1249	1.9679
79	12. 4. 5.279	12.52.178	36.98588	0.90084	83.0928	2.0237
80	12.16.57.457	13. 3.253	37.88672	0.92687	85.1165	2.0823
81	12.30. 0.710	13.14.683	38.81359	0.95413	87.1988	2.1437
82	12.43.15.393	13.26.483	39.76772	0.98266	89.3425	2.2077
83	12.56.41.876	13.38.666	40.75038	1.01258	91.5502	2.2748
84	13.10.20.542	13.51.251	41.76296	1.04395	93.8250	2.3454
85	13.24.11.793	14. 4.254	42.80691	1.07686	96.1704	2.4192
86	13.38.16.047	14.17.683	43.88377	1.11138	98.5896	2.4969
87	13.52.33.730	14.31.557	44.99515	1.14766	101.0865	2.5783
88	14. 7. 5.287	14.45.908	46.14281	1.18577	103.6648	2.6640
89	14.21.51.195	15. 0.742	47.32858	1.22581	106.3288	2.75[illegible]
90	14.36.51.937	15.16.085	48.55439	1.26792	109.0827	2.848[illegible]
91	14.52. 8.022	15.31.954	49.82231	1.31222	111.9312	2.9480
92	15. 7.39.976	15.48.380	51.13453	1.35588	114.8792	3.0529
93	15.23.28.356	16. 5.379	52.49341	1.40803	117.9321	3.1633
94	15.39.33.735	16.22.980	53.90144	1.45984	121.0954	3.2796
95	15.55.56.715	16.41.206	55.36128	1.51453	124.3750	3.4027
96	16.12.37.921	17. 0.095	56.87580	1.57224	127.7777	3.5323
97	16.29.38.016	17.19.667	58.44804	1.63318	131.3100	3 6690
98	16.46.57.683	17.39.958	60.08122	1.69756	134.9790	3.8137
99	17. 4.37.641	18. 0.996	61.77878	1.76560	138.7927	3.9666
100	17.22.38.637	18.22.827	63.54438	1.83750	142 7593	4.1282
101	17.41. 1.464	18.45.481	65.38188	1.91361	146.8875	4.2991
102	17.59.46.945	19. 8.999	67.29549	1.99449	151.1866	4.4809
103	18.18.55.944	19.33.426	69.28998	2.08030	155.6675	4.6736
104	18.38.29.370	19.58.803	71.37028	2.17127	160.3411	4.8780
105	18.58.28.173	20.25.182	73 54155	2.26796	165.2191	5.0953
106	19.18.53.355	20.52.610	75.80951	2.37069	170.3144	5.3259
107	19.39.45.965	21.21.145	78 18020	2.47991	175.6403	5.5713
108	20. 1. 7.110	21.50.840	80.66011	2.59615	181.2116	5.8326
109	20 22.57.950	22.21.761	83.25626	2.72007	187.0442	6.1109
110	20.43.19.711		85.97633		193.1551	

u	u'	Δu'	u'—u	F	F'	V—V'
0	0° 0' 0" 0	1° 0' 28" 3	+ 0' 00" 0	0' 0" 0	0' 0" 0	0.00000
1	1. 0.28.3	1. 0.29.2	0.28.3	0.29.1	0.29.1	0.00000
2	2. 0.57.5	1. 0.29.8	0.57.5	0.58.2	0.58.2	0.00001
3	3. 1.27.3	1. 0.30.0	1.27.3	1.27.2	1.27.2	0.00001
4	4. 1.57.3	1. 0.29.5	1.57.3	1.56.1	1.56.1	0.00002
5	5. 2.26.8	1. 0.29.1	2.26.8	2.24.9	2.24.9	0.00004
6	6. 2.55.9	1. 0.28.8	2.55.9	2.53.5	2.53.4	0.00005
7	7. 3.24.7	1. 0.28.5	3.24.7	3.21.9	3.21.8	0.00008
8	8. 3.53.2	1. 0.28.0	3.53.2	3.50.0	3.49.9	0.00011
9	9. 4.21.2	1. 0.27.7	4.21.2	4.17.8	4.17.7	0.00013
10	10. 4.48.9	1. 0.27.4	4.48.9	4.45.3	4.45.3	0.00015
11	11. 5.16.3	1. 0.27.2	5.16.3	5.12.5	5.12.6	0.00018
12	12. 5.43.5	1. 0.26.9	5.43.5	5.39.3	5.39.2	0.00021
13	13. 6.10.4	1. 0.26.2	6.10.4	6. 5.7	6. 5.6	0.00025
14	14. 6.36.6	1. 0.25.6	6.36.6	6.31.6	6.31.5	0.00029
15	15. 7. 2.2	1. 0.25.2	7. 2.2	6.57.0	6.56.9	0.00033
16	16. 7.27.4	1. 0.24.5	7.27.4	7.21.9	7.21.8	0.00037
17	17. 7.51.9	1. 0.23.8	7.51.9	7.46.3	7.46.1	0.00042
18	18. 8.15.7	1. 0.23.0	8.15.7	8.10.1	8. 9.9	0.00047
19	19. 8.38.7	1. 0.22.6	8.38.7	8.33.3	8.33.0	0.00053
20	20. 9. 1.3	1. 0.22.2	9. 1.3	8.55.8	8.55.5	0.00059
21	21. 9.23.5	1. 0.21.8	9.23.5	9.17.6	9.17.3	0.00065
22	22. 9.45.3	1. 0.21.0	9.45.3	9.38.7	9.38.5	0.00071
23	23.10. 6.3	1. 0.20.0	10. 6.3	9.59.1	9.58.8	0.00077
24	24.10.26.3	1. 0.18.9	10.26.3	10.18.8	10.18.4	0.00084
25	25.10.45.2	1. 0.17.9	10.45.2	10.37.7	10.37.2	0.00091
26	26.11. 3.1	1. 0.17.0	11. 3.1	10.55.8	10.55.3	0.00099
27	27.11.20.1	1. 0.16.2	11.20.1	10.13.0	10.12.4	0.00107
28	28.11.36.3	1. 0.15.3	11.36.3	11.29.3	11.28.7	0.00115
29	29.11.51.6	1. 0.14.4	11.51.6	11.44.7	11.44.1	0.00124
30	30.12. 6.0	1. 0.13.7	12. 6.0	11.59.2	11.58.5	0.00133
31	31.12.19.7	1. 0.12.9	12.19.7	12.12.8	12.12.0	0.00143
32	32.12.32.6	1. 0.12.0	12.32.6	12.25.4	12.24.6	0.00152
33	33.12.44.6	1. 0.10.9	12.44.6	12.37.0	12.36.1	0.00162
34	34.12.55.5	1. 0. 9.8	12.55.5	12.47.5	12.46.6	0.00172
35	35.13. 5.3	1. 0. 8.5	13. 5.3	12.57.0	12.56.0	0.00182
36	36.13.13.8	1. 0. 7.2	13.13.8	13. 5.4	13. 4.5	0.00193
37	37.13.21.0	1. 0. 6.1	13.21.0	13.12.7	13.11.8	0.00204
38	38.13.27.1	1. 0. 4.8	13.27.1	13.19.0	13.18.0	0.00215
39	39.13.31.9	1. 0. 3.7	13.31.9	13.24.2	13.23.1	0.00227
40	40.13.35.6	1. 0. 2.7	13.35.6	13.28.2	13.27.3	0.00239
41	41.13.38.3	1. 0. 1.7	13.38.3	13.31.1	13.29.7	0.00251
42	42.13.40.0	1. 0. 0.5	13.40.0	13.32.8	13.31.4	0.00264
43	43.13.40.5	0.59.59.2	13.40.5	13.33.3	13.31.9	0.00277
44	44.13.39.7	59.57.8	13.39.7	13.32.5	13.31.1	0.00291
45	45.13.37.6	59.56.6	13.37.6	13.30.5	13.29.1	0.00305
46	46.13.34.2	59.55.4	13.34.2	13.27.3	13.25.9	0.00319
47	47.13.29.6	59.54.1	13.29.6	13.22.8	13.21.4	0.00333
48	48.13.23.7	59.52.7	13.23.7	13.17.1	13.15.7	0.00348
49	49.13.16.4	59.51.4	13.16.4	13.10.1	13. 8.6	0.00363
50	50.13. 7.8	59.50.0	13. 7.8	13. 1.8	13. 0.3	0.00379
51	51.12.57.8	59.48.6	12.57.8	12.52.2	12.51.8	0.00395
52	52.12.46.4	59.47.4	12.46.4	12.41.3	12.39.8	0.00412
53	53.12.33.8	59.46.2	12.33.8	12.29.1	12.27.6	0.00429
54	54.12.20.0	59.45.0	12.20.0	12.15.6	12.14.1	0.00446
55	55.12. 5.0		+12. 5.0	12. 0.7	11.59.3	0.00464

u	u'	Δu'	u'—u	F	F'	V'—V
55	55°12' 5"0	59' 43"7	+12' 5"0	+12' 0"7	+11' 59"3	0.00464
56	56.11.48.7	59.42.3	11.48.7	11.44.5	11.43.1	0.00483
57	57.11.31.0	59.40.7	11.31.0	11.26.9	11.25.6	0.00502
58	58.11.11.7	59.39.3	11.11.7	11. 8.0	11. 6.7	0.00521
59	59.10.51.0	59.37.9	10.51.0	10.47.7	10.46.4	0.00541
60	60.10.28.9	59.36.5	10.28.9	10.26.1	10.24.8	0.00561
61	61.10. 5.4	59.35.3	10. 5.4	10. 3.1	10. 1.9	0.00582
62	62. 9.40.7	59.34.5	9.40.7	9.38.7	9.37.6	0.00603
63	63. 9.14.8	59.32.8	9.14.8	9.12.9	9.11.9	0.00625
64	64. 8.47.6	59.31.3	8.47.6	8.45.8	8.44.8	0.00647
65	65. 8.18.9	59.29.7	8.18.9	8.17.3	8.16.3	0.00670
66	66. 7.48.6	59.28.3	7.48.6	7.47.4	7.46.5	0.00693
67	67. 7.16.9	59.27.0	7.16.9	7.16.1	7.15.3	0.00717
68	68. 6.43.9	59.25.7	6.43.9	6.43.4	6.42.6	0.00742
69	69. 6. 9.6	59.24.4	6. 9.6	6. 9.3	6. 8.7	0.00768
70	70. 5.34.0	59.23.1	5.34.0	5.33.8	5.33.3	0.00793
71	71. 4.57.1	59.21.7	4.57.1	4.57.0	4.57.5	0.00820
72	72. 4.18.8	59.20.2	4.18.8	4.18.8	4.18.4	0.00848
73	73. 3.39.0	59.18.7	3.39.0	3.39.2	3.38.9	0.00876
74	74. 2.57.7	59.17.2	2.57.7	2.58.2	2.57.9	0.00905
75	75. 2.14.9	59.15.9	2.14.9	2.15.8	2.15.6	0.00935
76	76. 1.30.8	59.14.6	1.30.8	1.32.0	1.32.0	0.00965
77	77. 0.45.4	59.13.2	+ 0.45.4	+ 0.46.8	+ 0.46.8	0.00997
78	77.59.58.6	59.11.8	— 0. 1.4	+ 0. 0.2	+ 0. 0.2	0.01030
79	78.59.10.4	59.10.5	— 0.49.6	— 0.47.7	— 0.47.6	0.01063
80	79.58.20.9	59. 9.1	— 1.39.1	— 1.37.2	— 1.37.0	0.01097
81	80.57.30.0	59. 7.7	— 2.30.0	— 2.27.9	— 2.27.7	0.01132
82	81.56.37.7	59. 6.3	3.22.3	3.20.0	3.19.8	0.01169
83	82.55.44.0	59. 4.9	4.16.0	4.13.5	4.13.3	0.01207
84	83.54.48.9	59. 3.5	5.11.1	5. 8.4	5. 8.2	0.01246
85	84.53.52.4	59. 2.1	6. 7.6	6. 4.7	6. 4.5	0.01286
86	85.52.54.5	59. 0.8	— 7. 5.5	— 7. 2.4	— 7. 2.2	0.01327
87	86.51.55.3	58.59.4	8. 4.7	8. 1.5	8. 1.4	0.01367
88	87.50.54.7	58.58.1	9. 5.3	9. 2.0	9. 1.4	0.01415
89	88.49.52.8	58.56.7	10. 7.2	10. 3.9	10. 3.9	0.01461
90	89.48.49.5	58.55.2	11.10.5	11. 7.3	11. 7.4	0.01508
91	90.47.44.7	58.53.8	—12.15.3	—12.12.1	—12.12.2	0.01558
92	91.46.38.5	58.52.4	13.21.5	13.18.3	13.18.6	0.01610
93	92.45.30.9	58.51.0	14.29.1	14.26.0	14.26.4	0.01662
94	93.44.21.9	58.49.6	15.38.1	15.35.1	15.35.6	0.01720
95	94.43.11.5	58.48.1	16.48.5	16.45.7	16.46.4	0.01775
96	95.41.59.6	58.46.7	—18. 0.4	—17.57.7	—17.58.7	0.01835
97	96.40.46.8	58.45.2	19.13.7	19.11.2	19.12.3	0.01897
98	97.39.31.5	58.43.7	20.28.5	20.26.2	20.27.8	0.01963
99	98.38.15.2	58.42.2	21.44.8	21.42.7	21.44.7	0.02030
100	99.36.57.4	58.40.6	23. 2.6	23. 0.8	23. 3.1	0.02101
101	100.35.38.0	58.39.0	—24.22.0	—24.20.5	—24.23.2	0.02175
102	101.34.17.0	58.37.4	25.43.0	25.41.8	25.44.9	0.02250
103	102.32.54.4	58.35.8	27. 5.6	27. 4.7	27. 8.2	0.02333
104	103.31.30.2	58.34.2	28.29.8	28.29.2	28.33.3	0.02418
105	104.30. 4.4	58.32.9	29.55.6	29.55.4	30. 0.0	0.02508
106	105.28.36.9	58.31.0	—31.23.1	—31.23.3	—31.28.5	0.02601
107	106.27. 7.9	58.29.2	32.52.1	32.52.9	32.58.9	0.02699
108	107.25.37.1	58.27.5	34.22.9	34.24.3	34.31.1	0.02802
109	108.24. 4.6	58.25.7	35.55.4	35.57.5	36. 5.1	0.02913
110	109.22.30.3		—37.29.7	—37.32.7	—37.41.1	0.03027

TABLE III.

Lieux héliocentriques de la comète de 1759 calculés dans l'ellipse de Klinkenberg.

Jours.	T	u	du	L	λ	v	dv
21 Janvier.	50j 25	91° 19′ 42″	0° 46′ 32″	1s 5° 29′ 26″	5° 41′ 52″ B	1.17342	1553
22	49.25	90.33.10	0.47.52	1. 4.44.36	5.55.17	1.15789	1554
23	48.25	89.45.18	0.49.13	1. 3.58.29	6. 8.58	1.14235	1554
24	47.25	88.56. 5	0.50.35	1. 3.11. 2	6.22.59	1.12681	1554
25	46.25	88. 5.30	0.52. 0	1. 2.22.13	6.37.19	1.11127	1552
26	45.25	87.13.30	0.53.31	1. 1.31.59	6.51.59	1.09575	1551
27	44.25	86.19.59	0.55. 4	1. 0.40.14	7. 6.59	1.08024	1551
28	43.25	85.24.55	0.56.41	0.29.46.55	7.22.19	1.06473	1548
29	42.25	84.28.14	0.58.24	0.28.51.58	7.37.59	1.04925	1546
30	41.25	83.29.50	1. 0.10	0.27.55.18	7.54. 0	1.03379	1543
31	40.25	82.29.40	1. 2. 0	0.26.56.51	8.10.21	1.01836	1538
1 février.	39.25	81.27.40	1. 3.58	0.25.56.31	8.27. 4	1.00298	1535
2	38.25	80.23.42	1. 5.58	0.24.54.12	8.44. 9	0.98763	1530
3	37.25	79.17.47	1. 8. 4	0.23.49.49	9. 1.36	0.97233	1524
4	36.25	78. 9.43	1.10.16	0.22.43.17	9.19.25	0.95709	1517
5	35.25	76.59.27	1.12.33	0.21.34.29	9.37.35	0.94192	1511
6	34.25	75.46.54	1.14.57	0.20.23.18	9.55. 6	0.92681	1502
7	33.25	74.31.57	1.17.28	0.19. 9.39	10.14.57	0.91179	1493
8	32.25	73.14.29	1.20. 4	0.17.53.19	10.34. 8	0.89686	1484
9	31.25	71.54.25	1.22.47	0.16.34.17	10.53.38	0.88202	1471
10	30.25	70.51.38	1.25.38	0.15.12.33	11.13.26	0.86731	1458
11	29.25	69. 6. 0	1.28.37	0.13.47.29	11.33.34	0.85273	1445
12	28.25	67.57.23	1.31.41	0.12.19.25	11.53.59	0.83828	1420
13	27.25	66. 5.42	1.34.55	0.10.48. 4	12.14.37	0.82398	1411
14	26.25	64.30.47	1.38.26	0. 9.13.14	12.35.25	0.80987	1394
15	25.25	62.52.31	1.41.44	0. 7.34.28	12.56.23	0.79595	1390
16	24.25	61.10.47		0. 5.52.28	13.17.28	0.78205	
31 mars. *	19.10	51.26. 3	2. 2.17	8.11. 4. 2	5.24.53	0.71558	1232
1 avril. *	20.10	53.28.20	1.57.50	8. 9. 7.14	4.49.32	0.72790	1263
2	21.10	55.26.10	1.53.30	8. 7.14.35	4 15. 0	0.74053	1293
3	22.10	57.19.40	1.49.59	8. 5.25.55	3.41.24	0.75346	1321
4	23.10	59. 9.19	1.45.52	8. 3.41. 5	3. 8.44	0.76667	1348
5 *	24.10	60.55.11	1.42.17	8. 1.59.56	2.37. 0	0.78015	1371
6 *	25.10	62.37.28	1.38.47	8. 0.22.20	2. 6.13	0.79386	1391
7 *	26.10	64.16.15	1.35.25	7.28.48. 8	1.36.24	0.80777	1409
8	27.10	65.51.40	1.32.11	7.27.17.11	1. 7.33	0.82186	1427
9	28.10	67.23.51	1.29. 3	7.25.49.21	0.39.37	0.83613	1442
10	29.10	68.52.54	1.26. 3	7.24.24.30	0.12.36 B	0.85055	1456
11	30.10	70.18.57	1.23.13	7.23. 2.30	0.13.21 A	0.86511	1470
12	31.10	71.42.10	1.20.29	7.21.43.13	0.38.47	0.87981	1480
13 *	32.10	73. 2.39	1.17.51	7.20.26.32	1. 3.10	0.89461	1489
14	33.10	74.20.30	1.15.18	7.19.12.20	1.26.44	0.90950	1504
15	34.10	75.35.48	1.12.50	7.18. 0.31	1.49.30	0.92454	1419
16 *	35.10	76.48.38		7.16.50.59	2.11.28 A	0.92973	

SUITE DE LA TABLE III.

Lieux héliocentriques de la comète de 1759 calculés dans l'ellipse de Klinkenberg.

Jours.	T	u.	du	L	λ	v	dv
1 mai.	49' 9	91° 3' 36"	45' 49"	7ˢ 3° 11' 34"	6° 22' 55" A	1.16800	1553
2	50.9	91.49.25	44.38	7. 2.27.21	6.35.53	1.18353	1553
3	51.9	92.34. 3	43.30	7. 1.44.14	6.48.30	1.19906	1552
4	52.9	93.17.33	42.23	7. 1. 2.11	7. 0.43	1.21458	1552
5	53.9	93.59.56	41.20	7. 0.21.10	7.12.34	1.23010	1549
6	54.9	94.41.16	40.20	6.29.41. 8	7.24. 2	1.24559	1548
7	55.9	95.21.36	39.20	6.29. 2. 3	7.35.11	1.26107	1547
8	56.9	96. 0.56	38.25	6.28.23.53	7.45.59	1.27654	1544
9	57.9	96.39.21	37.29	6.27.46.36	7.56.28	1.29198	1543
10	58.9	97.16.50	36.38	6.27.10.10	8. 6.40	1.30741	1542
11	59.9	97.53.28	35.46	6.26.34.33	8.16.34	1.32283	1537
12	60.9	98.29.14	34.58	6.25.59.44	8.26.12	1.33820	1536
13	61.9	99. 4.12	34.10	6.25.25.41	8.35.35	1.35356	1534
14	62.9	99.38.22	33.24	6.24.52.22	8.44.40	1.36890	1533
15	63.9	100.11.46	32.43	6.24.19.45	8.53.35	1.38423	1528
16	64.9	100.43.29	32. 2	6.23.47.49	9. 2.11	1.39951	1524
17	65.9	101.16.31	31.17	6.23.16.33	9.10.35	1.41475	1522
18	66.9	101.47.48	30.39	6.22.45.56	9.18.46	1.42997	1519
19	67.9	102.18.27	30. 1	6.22.15.16	9.26.42	1.44516	1518
20	68.9	102.48.28	29.21	6.21.46.52	9.34.27	1.46034	1515
21	69.9	103.17.52	28.49	6.21.17.43	9.42. 0	1.47549	1511
22	70.9	103.46.41	28.13	6.20.49.28	9.49.20	1.49060	1507
23	71.9	104.14.54	27.35	6.20.21.46	9.56.28	1.50567	1505
24	72.9	104.42.33	27. 7	6.19.54.36	10. 3.29	1.52072	1502
25	73.9	105. 9.40	26.36	6.19.27.57	10.10.18	1.53574	1498
26	74.9	105.36.16	26. 5	6.19. 1.48	10.16.59	1.55072	1495
27	75.9	106. 2.21	25.36	6.18.36. 8	10.23.57	1.56567	1493
28	76.9	106.27.59	25. 5	6.18.10.56	10.30. 5	1.58060	1488
29	77.9	106.53. 2	24.41	6.17.46.11	10.36.10	1.59548	1486
30	78.9	107.17.43	24.11	6.17.21.52	10.42. 2	1.61034	1482
31	79.9	107.41.54	23.47	6.16.57.58	10.47.56	1.62516	1479
1 juin.	80.9	108. 5.41	23.20	6.16.34.29	10.53.42	1.63995	1475
2	81.9	108.29. 1	22.53	6.16.11.25	10.59.19	1.65470	1471
3	82.9	108.51.54	22.32	6.15.48.45	11. 4.49	1.66941	1468
4	83.9	109.14.26		6.15.26.29	11.10.11 A	1.68409	

TABLE IV,

POUR LA COMÈTE DE 1759.

Lieux du soleil et log. des rayons vecteurs.

Jours.	⊙	Log V	Jours.	⊙	Log V
21 janvier.	10ˢ 1°33′ 56″	9.993217	13 avril.	0ˢ23°51′37″	0.001772
22	10. 2.34.57	9.993270	14	0.24.50.14	0.001894
23	10. 3.35.57	9.993325	15	0.25.48.48	0.002015
24	10. 4.36.56	9.993381	16	0.26.47.19	0.002135
25	10. 5.37.55	9.993439	1 mai.	1.11.10.41	0.003811
26	10. 6.38.52	9.993499	2	1.12. 8.47	0.003912
27	10. 7.39.49	9.993561	3	1.13. 6.51	0.004012
28	10. 8.40.45	9.993624	4	1.14. 4.53	0.004112
29	10. 9.41.40	9.993688	5	1.15. 2.53	0.004211
30	10.10.42.32	9.993753	6	1.16. 0.51	0.004308
31	10.11.43.25	9.993819	7	1.16.58.48	0.004402
1 février.	10.12.44.16	9.993887	8	1.17.56.43	0.004497
2	10.13.45. 6	9.993957	9	1.18.54.36	0.004591
3	10.14.45.54	9.994029	10	1.19.52.27	0.004684
4	10.15.46.40	9.994102	11	1.20.50.17	0.004777
5	10.16.47.25	9.994177	12	1.21.48. 5	0.004869
6	10.17.48. 9	9.994253	13	1.22.45.52	0.004960
7	10.18.48.50	9.994331	14	1.23.43.38	0.005049
8	10.19.49.31	9.994411	15	1.24.41.22	0.005137
9	10.20.50. 9	9.994492	16	1.25.39.05	0.005224
10	10.21.50.46	9.994577	17	1.26.36.48	0.005310
11	10.22.51.22	9.994664	18	1.27.34.29	0.005395
12	10.23.51.56	9.994754	19	1.28.32. 9	0.005478
13	10.24.52.28	9.994847	20	1.29.29.48	0.005560
14	10.25.52.59	9.994941	21	2. 0.27.26	0.005640
15	10.26.53.19	9.995036	22	2. 1.25. 3	0.005718
16 février.	10.27.53.58	9.995133	23	2. 2.22.39	0.005794
31 mars.	0.11. 6.32	0.000188	24	2. 3.20.14	0.005868
1 avril.	0.12. 5.36	0.000312	25	2. 4.17.48	0.005940
2	0.13. 4.59	0.000436	26	2. 5.15.21	0.006010
3	0.14. 3.39	0.000559	27	2. 6.12.53	0.006077
4	0.15. 2.37	0.000681	28	2. 7.10.24	0.006142
5	0.16. 1.32	0.000802	29	2. 8. 7.53	0.006204
6	0.17. 0.26	0.000923	30	2. 9. 5.21	0.006263
7	0.17.59.16	0.001044	31	2.10. 2.48	0.006320
8	0.18.58. 5	0.001165	1 juin.	2.11. 0.14	0.006375
9	0.19.56.51	0.001286	2	2.11.57.39	0.006428
10	0.20.55.36	0.001408	3	2.12.55. 8	0.006479
11	0.21.54.19	0.001530	4	2.13.52.25	0.006528
12	0.22.52.59	0.001651	5	2.14.49.47	0.006575

TABLE V.

Lieux géocentriques de la comète de 1759. Ellipse de Klinkenberg.

Jours.	G	dG	g	dg	T	dT	ρ	dρ
21 janvier.	11ˢ23°44′ 4″	25′43″	4°30′59″ B	4′37″	52°10′ 8″	1°26′44″	1.4748	118
22	11.23.18.21	25. 7	4.35.36	4.33	50.43.24	1.26. 7	1.4866	117
23	11.22.53.14	24.33	4.40. 9	4.28	49.17.17	1.25.32	1.4983	114
24	11.22.28.41	24. 3	4.44.37	4.24	47.51.45	1.25. 2	1.5097	110
25	11.22. 4.38	23.31	4.49. 1	4.21	46.26.43	1.24.33	1.5207	107
26	11.21.41. 7	23.13	4.53.22	4.16	45. 2.10	1.24. 0	1.5314	102
27	11.21.17.54	22.32	4.57.38	4.14	43.38.10	1.23.33	1.5416	101
28	11.20.55.22	22.17	5. 1.52	4.10	42.14.37	1.23.12	1.5517	97
29	11.20.33. 5	21.56	5. 6. 2	4. 6	40.51.25	1.22.49	1.5614	92
30	11.20.11. 9	21.38	5.10. 8	4. 3	39.28.36	1.22.30	1.5706	89
31	11.19.49.31	21.20	5.14.11	4. 0	38. 6. 6	1.22.11	1.5795	85
1 février.	11.19.28.11	21. 3	5.18.11	3.56	36.43.55	1.21.55	1.5880	80
2	11.19. 7. 8	29.59	5.22. 7	3.54	35.22. 0	1.21.45	1.5960	77
3	11.18.46. 9	20.43	5.26. 1	3.51	34. 0.15	1.21.29	1.6037	72
4	11.18.25.26	20.35	5.29.52	3.48	32.38.46	1.21.20	1.6109	67
5	11.18. 4.51	20.29	5.33.40	3.45	31.17.26	1.21.13	1.6176	62
6	11.17.44.22	20.24	5.37.25	3.39	29.56.13	1.21. 5	1.6238	58
7	11.17.23.58	20.20	5.41. 4	3.38	28.35. 8	1.21. 0	1.6296	52
8	11.17. 3.38	20.20	5.44.42	3.37	27.14. 8	1.20.57	1.6348	47
9	11.16.43.18	20.20	5.48.19	3.31	25.53.11	1.20.58	1.6395	42
10	11.16.22.58	20.20	5.51.50	3.29	24.32.13	1.20.57	1.6437	36
11	11.16. 2.38	20.25	5.55.19	3.23	23.11.16	1.20.59	1.6474	31
12	11.15.42.13	20.30	5.58.42	3.22	21.50.17	1.21. 2	1.6504	24
13	11.15.21.43	20.36	6. 2. 4	3.17	20.29.15	1.21. 7	1.6528	19
14	11.15. 1. 7	20.44	6. 5.21	3.13	19. 8. 8	1.21.12	1.6547	12
15	11.14.40.23	20.56	6. 8.34	3. 8	17.46.54	1.21.25	1.6559	6
16	11.14.19.27		6.11.42		16.25.29		1.6565	
31 mars.	10.27.20.30	22. 1	4.19.57 B	15.15	43.46. 2	1.21. 5	0.8915	328
1 avril.	10.26.58.29	22.17	4. 4.42	16.33	45. 7. 7	1.21.20	0.8587	330
2	10.26.36.12	22.56	3.48. 9	18. 3	46.28.27	1.21.56	0.8257	333
3	10.26.13.16	23.34	3.30. 6	19.14	47.50.23	1.22.32	0.7924	335
4	10.25 49.42	24.29	3.10.22	21.39	49.12.55	1.23.24	0.7589	338
5	10.25.25.12	25.36	2.48.43	23.51	50.36.19	1.24.30	0.7251	340
6	10.24.59.37	27. 3	2.24.52	26.24	52. 0.49	1.25.53	0.6911	341
7	10.24.32.34	28.48	1.58.28	29.20	53.26.42	1.27.37	0.6570	344
8	10.24. 3.46	31. 3	1.29. 8	32.49	54.54.19	1.29.49	0.6226	344
9	10.23.32.43	33.45	0.56.19	36.57	56.24. 8	1.32.30	0.5882	346
10	10.22.58.58	37.12	0.19.22 B	41.54	57.56.38	1.35.55	0.5536	346
11	10.22.21.46	41.32	0.22.32 A	47.54	59.32.33	1.40.12	0.5190	348
12	10.21.40.14	46.58	1.10.26	55.16	61.12.45	1.45.36	0.4842	349
13	10.20.53.16	53.48	2. 5.42	64.26	62 58.21	1.52.35	0 4493	349
14	10.19.59.28	63.24	3.10. 8	75.59	64.50.46	2. 1.58	0.4144	348
15	10.18.56. 4	76.25	4.26. 7	90.52	64.52.44	2.14.36	0.3796	349
16	10.17.39.39		5.56.59		69. 7.20		0.3147	

SUITE DE LA TABLE V.

Lieux géocentriques de la comète de 1759. Ellipse de Klinkenberg.

Jours.	G	dG	g	dg	T	dT	ρ	dρ
1 mai.	5ˢ22°13′46″	2°57′ 2″	31°15′ 9″ A	2°32′11″	131° 6′ 2″	3°58′ 5″	0.2139	343
2 375	5.19.16.44	2.14.46	28.42.58	2. 2.54	127. 7.57	3.12.50	0.2482	348
3	5.17. 1.58	2.44 28	26.40. 4	1.40.49	123.55.07	2.42.30	0.2830	351
4	5.15.17.30	1.22.23	24.59.15	1.23.53	121.12.37	2.20.23	0.3181	354
5	5.13.55. 7	1. 6.24	23.35.22	1.10.44	118.52.14	2. 4.22	0.3535	355
6	5.12.48.43	0.54.20	22.24.38	1. 0 22	116.47.52	1.52.17	0.3890	357
7	5.11.54.23	0.44.53	21.24.16	0.52. 1	114.55.35	1.42.48	0.4247	358
8	5.11. 9.30	37.29	20.32.15	0.45.19	113.12.47	1.35.22	0.4605	358
9	5.10.32. 1	31.32	19.46.56	0.39.44	111.37.25	1.29. 5	0.4963	358
10	5.10. 0.29	26.36	19. 7.12	0.35.12	110. 8.20	1.24.45	0.1321	359
11	5. 9.33.53	22.46	18.32. 0	0.31.15	108.43.34	1.20.32	0.5680	358
12	5. 9.11. 7	19.16	18. 0.45	0.28. 5	107.23. 2	1.17. 3	0.6038	359
13	5. 8.51.51	16.29	17.32.40	0.25.15	106. 5.59	1.14.15	0.6397	358
14	5. 8.35.22	13.48	17. 7.25	0.22.56	104.51.44	1.11.32	0.6755	359
15	5. 8.21.34	11.59	16.44.29	0.20.53	103.40.12	1. 9.42	0.7114	357
16	5. 8. 9.35	10. 0	16.23.36	19. 6	102.30.30	1. 7.43	0.7471	358
17	5. 7.59.35	8.24	16. 4.30	17.31	101.22.47	1. 6. 5	0.7829	357
18	5. 7.51.11	6.57	15.46.59	16. 9	100.16.42	1. 4.37	0.8186	357
19	5. 7.44.14	5.40	15.30.50	14.57	99.12. 5	1. 3.19	0.8543	357
20	5. 7.38.34	4.31	15.15.53	13.50	98. 8.46	1. 2. 9	0.8900	356
21	5. 7.34. 3	3.27	15. 2. 3	12.54	97. 6.37	1. 1. 4	0.9256	355
22	5. 7.30.36	2.36	14.49. 9	12. 0	96. 5.33	1. 0.12	0.9611	354
23	5. 7.28. 0	1.42	14.37. 9	11.12	95. 5.21	0.59.17	0.9965	354
24	5. 7.26.18	—0.56	14.25.57	10.30	94. 6. 4	0.58.30	1.0819	354
25	5. 7.25.22	—0.16	14.15.27	9.49	93. 7.34	57.49	1.0673	352
26	5. 7.25. 6	+0.38	14. 5.38	9.15	92. 9.45	57. 4	1.1025	352
27	5. 7.25.44	+0.49	13.56.23	8.40	91.12.41	56.32	1.1377	350
28	5. 7.26.33	1.33	13.47.43	8.15	90.16. 9	55.56	1.1727	350
29	5. 7.28. 6	2. 4	13.39 28	7.41	89.20.13	55.24	1.2077	349
30	5. 7.30.10	2.29	13.31.47	7.24	88.24.49	54.58	1.2426	348
31	5. 7.32.39	2.59	13.24.23	6.58	87.29.41	54.27	1.2774	348
1 juin.	5. 7.35.38	3.21	13.17.25	6.35	88.35.24	54. 4	1.3122	346
2	5. 7.38.59	3.45	13.10.50	6.17	85.41.20	53.39	1.3468	344
3	5. 7.42.44	4. 7	13. 4.33	5.56	84.47.41	53.15	1.3812	344
4 375	5. 7.46.51		12.58.57		83.54.26		1.4156	

Cette Table des lieux géocentriques serait utile à ceux qui voudraient essayer une méthode quelconque pour trouver les élémens d'une comète. Ces lieux calculés sont plus sûrs que des observations réelles. Le degré de conformité entre les élémens qu'on trouvera et les élémens supposés dans les calculs, fera juger plus surement de la précision que l'on pourra attendre de la méthode soumise à cette épreuve. C'est dans cette vue que j'ai donné (Table IV) les lieux du soleil corrigés de l'aberration, et les rayons vecteurs de la terre.

77. Le nœud fixé pour le 12 mars était moins avancé de 7″ pour la précession 50 jours avant le 12 mars ; ainsi nous pourrions diminuer la longitude et la distance au nœud par cette considération, si on jugeait cette précision nécessaire.

La longitude réduite est...........	$1^s\ 5^\circ\ 29'\ 27''$
Celle de la terre $= \odot + 6^s\ 0^\circ\ 0'\ 20''$..	4. 1.33.56
Commutation .... $= S = -$	2.26. 4.29.

C'est l'angle au soleil entre la comète et la terre.

	log. ρ ci-dessus.... 0.0694538		
	$\cos\lambda$....... 9.9978456		
	$\rho\cos\lambda = \rho'$....... 0.0672994		
	C. log. V = dist. $\odot$.... 0.0067830		
	$\log\left(\frac{\rho'}{V}\right)$......... 0.0740824		+ 0.0740824
	cos S........... 8.8353773	sin S —	9.9989802
— 0.081182	— 8.9094597	C. dénomin....	0.0367706
+ 1	tang T = —	$1^s\ 22^\circ\ 10'\ 8''$	0.1098332
0.918818	= dénominateur. $\odot$ =	10. 1.33.56	
	$G = \odot - T$ =	11.23.44. 4	
	la longit. géoc. obs. par M. Messier =	11.23.30.48	
	excès du calcul sur l'observation =	+ 13.16	

	sin S... 9.9989802	ρ'.....	0.0672994
	C. sin T... 0.1024708	C. ρ.....	9.8312496
	ρ'... 0.0672994	tang λ.....	8.9993587
ρ = 1.47486	0.1687504	tang g = $4^\circ\ 31'\ 12''$	8.8979077
	latitude observée =	4.31.26	
	excès du calcul.....	— 14″.	

C'est en suivant ces procédés que j'ai calculé la table V, où l'on trouve tous les élémens du lieu géocentrique.

78. Ce premier jour la comète fut estimée plutôt que véritablement observée ; mais j'ai trouvé d'autres erreurs presqu'aussi fortes ; c'est que

ceux qui ont calculé des orbites elliptiques ou paraboliques, n'ont fait aucune attention à ces premières observations de Messier.

La distance ρ de la comète à la terre est donc une fois et demie celle du soleil; ainsi la comète doit avoir une parallaxe qui sera les deux tiers de celle du soleil, ou de 6″.

Nous savons que la lumière met 8′ 13″ à venir du soleil à la terre; elle mettra donc 12′ environ à venir de la comète : par conséquent la longitude et la latitude avaient lieu 12′ avant l'observation, mais en 12′ la comète ne changeait pas sensiblement son lieu géocentrique. Nous négligerons cette considération qui est rarement de quelque importance pour les comètes.

79. On voit par la table III, que dans sa première apparition en janvier et en février, la comète allait vers son périhélie d'un mouvement accéléré, et qui de 46′ ½ par jour, s'est élevé jusqu'à 1° 38′ ½, mais que d'un jour à l'autre la différence a toujours été entre les limites de 1′ et 3′ ½; que le rayon vecteur a diminué toujours assez régulièrement d'un jour à l'autre; que les latitudes héliocentriques n'augmentaient que de quelques secondes par jour; que les longitudes géocentriques diminuaient aussi régulièrement que les longitudes héliocentriques, ce qui n'aura pas toujours lieu; que les latitudes géocentriques diminuaient de quelques secondes, tandis que les latitudes héliocentriques augmentaient; enfin les distances accourcies à la terre diminuaient lentement.

On voit donc que le milieu entre plusieurs observations d'un même jour, pouvait être supposé appartenir au tems qui était lui-même une moyenne arithmétique entre ceux des observations.

80. Essayons maintenant les théorèmes qui nous donnent la valeur de (T′ — T) = intervalle de tems entre deux observations. Ces théorèmes sont,

$$T' - T = C(v + v')^{\frac{3}{2}}(\cos^3 \tfrac{1}{2} x - \sin^3 \tfrac{1}{2} x)$$

$$= 3C \sin 45^\circ \left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin x}\right)^3 (\cos^2 \tfrac{1}{2}\omega \sin \tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{3} \sin^3 \tfrac{1}{2}\omega)$$

$$= C\left[\left(\frac{v + v' + k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{v + v' - k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

Ces formules sont pour la parabole; pour l'ellipse, nous avons montré qu'il fallait y joindre $\frac{7',26654}{a}\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^3 \sin \frac{1}{2}\omega(1-\frac{4}{3}\sin^4 \frac{1}{2}\omega)$. Pour les termes suivans, voyez l'article cité.

Prenons pour exemple les deux premiers jours, et prenons dans la table III les v et du,

$$d(T'-T) = \frac{7',26654}{a}\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^3 \sin \frac{1}{2}\omega,$$

d'où

$$a = \frac{7',26654}{d(T'-T)}\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^3 \sin \frac{1}{2}\omega.$$

Nous avons le 21,......... $\frac{1}{2}u = 45° 39' 52''$;
le 22,......... $\frac{1}{2}u' = 45.16.35$

$\frac{1}{2}du = - 23.17,$

$v =$ 1.17342.....	0.0694535	log 3.....	0.4771212
$v' =$ 1.15789.....	0.0636673	sin 45°....	9.8494850
$\frac{v}{v'} =$ tang²z.......	0.0057862	C.....	1.4378116
tang z = 45° 11' 27''...	0.0028931	log 58i,13233...	1.7644178
		v.....	0.0694535
2.....	0.3010300	$v^{\frac{1}{2}}$.....	0.0347268
sin z........	9.8509267	C. sin z...	0.1490733
cos z........	9.8480337	double...	0.2981466
cos $\frac{1}{2}du$......	9.9999900	cos² $\frac{1}{2}\omega$...	9.9999902
cos ω = 0° 32' 40''	9.9999804	sin $\frac{1}{2}\omega$...	7.6767993
$\frac{1}{2}\omega$ = 0.16.20	log 1er terme = 0.983122...		9.9926075
		C. log 3...	9.5228788
		tang⁴ $\frac{1}{2}\omega$...	5.3536084
	2e terme parabolique + 0.00000.7		4.8690947
	dans la parabole (T' — T) = 0.98312.9		

	log constant...	0.8613278
	compl. a......	8.74428
		9.60561
	$\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)$...	0.18380
	quadruple...	0.73520
	$\sin \frac{1}{2}\omega$...	7.67680
1er terme elliptique	+ 0.01590.1	8.20141
	0.99902.5	
erreur sur T' — T.....	0.00097.5	

dans la parabole, l'erreur était......... 0j,016871.

81. On voit que la parabole ne pourrait représenter les deux observations qui auraient fourni ces deux rayons vecteurs et l'angle compris. Pour satisfaire au théorème parabolique, on altérerait les distances ou l'angle, et l'on aurait des élémens qui ne seraient pas les véritables. Ici, l'erreur de la parabole sur (T' — T) était

$$0^j,016871 = \frac{7^j,26654}{a}\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^5 \sin \tfrac{1}{2}\omega,$$

d'où

$$a = \frac{7.26654}{0.016871}\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^5 \sin \tfrac{1}{2}\omega,$$

C... 0.016871.............	1.77286
log. 7.26654...............	0.86133
$\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^5 \sin \frac{1}{2}\omega$....	8.59580
log a = 16.982.....	1.22999.

Ainsi l'on trouverait la valeur de a ou du demi-grand axe de l'ellipse qui satisferait à l'intervalle (T' — T); cette valeur ne serait pas sûre, mais elle mettrait sur la voie.

82. On voit au reste qu'il est impossible de connaître avec une certaine précision z, ω, $\frac{1}{2}\omega$ et (T' — T). Pour satisfaire à l'intervalle, il

faudrait que $\frac{1}{2}\omega$ fût de 16′ 37″, ω de 33′ 14″, au lieu de 32′ 40″, ce qui tient à 968 parties à ajouter à log v et à retrancher de log v', ainsi qu'on peut s'en assurer en recommençant le calcul avec ces légers changemens. Nous pouvons calculer (T′ — T) par les autres formules

$(v+v') = 2.33131$... 0.3676001 $x = 90° - \omega = 89° 27' 20''$
moitié... 0.1838000 $\frac{1}{2}x = 45° - \frac{1}{2}\omega = 44.43.40$
0.5514001
C = 27.40385... 1.4378116
1.9892117............ 1.9892117
$\cos\frac{1}{2}x$..... 9.8515386 $\sin\frac{1}{2}x$... 9.8474118
double... 9.7030772 double... 9.6948236
34.98062 1.5438275 1.5314471
33.99751
0.98311 = T′ — T, dans la parabole
0.01689 = erreur à peu près comme ci-dessus.

Par le théorème de Lambert,

$\log(v+v')$......... 0.3676001
$\cos x = \sin\omega$... 7.9778244
$k = 0.022150$ 8.3454245
$v+v' = 2.33131$
$v+v'+k = 2.35346 = 2a$
$v+v'-k = 2.30916 = 2b$
log constant... 1.4378116 1.4378116
a.... 0.0706769 b.... 0.0624241
$a^{\frac{1}{2}}$... 0.0353385 $b^{\frac{1}{2}}$... 0.0312120
34.98058 1.5438270 1.5314477
33.99755
T′ — T = 0.98303
0.01697 = erreur un peu plus forte encore que ci-dessus

On voit aisément que ces deux calculs ne sont pas susceptibles d'une plus grande précision que le premier; (T′ — T) y est la différence entre deux nombres fort grands, qu'il est plus difficile d'avoir avec

exactitude. L'autre formule est plus commode à calculer, et elle a l'avantage qu'on peut y appliquer ensuite la petite correction elliptique.

83. Nous devons donc regarder ces théorèmes paraboliques comme des approximations qui nous mèneront à une courbe qui ne sera pas tout-à-fait celle de la comète; mais il suffit que les élémens soient assez approchés pour qu'on puisse reconnaître la comète quand elle reviendra un jour à son périhélie. Il n'y a que ce point qui soit essentiel.

Voyons maintenant comment, d'après nos lieux géocentriques, que nous pouvons regarder comme des observations, nous pourrons retrouver soit l'ellipse qui nous a servi à les calculer, soit une parabole qui puisse s'y ajuster.

Première journée.

84. Supposons que le 21 janvier, jour où il apperçut la comète, M. Messier eût observé la latitude géocentrique 4° 30′ 59″B, et la longitude.. 11ˢ23°44′ 4″
le lieu du soleil étant alors........................ 10. 1.33.56
ce qui donne l'élongation orientale............... 1.22.10. 8.

Le logarithme du rayon vecteur était 9.9952170; voilà tout ce que donne l'observation jointe à la théorie, du moins pour ce premier jour. Nous ne pouvons faire aucun calcul qui ne soit hypothétique.

Supposons d'abord que l'angle à la comète soit de 90°, ou.......
— 3ˢ 0° 0′ 0″
la longit. héliocentrique L = G + angle à la comète = 2.23.44. 4

La distance accourcie V sin T = 0.777582 sera la plus courte que l'on puisse supposer,

$$\text{tang}\,\lambda = \frac{\text{tang}\,g\cos(T-x)}{\sin T} = \text{tang}\,g\cot T = 3°\,30'\,36'',$$

$$v = \frac{(v\cos\lambda)}{\cos\lambda} = \frac{V\sin T}{\cos\lambda} = 0.7790457;$$

c'est la moindre valeur que puisse avoir le rayon vecteur qui sans doute est plus grand,

$$f = \frac{V\cos(T-x)}{\cos x} = R\cos T = 0.6038351.$$

Cette distance à la terre paraît trop faible pour être vraisemblable, surtout en cette occasion où l'on cherchait la comète depuis long-tems ; il faut donc l'augmenter en donnant à x une valeur positive qui diminuera d'autant la longitude héliocentrique, puisque l'élongation est orientale.

Je suppose $x = 0°$ et $x = 1°$; puis $x = 10$ et $11°$, 20 et $21°$, 30 et $31°$, 40 et $41°$, 50 et $51°$, etc., et je forme ensuite par les formules (59), le tableau des hypothèses pour le 21 janvier ; elles n'exigent pas une page de calcul, et nous serviront à prendre quelques idées des angles et des distances.

85. La moindre valeur qu'on puisse assigner au rayon vecteur, est

0.779043 log...	9.8915617
moitié.............	9.9457808
$\log v^{\frac{3}{2}}$.............	9.8373425
$\frac{1'}{v^{\frac{3}{2}}} = 1'.4543$...........	0.1626575.

Ainsi, en supposant la comète au périhélie, ce qui est extrêmement invraisemblable, son mouvement diurne serait celui de $1',45$ dans la table générale, ce qui ferait au plus $2° 2'$.

La plus grande valeur calculée de ρ est 1,564 ; il n'est pas probable que la comète soit plus éloignée. Le rayon vecteur que fournit la même hypothèse est 1.24175; avec ce rayon vecteur, le mouvement pour l'intervalle $(T' - T) = 1$ est $\frac{2h^{\frac{1}{2}}}{3C \sin 1° (vv')} = 1° 0' 26'' h^{\frac{1}{2}}$. Si $h < 1$, le mouvement sera moindre que de $1° 0' 26''$; la distance périhélie de notre comète est environ 0,583 qui donne un mouvement de $46'$, mais nous sommes censés l'ignorer.

La formule (40) $\frac{2(T' - T)}{3C \sin 1°} \left(\frac{h^{\frac{1}{2}}}{vv'}\right)$ nous indiquera une des limites que ne doit pas passer le mouvement diurne.

Seconde journée.

86. Le lendemain 22 janvier, je suppose qu'on ait trouvé $g = 4° 35' 36''$B plus fort de $4' 37''$ que le 21 ; on en pourra conclure ou que la comète a passé son nœud ascendant, et que sa latitude héliocentrique augmente

augmente avec la distance au nœud, ou que la comète s'approche de la terre. Soit

$$G = 11^s 23^\circ 18' 21''$$
$$\odot = 10.\ 2.34.57$$

Le 22........ $T = 1.20.43.24$
Le 21........ $T = 1.22.10.\ 8$

L'élongation a diminué de..... 1.26.44
et la longitude géocentrique de... 25.43

Nous avons (59), $L + x = ♁ + T - 90^\circ$, d'où

$$dL + dx = d♁ + dT = 1^\circ\ 1'\ 1'' - 1^\circ\ 26'\ 44'' = -25'\ 43'' = dG;$$

dx ne saurait donc être considérable. Dans les suppositions suivantes pour dx, nous aurons pour dL les valeurs correspondantes comme il suit :

dx	dL
$+60'$	$-85'\ 43''$
40	-65.43
20	-45.43
0	-25.43
-20	-5.43
-40	$+14.17$
-60	$+34.17$
-80	$+54.17$

87. Les valeurs véritables sont très-probablement comprises entre ces limites ; quelques essais les feront connaître à peu près. Je vois qu'il faut faire pour le 22 janvier, un tableau tout semblable à celui du 21, et donner à x les mêmes valeurs, puisque dx ne doit guère passer 1°. Dans d'autres occasions, j'ai trouvé que dx devait être de 4 ou 5° par jour, mais on n'a jamais d'incertitude à cet égard, à cause de l'équation $dL + dx = d♁ + dT = dG$. Mon tableau construit, je vois que dans toutes les hypothèses les v diminuent ; la comète va donc vers son périhélie ; les latitudes héliocentriques sont croissantes, la

comète a donc passé son nœud ascendant; les ρ prouvent que la comète s'éloigne de la terre, l'augmentation des ρ et la diminution des L prouvent que la comète est rétrograde.

88. Avec nos deux tableaux, nous pouvons commencer les essais sur $T' - T$.

Soit $x = 0$ et $dx = 1°$,

$x = 0°$	2ˢ.23°.44′. 4″	0.77904
$x' = 1$	2.22.18.21	0.76402
$dL =$	−1.25.43	

il est évident que la distance périhélie serait moindre que 0.764. Or par la table (III), avec $v = 0{,}764$ et un mouvement de 86′, la distance périhélie serait de 0,3 environ, ce qui est assez rare; ainsi, quoique ces données n'offrent rien d'impossible, elles n'ont rien de probable; si on cherche $T' - T$, on trouvera 0j,8397 beaucoup trop faible. On peut passer à d'autres suppositions: $x = 10°$ et $x' = 11°$ donneraient $T' - T = $ 0j,87363; $x = 30$, et $x = 40°$ donneraient successivement $T' - T = 0.95122$, et $T' - T = 1.0984$; $x = 35$ et $x' = 36°$ donnent $T' - T = 1.0206$. Ainsi, dans la supposition de $dL = 85' 43''$, il faudrait supposer x un peu au-dessous de 34, $x = 35°$ donne $v = 0.9607$.

89. Soit maintenant $dx = 40'$ et $dL = 65' 43''$, la table (III) me montre que v surpassera probablement 0,9, et qu'il ne peut guère surpasser 1,2; c'est donc entre ces limites que je dois faire les essais: x sera donc au moins 30 le 21 janvier, v sera 0,9, et $h = 0{,}4$, table (III). Avec $x = 40°$, j'aurais $v = 1{,}02$, $h = 0{,}6$; avec $x = 50°$, $v = 1{,}215$; le mouvement 45′ 45″ est impossible, table (III). Avec $x = 45°$, $v = 1{,}11$, $h = 0{,}9$, il n'y a pas d'impossibilité; j'essaie $x = 45$, $x = 45° 40'$, $v = 1{,}11781$, $v' = 1{,}10965$, $T' - T = $ 0j,9955. Il y a peu de changemens à faire à ces suppositions pour avoir une parabole. Ainsi, depuis $v = 0{,}96$ jusqu'à $v = 1{,}11$, on trouverait des paraboles pour ces deux observations.

90. Je fais ensuite $dx = 20'$.

	L	v
$x = 40°\ 0'$	1.13.44. 4	1.01990
$x' = 40.20$	1.12.58.21	1.00515

$dL = 45.43$
$\frac{1}{2} dL = 22.51,5$

La table (III) montre que h sera 0,3, supposition peu probable et qui est à rejeter, parce que ces v donnent $T' - T = 0.83492$ beaucoup trop faible. Je vois qu'il faudrait augmenter les v, et par conséquent x.

Enfin

$x = 50.\ 0$	1.3.44. 4	1.21573
$x' = 50.20$	1.2.58.21	1.20065

$dL = 45.43$
$\frac{1}{2} dL = 22.51$

La table nous donnera $h = 0,2$ plus rare encore, mais possible. Ces suppositions donnent $T' - T = 1.0345$ un peu trop fort; il en résulte donc que v doit être 0.96, 1,11 et 1.21, suivant qu'on fera $dL \doteq 86'$, 66' et 46'. Il serait inutile de pousser ces recherches plus loin le second jour. On trouverait une multitude de paraboles qui satisferaient à ces deux observations; mais on n'aurait aucun motif de préférence, et ce serait du tems perdu. Nous n'avons fait que des calculs faciles, qui sont un amusement pour un astronome qui vient de découvrir une comète. Nous donnerons un autre moyen pour trouver v par deux observations, quand nous en serons à la seconde apparition de la comète, dans l'autre branche de sa courbe.

Troisième journée.

91. Le 23, M. Messier observa encore la comète. Supposons qu'il ait trouvé, comme nous l'avons fait par nos calculs, $g = 4°.40'.9''$, plus forte de 4'.33'' que le 22, $G = 11^s\ 22°\ 53'\ 14''$ et $T = 1^s\ 19°\ 17'\ 17''$ plus faible de 1° 26' 7'', il en résulte une marche régulière; nous en conclurons que la marche héliocentrique est au moins aussi régulière, et que les v doivent diminuer uniformément, ce qui nous fera rejeter toutes les hypothèses où les v s'écarteraient trop de nos limites. Mais en abandonnant tous les x inutiles, et nous bornant aux suppositions $x = 47, 48$ et $49°$,

pour la facilité de calculs suivans, après avoir formé les trois tableaux pour ces trois degrés, nous les étendrons par une interpolation facile aux dixaines de minutes, comme on le verra ci-après (112). A l'uniformité des différences, on voit qu'il serait très-facile d'ajouter quelques lignes au commencement ou à la fin de chacun des trois tableaux, si on le jugeait nécessaire. Dans l'interpolation pour les dixaines de minutes, il n'y a qu'à écrire pour les x et les L. Pour λ, les parties proportionnelles se prennent à vue; pour ν, il convient d'avoir égard aux secondes différences, par le moyen que nous allons indiquer. Pour les ν' et les ρ dont nous n'avons aucun besoin réel, nous les laisserons de degré en degré seulement. (*Voy.* tous ces tableaux ci-après, à la suite de l'article 112.)

92. Supposons qu'il faille interpoler de 10 en 10' les ν ci-joints, en supposant les secondes différences constantes. Pour arriver de 47 à 49°, il faudra 12 additions consécutives; ainsi les 12 différences premières feront nécessairement la somme des deux différences premières 1217 et 2236 de la table primitive, ou 3453.

x	ν	$\Delta'\nu$	$\Delta''\nu$
47°	1.10081		
		2117	
48	1.12198		119
		2236	
49	1.14434		

Soit d' la première des différences premières, soit δ la différence seconde constante; les différences premières seront

$$d',\quad d'+\delta,\quad d'+2\delta,\quad d'+3\delta\ldots\ldots d'+11\delta,$$

dont la somme sera

$$12d'+\tfrac{12.11}{2}\delta=12d'+66\delta=4353.$$

De même, pour aller de 47 à 48°, il faudra 6 additions, et vous aurez $6d'+\frac{5.6}{2}\delta=6d'+15\delta=2117=$ différence première de la table; le double.... $12d'+30\delta=4234$ retranché de la Ire équation

donne $36\,\delta = 119$, et $\delta = \frac{119}{36} = \frac{\Delta''v}{n^2} = 3{,}305$;

$$d' = \tfrac{2117}{6} - 2{,}5\,\delta = 352{,}833 - 8{,}262 = 344{,}57.$$

Voici l'opération

δ........	3.305
47°...	1.10081. = v
	344 57 = d',
47.10'	1.10425.57
	347.875
47.20	1.10773.445
	351.180
47.30	1.11124.625
	354.485
47.40	1.11479.110
	357.790
47.50	1.11836.900
	361.095
48. 0	1.12197.995
	364.400
48.10	1.12562.395
	367.705
48.20	1.12930.100
	371.010
48.30	1.13301.110
	374.315
40.40	1.13675.425
	377.620
48.50	1.14093.045
	380.925
49. 0	1.14433.970

On voit par là que nos tableaux seront assez exacts et qu'on y pourra prendre en toute sûreté les parties proportionnelles pour une valeur intermédiaire de x.

93. Le grand avantage de ces tableaux, c'est que chaque ligne qu'ils nons offrent représente exactement le lieu géocentrique observé, ce qui est également vrai de toutes les lignes qu'on peut y intercaler. Ainsi les trois degrés qui nous donnent les observations calculées dans trois hypothèses, nous les donneront dans 18 hypothèses, si nous les étendons aux dixaines de minntes, dans 180 hypothèses si nous les étendons aux minutes, et dans 10800 hypothèses, si par les parties proportionnelles nons les étendons aux secondes. Ainsi toutes les fois qu'un lieu héliocentrique, calculé suivant les élémens trouvés ou estimés, représentera à la fois la longitude, la latitude et le rayon vecteur pris sur une même ligne de nos tableaux, il satisfera nécessairement au lien géocentrique d'où il aura été déduit, et dont nous n'aurons plus à nous embarrasser.

94. Nous avons, dans les calculs grossiers des deux premiers jours, estimé le mouvement sur l'orbite d'après le mouvement sur l'écliptique; mais comme nous connaissons les latitudes héliocentriques dans chaque hypothèse que nous formerons, nous pouvons calculer les réductions à l'orbite. En effet le triangle formé par l'arc de l'orbite et les deux cercles de latitude, donne

$$\begin{aligned}\cos du &= \cos dL \cos\lambda \cos\lambda' + \sin\lambda \sin\lambda' \\ &= \cos(\lambda'-\lambda) - 2\sin^2\tfrac{1}{2}dL \cos\lambda \cos\lambda' \\ \sin^2\tfrac{1}{2}du &= \sin^2\tfrac{1}{2}d\lambda + \sin^2\tfrac{1}{2}dL \cos\lambda\cos\lambda' \\ \sin\tfrac{1}{2}du &= \sin\tfrac{1}{2}dL(\cos\lambda\cos\lambda')^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\sin^2\frac{1}{2}d\lambda}{\sin^2\frac{1}{2}dL\cos\lambda\cos\lambda'}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sin\tfrac{1}{2}dL(\cos\lambda\cos\lambda')^{\frac{1}{2}}(1+\operatorname{tang}^2\varphi)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sin\frac{1}{2}dL(\cos\lambda\cos\lambda')^{\frac{1}{2}}}{\cos\varphi}\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\sin\tfrac{1}{2}du &= \sin\tfrac{1}{2}d\lambda\left(1+\frac{\sin^2\frac{1}{2}dL\cos\lambda\cos\lambda'}{\sin^2\frac{1}{2}d\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sin\tfrac{1}{2}d\lambda(1+\cot^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sin\frac{1}{2}d\lambda}{\sin\varphi}.\end{aligned}$$

Nous ferons donc

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin\frac{1}{2}d\lambda}{\sin\frac{1}{2}dL(\cos\lambda\cos\lambda')^{\frac{1}{2}}}$$

et

$$\sin\tfrac{1}{2}du = \frac{\sin\frac{1}{2}dL(\cos\lambda\cos\lambda')^{\frac{1}{2}}}{\cos\varphi} = \frac{\sin\frac{1}{2}d\lambda}{\sin\varphi},$$

et la correction $(\frac{1}{2}du - \frac{1}{2}dL)$ une fois calculée pour une hypothèse, restera sensiblement la même pour une hypothèse voisine.

95. Les calculs des deux premiers jours n'étaient que préparatoires, c'est ici que commencent les véritables recherches; mais tout ce qui est fait sera utile et facilitera singulièrement les calculs suivans. La marche régulière de nos tableaux empêche toute erreur sensible et importante.

Nos trois tableaux renferment les vrais lieux héliocentriques, il ne reste qu'à les démêler. En trois jours consécutifs, les L, les h et les v doivent croître assez régulièrement. Le mouvement en longitude doit s'accélérer un peu, puisque la comète va vers le périhélie; les v doivent avoir des variations décroissantes, mais on peut les supposer égales. Les λ doivent croître uniformément.

96. Prenons au hasard dans nos trois tableaux, en supposant $dx = 20'$; car si nous prenions $dx = 40'$, nous aurions pour dv des quantités beaucoup moindres, et $T' - T$ qui en résulterait, ne serait pas la moitié de ce qu'il doit être, ce qui prouve que dx doit peu différer de $20'$.

x	L	λ	v
48. 0	1.5.44. 4	5.41.46	1.[illegible]6784
48.20	1.4.58.21	5.55.29	1.15262
48.40	1.4.13.14	6. 8.58	1.13675
	$dL = 45.43$	$d\lambda = 13.43$	$dv = 1522$
	$dL' = 45.\ 7$	$d\lambda' = 13.29$	$dv' = 1587$

Les dL vont en diminuant, ils devraient augmenter. Les $d\lambda$ peuvent diminuer un peu; les dv devraient diminuer.

48.10	1.5.34. 4	5.41.50	1.17164
48.30	1.4.48.21	5.55.30	1.15637
48.50	1.3.53.14	6. 8.59	1.14053
	$dL = 45.43$	$d\lambda = 13.40$	1527
	$dL' = 45.\ 7$	$d\lambda' = 13.29$	1584

48.20	1.5.24. 4	5.41.54	1.17347
48.40	1.4.38.21	5.55.31	1.16015
49. 0	1.3.53.14	6. 8.59	1.14434
	$dL = 45.43$	$d\lambda = 13.37$	$dv = 1532$
	$dL' = 45. 7$	$d\lambda' = 13.28$	$dv' = 1581$

97. C'est toujours à peu près la même chose; on peut rendre les dv égaux, et corriger en conséquence les dL. Ainsi, première hypothèse, pour rendre égaux les dv, du v moyen 1.15262, retranchons la moitié de la différence 65 ou 32, nous aurons

1.5.44. 4	5.41.46	1.16784
1.4.59.13	5.55.29	1.15230
1.4.13.14	6. 8.58	1.13675
44.51	13.43	$dv = 1554$
45.59	13.29	$dv' = 1555$

Mais si nous diminuons v de 32 parties, ou de $\frac{32}{372}$ de la différence pour 10', il faudra corriger à proportion les L et les λ, et par conséquent retrancher de λ', $\frac{32}{372}$ de la différence qui est absolument insensible; il faudra ajouter à L', $\left(\frac{32}{372}\right) 10' = \frac{32.600''}{372} = 51'',6$.

Ainsi nos dL s'accélèrent, nos $d\lambda$ diminuent un peu, et les dv sont constans; il reste à savoir si ces positions qui représentent les observations, satisferont l'intervalle d'un jour. En corrigeant de même les deux autres hypothèses, je les change en

1.5.34. 4	5.41.50	1.17164
1.4.49. 7	5.55.30	1.15609
1.4. 3.14	6. 8.59	1.14053
44.57	13.40	1555
45.53	13.29	1556

1.5.24. 4	5.41.54	1.17547
1.4.39. 1	5.55.31	1.15990
1.3.53.14	6. 8.59	1.14434
$dL = 45.\ 3$	13.37	1557
$dL' = 45.47$	13.28	1556

98. Si je cherche T′ — T dans la première hypothèse pour les deux observations extrêmes, au lieu de 2ʲ,0, je trouve 1ʲ,9552. Si j'y ajoute la correction elliptique (54), je ne trouve encore que 1ʲ,98677. Ainsi nos rayons vecteurs seront tous faibles.

La seconde hypothèse donne T′ — T = 1.9628 dans la parabole, et 1.9943 dans l'ellipse. Donnons pour exemple la troisième hypothèse,

$\cos\lambda = 5°\,41'\,54''$.... 9.99785
$\cos\lambda'' = 6.\ 8.59$..... 9.99749
$\cos\lambda\cos\lambda''$.......... 9.99534
$(\cos\lambda\cos\lambda'')^{\frac{1}{2}}$.... 9.99767
$\sin\frac{1}{2}dL =\ 45'\,25''$.... 8.12093
$\sin\frac{1}{2}dL\,(\cos\lambda\cos\lambda'')^{\frac{1}{2}}$.......... 8.11860
$\sin\frac{1}{2}d\lambda =\ 13'.33''$.... 7.59673
$\mathrm{tang}\,\varphi = 16°\,44'\,10''$.... 9.47813
C. $\cos\varphi$.... 0.01880
8.11860
$\sin\frac{1}{2}du =\ 47'.10''$.... 8.13740

C. $\sin\varphi$.... 0.54066
$\sin\frac{1}{2}d\lambda$.... 7.59673
$\sin\frac{1}{2}du =\ 47'\,10''$.... 8.13739

v.... 1.17547.... 0.0702115		2...	0.3010300
v'.... 1.14434.... 0.0585551		$\sin z$...	9.8523796
	0.0116564	$\cos z$...	9.8465513
$\mathrm{tang}\,z = 45°\,23'\,4''$.... 0.0058282		$\cos\frac{1}{2}du$...	9.9999591
		$\cos\omega = 1°\ 6'\ 0''$....	9.9999200
	$\frac{1}{2}\omega = 0.33.\ 0$		

log constant....		1.7644178
ν....		0.0702115
$\nu^{\frac{1}{2}}$....		0.0351057
C. sin z....		0.1476204
double....		0.2952408
$\cos^2 \frac{1}{2}\omega$....		9.9999600
$\sin \frac{1}{2}\omega$....		7.9822334
T′ — T = 1.971467....		0.2947896
log constant pour 1759......		9.60561
$\nu^{\frac{1}{2}} \sin z$........		0.18273
quadruple		0.75092
$\sin \frac{1}{2}\omega$.....		7.98225
terme elliptique...	0.031731	8.50149
	2.003198.	

Ainsi, dans la parabole, T′— T est un peu trop faible; mais dans l'ellipse de 1759, que nous ne sommes pas censés connaître, il serait un peu trop fort. Dans la parabole, avec ce mouvement du, nous trouverions nos rayons vecteurs trop faibles; nous les augmenterions, et nous nous écarterions de la vérité.

99. Nous avons supposé $x = 48° 20'$; en le supposant 48° 30′, j'ai trouvé dans la parabole, T′ — T = 1.9802; en supposant $x = 48° 40'$, T′ — T = 1.9901; en supposant $x = 48° 50'$, j'ai trouvé enfin T′ — T = 2ʲ.000 : nous trouverons donc une parabole, mais nos rayons vecteurs seront réellement trop grands.

Il faut d'abord déterminer le nœud et l'inclinaison par les deux observations extrêmes,

$\lambda'' =$	6° 8′ 57″	
$\lambda =$	5.42. 5	
$\sin(\lambda'' + \lambda) =$	11.51. 2.......	9.3125152
C. $\sin(\lambda'' - \lambda) =$	0.26.52.......	2.1070645
$\text{tang}\,\frac{1}{2}dL =$	0.45.25.......	8.1209666
$\text{tang}(x + \frac{1}{2}dL) =$	19. 8.44.......	9.5405463
$x =$	18.23.19.......	18° 23′ 19″
$x + dL =$	19° 54. 9	L = 1ˢ 4.54. 4
$L'' =$	1ˢ 3.23.14	
☊ =	1.23.17.23	= 1.23.17.23

x est la distance au nœud pour la première observation, $x + dL$ pour la seconde. La comète a rétrogradé depuis le passage au nœud ; on aura donc ☊ $= L + x = L'' + (x + dL)$. Les huit orbites publiées donnent de $1^s\,23^\circ\,44'\,55''$ à $1^s\,23^\circ\,49'$ dans l'ellipse ; mais dans la parabole, Klinkenberg a trouvé $1^s\,24^\circ\,7'\,20''$. Pour l'inclinaison, je fais les deux calculs suivans :

tang λ...	8.9993948	tang λ''...	9.0323656
C. sin x...	0.5010551	C. sin $(x + dL)$...	0.4679842
tang I $= 17^\circ\,33'\,42''$...	9.5004499	....	9.5003498

Klinkenberg a trouvé $17^\circ\,28'\,55''$ dans la parabole, $17^\circ\,40'\,5''$ dans l'ellipse : les autres astronomes ont donné de $17^\circ\,35'\,20''$ à $17^\circ\,41'\,20''$.

100. Pour les distances au nœud sur l'orbite,

C. cos I...	0.0207281	....	0.0207281
tang x...	9.5217067	tang $(x + dL)$....	9.5587617
tang $x' = 19^\circ\,13'\,23''$..	9.5424348	$x' + du = 20^\circ\,47'\,38''$..	9.5794898
		$x =$	19.13.23
$\frac{1}{2}du =$ 47'. 7'',5, $\frac{1}{4}du = 23'\,53'',75$...		$du =$	1.34.15

La différence des distances au nœud sur l'orbite est en même tems celle des longitudes et des anomalies,

☊ $=$	$1^s\,23^\circ\,17'\,23''$		$1^s\,23^\circ\,17'\,23''$
$x' =$	19.13.23	$x' + du$....	20.47.38
1re longitude $=$	1. 4. 4. 0	2e longitude...	1. 2.29.45

101. Cherchons les deux anomalies dont nous n'avons encore que la différence, et servons-nous de la règle de Nicolic (41),

$v =$ 1.18716...............	0.0745093
$v'' =$ 1.15595...............	0.0629392
tang$^2 z$....................	0.0115701

$$\tan z = 45°22'54''\ldots\ldots 0.0057850$$
$$45$$
$$\cot(z+45°) = 90.22.54 \quad -7.8235680$$
$$\cot\tfrac{1}{2}(du) = 0.23.33,75 + 2.1640525$$
$$\tan\tfrac{1}{2}(u+u'') = -44.11.\ 0,62 - 9.9876205$$
$$\tfrac{1}{2}u = -44.34.54,37$$
$$\tfrac{1}{2}u'' = -43.47.26,87$$
$$u = -2^s29.\ 9.\ 9 \qquad u'' = -2^s27°34'53''$$
$$L = 1.\ 4.\ 4.\ 4 \qquad L'' = 1.\ 2.29.45$$
$$\Pi = 10.\ 4.54.55. \qquad 10.\ 4.54.52$$

Klinkenberg, dans la parabole, a trouvé $10^s\ 1°\ 0'\ 24''$, et dans l'ellipse, $1^s\ 3°\ 19'\ 18''$; les autres astronomes, dans l'ellipse de $10^s\ 3°\ 8'$ à $10^s\ 3°\ 23'$.

102. v....	0.0745093	v''....	0.0629392
$\cos\frac{1}{2}u$....	9.8526735	$\cos\frac{1}{2}u''$...	9.8584596
	9.8526735		9.8584596
$h = 0.60236$....	9.7798563	0.602363	9.7798584

Klinkenberg, dans la parabole, a trouvé 0.597075, en se servant des observations de La Caille dans l'autre branche; mais dans l'ellipse, tous les astronomes, comme Halley, et peut-être d'après lui, ont donné de 0.582 à 0.585; nous trouverons 0.005288 de plus que Klinkenberg.

103. L'anomalie 89° 9' 9'' (table générale) répond à... 107j 219
l'anomalie 87.34.54 .... à... 102.956

$h^{\frac{3}{2}}$...	9.6697844	$h^{\frac{3}{2}}$........	9.6697876
107.219...	2.0302717	102.956...	2.0126518
t = 50j.125	1.7000561	48j.132	1.6824394
T = 21.25		23.25	
passage = 71.375	p = passage...	71.382	
59.000	janvier et février..	59	
mars... 12.375	....	12.382	

milieu, 12 mars, 5785.

Ainsi la comète a dû passer à son périhélie le 12 mars, 0^{j}3785, c'est-à-dire, à 9^h 5' 2",4.

104. On ne sera pas surpris que dans une parabole calculée sur un arc de 1° 34' 15", nous ne soyons pas arrivés plus près des élémens que nous avions supposés; il est au contraire assez remarquable que nous ayons pu en approcher de si près.

Halley avait trouvé

☊ =	1^{s}21°16'30"........		1^{s}20°48' 0"
précession en 76 ans =	1. 3.28........		1. 3.28
☊ en 1759 =	1.22.19.58		1.21.51.28
I...	17.56	et	17.42
Π =	10. 2.52.45		10. 1.36. 0
précession.....	1. 3.28		1. 3.28
Π en 1759....	10. 3.56.13		10. 2.39.28
h =	0.58328	et	0.58250.

Notre parabole suffirait donc déjà pour reconnaître l'identité; la révolution nous donnerait alors le grand axe, et nous pourrions calculer le petit terme elliptique de la formule (T' — T)

105. On voit comment, avec trois observations, on peut trouver une parabole qui les représente, et qui, sans être rigoureusement exacte, facilitera les recherches suivantes, en renfermant les hypothèses dans des limites assez étroites. Nous avons fait porter les variations sur les rayons vecteurs que nous avons augmentés de manière à satisfaire aux intervalles de tems. Nous aurions pu faire varier les dx, ce qui aurait fait varier les L, et par suite les rayons vecteurs. Ainsi, en supposant $dx = 21'$, je voyais l'erreur augmenter un peu; en supposant $dx = 19'$, je trouvais une parabole peu différente.

106. Le 24, il n'y eut pas d'observations; mais le 25, M. Messier revit la comète. Soit donc

$g = 4°49'1"$, $G = 11^s22°4'32"$, $\odot = 10^s5°37'55"$, $T = 1^s16°26'43"$;

je forme un tableau pareil aux précédens. La marche du rayon vecteur

qui doit diminuer de 3100 parties en deux jours, m'avertit que x a pour limites 49 et 51°.

Le 27, $g = 4^s\ 57'\ 38''$, $G = 11^s\ 21°\ 17'\ 54''$, $\odot = 10^s\ 7°\ 39'\ 49''$, $T = 1^s\ 13°\ 38'\ 5''$; x va de 50 à 51° 20'.

Nous pourrions à chaque observation nouvelle tenter de nouveaux essais, et l'astronome qui suivrait une comète n'y manquerait pas; mais ces calculs ne nous offriraient aucune remarque intéressante. Ainsi, nous pourrions chercher une parabole avec les observations des 23, 25 et 27. Nous partirions de la position du 23, nous ferions varier les rayons vecteurs de 3170; avec ces rayons vecteurs, nous aurions par nos tableaux, les L et les λ, dL, du et $T' - T$; l'intervalle devrait se trouver de quatre jours, du 23 au 27. Nous ne trouverions que 3,9843 dans la parabole, mais 4.04646 dans l'ellipse, une variation légère nous donnerait une parabole nouvelle. Nous remarquerions que l'intervalle de quatre jours rend moins incertaine la valeur du petit angle ω trouvée par son cosinus.

107. Nous avons fondé toutes nos recherches sur la supposition que les dv sont presque constans. Pour nous en convaincre, différentions $v = h + h \tang^2 \frac{1}{2} u$, nous aurons, en prenant du à l'article (22)

$$dv = \frac{2h \tang \frac{1}{2}u \,.\, d\frac{1}{2}u}{\cos^2 \frac{1}{2} u} = \frac{h du \tang \frac{1}{2} u}{\cos^2 \frac{1}{2} u} = \frac{h \tang \frac{1}{2} u}{\cos^2 \frac{1}{2} u} \,.\, \frac{\sin 1°\ 23'\ 37'',9 \cos^4 \frac{1}{2} u}{h^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\sin 1°\ 23'\ 37'',9 \sin \frac{1}{2} u \cos \frac{1}{2} u}{h^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2} \sin 1°\ 23'\ 37'',9 \sin u}{h^{\frac{1}{2}}} = 0.01597 \sin u$$

dans notre parabole. Ainsi jamais la variation diurne ne peut passer 0.01597, et d'un jour à l'autre elle doit changer très-peu; en différentiant une seconde fois,

$$ddv = \frac{\sin 1°\ 23'\ 38'' \cos u du}{2h^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sin 1°\ 23'\ 38'' \cos u \,.\, \sin 1°\ 23'\ 38'' \cos^4 \frac{1}{2} u}{2h^{\frac{1}{2}} \,.\, h^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\sin^2 1°\ 23'\ 38'' \cos u \cos^4 \frac{1}{2} u}{2h^2} = 0.0008698 \cos u \cos^4 \frac{1}{2} u,$$

quantité fort petite pour ces premières observations où l'anomalie diffère peu de 90°, et qui, même au périhélie, ne peut jamais aller à 0.0009.

Nous avons donné (22 et 23) les différentielles première et seconde

du mouvement d'anomalie, ou, ce qui revient au même, de la longitude dans l'orbite. Dans cette première apparition de notre comète, les *du* ne changeaient d'un jour à l'autre que de 90 à 120″.

108. L'équation $dv = 0.01597 \sin u$ nous met en état d'assigner à fort peu près quels seront les v des jours suivans, et de continuer les tableaux des hypothèses; je vois que du 25 au 28, les rayons vecteurs doivent diminuer de 4654, et que du 28 au 31, ils diminueront de 4637. Avec ces deux intervalles de trois jours chacun, je puis chercher une parabole; ainsi, après quelques essais faciles, j'ai trouvé les quantités suivantes :

Jours.	L	dL	λ	dλ	v	dv
25	1ˢ 1° 36′ 6″	2° 35′ 4″	6° 36′ 58″	44′ 20″	1.12918	4654
28	0.29. 1. 2	2.49.20	7.21.18	47.20	1.08264	4623
31	0.26.11.42		8. 8.38		1.03641	

Les observations du 25 et du 31, m'ont ainsi donné $T' - T = 5^j.99970$, au lieu de 6 jours; la différence est insensible. Ainsi, par des calculs tout semblables à ceux des articles 97, etc. j'ai trouvé une seconde parabole tout-à-fait indépendante de la première. En voici la comparaison.

	h	p	Π	☊	I
1	0.602361	71.575	10ˢ 4° 54′ 53″	1ˢ 23° 17′ 28″	17° 33′ 42″
2	0.608672	71.643	10.5. 8. 6	1.23.10.58	17.30. 8
milieu...	0.605516	71.509	10.5. 1.30	1.23.14.10	17.31.55

109. Du 28 au 31, v diminue de 4623, c'est 1541 par jour; le rayon du premier février sera donc de 1.021 à peu près, celui du 3 février, 0.99, celui du 4, 0,975.

Je trouve dans les tableaux faits en conséquence, les quantités suivantes prises à vue, en faisant varier L de 3′ et L′ de 4′.

Jours.	L	dL	λ	dλ	ν	dν
1	0ˢ 25° 11′ 11″		8° 25′ 8″		1.02118	
		2° 5′ 2″		33′ 48″		3106
3	0.23. 6. 9		8.58.56		0.99012	
		1.6.43		17.28		1488
4	0.21.59.26		9.16.24		0.97524	

Je trouve ainsi T′ — T = 3.0004 pour l'intervalle total, et 0.99779 pour celui du 3 au 4; je puis me contenter de cette exactitude, et chercher les élémens; je trouverai

h	p	Π	☊	I
0.604726	71.695	10ˢ 4° 40′ 18″	1ˢ 23° 12′ 25″	17° 29′ 12″.

Milieu des trois paraboles.

0.605253	71.571	10.4.54.26	1.23.13.35	17.31. 1.

110. Il nous reste encore les observations des 11, 12 et 14 février, par lesquelles nous pourrions bien trouver une parabole un peu différente; car nos dernières anomalies étaient 79° et 76°; et nous avons vu (8) qu'à 78°, la différence entre la parabole et l'ellipse change de signe, et que la différence entre les rayons vecteurs dans les deux courbes, sans changer de signe, devient de plus en plus petite.

Je forme les tableaux des hypothèses, en négligeant toutefois les suppositions qui, d'après ce qui précède, sont évidemment inutiles. A cela près, je suppose que ces trois observations soient les seules.

Si je prends au hasard la première ligne du tableau du 11, et la seconde de celui du 12, je trouve

11,	0ˢ 14° 2′ 38″	11° 36′ 5″	0.84563
12,	0.12.32.13	11.55.42	0.83274

J'ai pour $d\nu$ 0.01289

je double cette différence 0.02578

donc le 14, ν doit être 0.80696

Avec cette valeur approchée de ν, je cherche dans le tableau du 14, la

la longitude et la latitude correspondantes; j'y trouve

14....	0ˢ 9° 19′ 3″....	12° 36′ 50″	0.80696
$dL =$	1.30.25	$d\lambda = 19.37$	
$dL' =$	3.13.10	$d\lambda' = 41.\ 8.$	

dL' est plus que double de dL, le mouvement s'accélère; $d\lambda'$ est aussi plus que double de $d\lambda$; mais les dv, au lieu d'être égaux, devraient aller en diminuant, notre troisième rayon vecteur pourrait être un peu trop faible par rapport au premier.

111. Si nous comparions de même la première ligne du tableau du 11 à la troisième du suivant, nous aurions dv moitié moindre, et $dL = 1° 40'$; les dv seraient un peu trop faibles pour ce mouvement dL. Le même défaut pourrait être dans les dv de l'article 110. Si nous voulons augmenter les dv, il faut descendre un peu moins dans le second tableau.

Voulons-nous $dv = 1400$, nous aurons, en conservant la premiè[re] ligne,

			dv
0ˢ 14° 2′ 38″	11° 36′ 5	0.84563	1400
0.12.34.36	11.56. 5	0.83163	2800
0. 9.25.25	12.38.15	0.80363	
$dL = 1.28.\ 2$	$20.\ 0 = d\lambda$		
$dL' = 3.\ 9.11$	$42.10 = d\lambda'$.		

Voulons-nous $dv = 1500$,

0ˢ 14° 2′ 38″	11° 36′ 5″	0.84563	1500
0.12.36.45	11.56.31	0.83063	5000
0. 9.31.22	12.40. 4	0.80063	
$dL = 1.25.53$	$20.26 = d\lambda$		
$dL' = 3.\ 5.23$	$43.33 = d\lambda'$		

La seconde de ces trois hypothèses de dv par laquelle je commence pour épargner un calcul, donne $T' - T = 21\,9348$ beaucoup trop faible; la première donnerait moins encore, il est inutile de l'essayer. La troisième donne $T' - T = 21.9473$ trop faible encore.

112. Je pourrais augmenter encore dv, mais je puis approcher du but d'une autre manière. A la première ligne du tableau D (11), substituons la seconde qui donnera un rayon plus fort, et conservons $dv = 1500$. Cherchons dans les deux tableaux suivans, nous aurons $T' - T = 2.967$ qui est un peu moins inexact.

Passons de même à la quatrième ligne, nous aurons, en conservant dv,

	L	λ	v	dv
11	0ˢ13°32′38″	11°31′17″	0.85962	4500
14	0. 9. 3.57	12.33.25	0.81462	

$dL = 4.28.41 \qquad 1.\ 2.\ 8 = d\lambda$

Nous trouverons enfin $T' - T = 3.00122$ un peu trop fort, mais dont nous nous contenterons; nous aurons ainsi

h	p	Π	Ω	I
0.569415	71.76095	10ˢ1° 6′ 7″	1ˢ22°44′14″	17°52′40″

Cette nouvelle parabole diffère sensiblement des précédentes, ainsi que nous l'avions prévu. Nous avions ci-dessus, par un milieu,

	0.605253	71.571	10ˢ4°54′26″	1ˢ23°13′55″	17°31′ 1″
milieu	0.58733	71.666	10.3. 0.16	1.22.59. 5	17.41.50.

Tableaux des Hypothèses.

21 JANVIER.					22 JANVIER.				
x	L	λ	v	ρ	x	L	λ	v	ρ
0	2ˢ23°44′4″	3°30′36″B	0.77904	0.60383	0	2ˢ33°18′21″	3°45′33″B	0.76284	0.62333
1	2.22.44.4	3.35.18	0.77923	0.61740	1	2.22.18.21	3.52.29	0.76402	0.63664
10	2.13.44.4	4.14.21	0.79174	0.74094	10	2.13.18.21	4.29.51	0.77634	0.75773
11	2.12.44.4	4.18.19	0.79438	0.75595	11	2.12.18.21	4.33.51	0.77893	0.77149
20	2. 3.44.4	4.50.20	0.83045	0.88683	20	2. 3.18.21	5. 5.55	0.81434	0.90075
21	2. 2.44.4	4.53.27	0.83595	0.90232	21	2. 2.18.21	5. 9. 1	0.81973	0.91591
30	1.23.44.4	5.17.29	0.90172	1.05277	30	1.23.18.21	5.32.40	0.88425	1.06339
31	1.22.44.4	5.19.41	0.91109	1.07105	31	1.22.18.21	5.34.48	0.89343	1.08130
40	1.13.44.4	5.35. 1	1.01[illegible]	1.25630	40	1.13.18.21	5.49.22	1.00013	1.26289
41	1.12.44.4	5.36.13	1.03525	1.27977	41	1.12.18.21	5.50.27	1.01519	1.28590
50	1. 3.44.4	5.42.25	1.21673	1.53052	50	1. 3.18.21	5.55.30	1.19213	1.53158
51	1. 2.44.4	5.42.36	1.24175	1.56404	51	1. 2.18.21	5.55.32	1.21764	1.51457

x	L	λ	v	dv	r	ε
A (1)			**21 JANVIER.**			
48° 0′	1ˢ 5° 44′ 4″	5° 41′ 46″	1.16784	380	1.1621	1.4774
10	1. 5.34. 4	5.41.50	1.17164	383		
20	1. 5.24. 4	5.41.54	1.17547	386		
30	1. 5.14. 4	5 41.58	1.17933	390		
40	1. 5. 4. 4	5.42. 2	1.18323	393		
50	1. 4.54. 4	5.42. 5	1.18716	397		
49. 0	1. 4.44. 4	5.42. 8	1.19113		1.1852	1.4983
A (2)			**22 JANVIER.**			
48. 0	1. 5.18.21	5.55.27	1.14520	370	1.1391	1.4708
10	1. 5. 8.21	5.55.28	1.14890	372		
20	1. 4.58.21	5.55.29	1.15262	375		
30	1. 4.48.21	5.55.30	1.15637	378		
40	1. 4.38.21	5.55.31	1.16015	380		
50	1. 4.28.21	5.55.32	1.16395	383		
49. 0	1. 4.18.21	5.55.32	1.16778	385	1.1618	1.5008
10	1. 4. 8.21	5.55.31	1.17163	388		
20	1. 3.58.21	5.55.30	1.17551			
A (3)			**23 JANVIER.**			
48.30	1. 4.23.14	6. 8.57	1.13301	374		
40	1. 4.13.14	6. 8.58	1.13675	378		
50	1. 4. 3.14	6. 8.59	1.14053	381		
49. 0	1. 3.53.14	6. 8.59	1.14434	384	1.1378	1.5009
10	1. 3.43.14	6. 8.58	1.14818	387		
20	1. 3.33.14	6. 8.57	1.15205	390		
30	1. 3.23.14	6. 8.56	1.15595	393		
40	1. 3.13.14	6. 8.55	1.15988			
B (4)			**25 JANVIER.**			
49. 0	1. 3. 4.38	6.37.33	1.09545	367	1.08809	1.4999
10	1. 2.54.38	6.37.30	1.09912	370		
20	1. 2.44.38	6.37.27	1.10282	374		
30	1. 2.34.38	6.37.24	1.10656	378		
40	1. 2.24.38	6.37.21	1.11034	382		
50	1. 2.14.38	6.37.16	1.11416	385		
50. 0	1. 2. 4.38	6.37.12	1.11801	389	1.11056	1.5295
10	1. 1.54.38	6.37. 7	1.12190	393		
20	1. 1.44.38	6.37. 2	1.12583	396		
30	1. 1.34.38	6.36.57	1.12999			

x	L	λ	v	dv	r	ρ
B (5)			**27 JANVIER.**			
50°30′	1ˢ. 0°47′ 54″	7° 7′ 5″	1.07720	382	1.0689	1.5379
40	1. 0.37.54	7. 6.56	1.08102	385		
50	1. 0.27.54	7. 6.47	1.08487	388		
51. 0	1. 0.17.54	7. 6.38	1.08875	391	1.0804	1.5527
10	1. 0. 7.54	7. 6.29	1.09266	394		
20	0.29.57.54	7. 6.19	1.09660			
B (6)			**28 JANVIER.**			
51. 0	0.29.55.22	7.22.28	1.06148	382	1.0527	1.5477
10	0.29.45.22	7.22.16	1.06530	386		
20	0.29.35.22	7.22. 4	1.06916	390		
30	0.29.25.22	7.21.52	1.07306	394	1.0642	1.5624
40	0.29.15.23	7.21.39	1.07700	397		
50	0.29. 5.22	7.21.26	1.08097	401		
52. 0	0.28.55.22	7.21.13	1.08498	405	1.0764	1.5774
10	0.28.45.22	7.21. 0	1.08903	499		
20	0.28.35.22	7.20.47	1.09312			
B (7)			**31 JANVIER.**			
52.50	0.26.59.31	8.10.27	1.01722	398		
53. 0	0.26.49.31	8.10. 4	1.02120	400	1.0108	1.5831
10	0.26.39.31	8. 9.41	1.02520	402		
20	0.26.29.31	8. 9.18	1.02922	404		
30	0.26.19.31	8. 8.56	1.03326	406	1.0227	1.5979
40	0.26. 9.31	8. 8.32	1.03732	407		
50	0.25.59.31	8. 8. 9	1.04139	408		
54. 0	0.25.49.31	8. 7.46	1.04547	409	1.0350	1.6131
10	0.25.39.31	8. 7.23	1.04956			
C (8)			**1ᵉʳ FÉVRIER.**			
53. 0	0.26.28.11	8.28.33	0.99071	382	0.9799	1.5728
10	0.26.18.11	8.28. 6	0.99453	386		
20	0.26. 8.11	8.27.40	0.99839	390		
30	0.25.58.11	8.27.13	1.00239	394		
40	0.25.48.11	8.26.46	1.00623	398		
50	0.25.38.11	8.26.20	1.01021	403		
54. 0	0.25.28.11	8.25.54	1.01424	407	1.0033	1.6019
10	0.25.18.11	8.25.27	0.01831	410		
20	0.25. 8.11	8.25. 0	1.02241	415		
30	0.24.58.11	8.24.32	1.02656			

α	L	λ	v	dv	r	ρ
C (9)			**3 FÉVRIER.**			
54°30′	0ˢ24°16′ 9″	9° 3′ 7″	0.96190			
40	0.24. 6. 9	9. 2.32	0.96582	392		
50	0.24.56. 9	9. 1.57	0.96977	395		
55. 0	0.23.46. 9	9. 1.22	0.97376	399	0.9617	1.60902
10	0.23.36. 9	9. 0.46	0.97779	403		
20	0.23.26. 9	9. 0. 9	0.98186	407		
30	0.23.16. 9	8.59.33	0.98597	411		
40	0.23. 6. 9	8.58.56	0.99012	415		
50	0.22.56. 9	8.58.20	0.99431	419		
56. 0	0.22.46. 9	8.57.43	0.99854	423	0.9865	1.6355
C (10)			**4 FÉVRIER.**			
55. 0	0.23.25.26	9.22.11	0.94036		0.92781	1.5907
10	0.23.15.26	9.21.31	0.94425	389		
20	0.23. 5.26	9.20.51	0.94819	394		
30	0.22.55.26	9.20.11	0.95216	397		
40	0.22.45.26	9.19.31	0.95618	402		
50	0.22.55.26	9.18.51	0.96025	407		
56. 0	0.22.25.26	9.18.10	0.96436	411	0.95169	1.6196
10	0.22.15.26	9.17.29	0.96851	415		
20	0.22. 5.26	9.16.48	0.97271	420		
30	0.21.55.26	9.16. 8	0.97695	424		
D (11)			**11 FÉVRIER.**			
62. 0	0.14. 2.38	11.36. 5	0.84563		0.82837	1.6391
10	0.13.52.38	11.34.29	0.85020	457		
20	0.13.42.38	11.32.53	0.85483	463		
30	0.13.32.38	11.31.17	0.85962	469		
40	0.13.22.38	11.29.41	0.86428	476		
50	0.13.12.38	11.28. 5	0.86910	482		
63. 0	0.13. 2.38	11.26.28	0.87378	488	0.85651	1,6723
10	0.12.52.38	11.24.50	0.87893	495		
20	0.12.42.38	11.23.12	0.88394	501		
30	0.12.52.38	11.21.33	0.88901	507		
D (12)			**12 FÉVRIER.**			
63. 0	0.12.42.13	11.57.29	0.82809		0.81012	1.6384
10	0.12.32.13	11.55.42	0.83274	465		
20	0.12.22.13	11.53.55	0.83746	472		
30	0.12.12.13	11.52. 8	0.84225	479		
40	0.12. 2.13	11.50.20	0.84711	486		
50	0.11.52.13	11.48.32	0.85204	493		
64. 0	0.11.42.13	11.46.44	0.85703	499	0.83898	1.6706
10	0.11.32.13	11.44.55	0.86209	506		
20	0.11.22.13	11.43. 7	0.86721	512		
30	0.11.12.13	11.41.17	0.87240	519		

D (13)	14 FÉVRIER.					
x	L	λ	v	dv	r	ρ
65° 0'	0ˢ10° 1' 7"	12°46' 10	0.78611		0.76667	1.6288
10	0. 9.51. 7	12.43.57	0.79092	481		
20	0. 9.41. 7	12.41.44	0.79580	488		
30	0. 9.31. 7	12.39.31	0.80076	496		
40	0. 9.21. 7	12.37.17	0.80580	504		
50	0. 9.11. 7	12.35. 2	0.81091	511		
66. 0'	0. 9. 1. 7	12.32.46	0.81609	518	0.79660	1.6618
10	0. 8.51. 7	12.30.30	0.82135	526		
20	0. 8.41. 7	12.28.14	0.82669	534		
30	0. 8.31. 7	12.25.57	0.83209	540		

113. Il est évident que toutes les paraboles de l'article 112 sont plus ou moins défectueuses : ce que nous pouvons faire de mieux est de nous arrêter au résultat moyen, entre ceux où l'anomalie était au-dessous de 78°, et ceux qui la supposent au-dessous. Par d'autres essais que je supprime, j'avais eu

0.58568   71.667   10ˢ 3° 10' 20"   1ˢ 22° 59' 0"   17° 41' 50".

Je cherche, d'après ces derniers élémens, t', u, v, H — ☊, L — ☊, L et λ.

A la longitude héliocentrique sur l'écliptique L $=$ 1ˢ4° 49' 58"
je compare dans le premier tableau, la quantité la plus voisine.................................... $=$ 1.4.44. 4

Différence 5',9......................... 5.54

Je prends les parties proportionnelles pour λ et v, et pour cela, je multiplie par $\frac{5',9}{10'} = 0.59$, la différence de $\lambda = -3''$

Je trouve ainsi......................... $\lambda =$ 5° 42' 6"
Nos élémens provisoires ne donnent que... $\lambda =$ 5.40.36
l'excès du calcul est donc............ $= -$ 1.30.

Multipliant de même la différence — 0.00397 par 0.59, j'ai 0.00234
à retrancher du rayon vecteur.......................... 1.19113

pour avoir v.. 1.18879
nos élémens donnent v................................ 1.19176

Excès du calcul, ou dv.......... = + 0.00297

Ainsi nos élémens ne représentent pas exactement l'observation; le rayon vecteur qu'ils nous donnent est trop grand de 0.000297, et la la latitude trop faible de 1′ 30″.

114. Je fais des calculs semblables pour toutes les observations, et je forme ainsi le tableau suivant :

Jours.	L	λ	v	Excès $d\lambda$.	Excès dv.
Janvier 21	1ˢ 4°49′ 58″	5°40′ 36″	1.19176	— 1′ 30″	+ 297
22	1. 4. 5.57	5.53.46	1.17556	— 1.45	+ 300
23	1. 3.20.42	6. 7.15	1.16013	— 1.41	+ 319
25	1. 1.46.13	6.35.10	1.12829	— 1.53	+ 309
27	1. 0. 6. 7	7. 4.21	1.09659	— 2. 6	+ 323
28	0.29.13.46	7.19.27	1.08077	— 2.10	+ 317
31	0.26.26.45	8. 6.49	1.03347	— 2.22	+ 313
Février 1	0.25.27.27	8.23.19	1.01775	— 2.54	+ 320
3	0.23.24.22	8.57.25	0.98649	— 2.42	+ 359
4	0.22.17.37	9.15. 0	0.97095	— 2.38	+ 335
11	0.13.30.45	11.27.59	0.86446	— 2.58	+ 394
12	0.12. 4. 6	11.48.14	0.84972	— 2.27	+ 353
14	0. 9. 1.31	12.29.19	0.82074	— 3.15	+ 450

Une remarque facile est que tous les dv sont positifs et peu différens les uns des autres, et qu'on les diminuerait sensiblement en diminuant toutes les longitudes de 10′; car pour 10′ de moins, tous nos tableaux donnent de 360 à 560 à ajouter aux rayons vecteurs; ce serait trop, il suffira de retrancher 8′ du lieu du périhélie, qui deviendra 10ˢ 3° 2′ 20″ (113); les erreurs qui resteront seront fort petites.

115. Diminuer les longitudes de 8′, c'est augmenter d'autant l'argu-

ment de latitude, qui est ☊ — Π — u; ainsi, en corrigeant nos rayons vecteurs, nous augmenterons les latitudes qui étaient trop faibles de 2 à 3′.

Il est clair que 8′ de changement dans l'argument de latitude n'auront pas d'effet sensible sur la réduction à l'écliptique, et les longitudes sur l'écliptique diminueront de 8′, comme celles de l'orbite.

Pour prouver par le fait la justesse de ces remarques, je recommence les calculs, et je forme de la même manière le tableau suivant :

Jours.	L	λ	v	$d\lambda$	dv
Janvier 21	1ˢ 4°42′17″	5°42′55″	1.19156	+ 0′46″	— 20
22	1. 3.58.15	5.56. 3	1.17556	+ 0.33	— 5
23	1. 3.12.59	6. 9.33	1.16013	+ 0.37	+ 25
25	1. 1.38.30	6.37.26	1.12829	+ 0.27	+ 3
27	0.29.58.23	7. 6.36	1.09659	+ 0.16	+ 19
28	0.29. 6. 1	7.21.40	1.08077	+ 0.13	+ 0
31	0.26.18.58	8. 9. 0	1.03545	+ 0. 5	+ 21
Février 1	0.25.19.40	8.25.29	1.01775	— 0. 1	+ 5
3	0.23.15.11	8.59.31	0.98649	+ 0. 2	+ 11
4	0.22. 9.48	9.17. 4	0.97094	— 0. 3	+ 6
11	0.13.22.48	11.29.51	0.86446	+ 0. 9	+ 26
12	0.11.56. 9	11.49.56	0.84972	+ 0.28	— 40
14	0. 8.52.51	12.31.13	0.82072	+ 0.46	+ 29

116. On voit combien ces erreurs sont légères; nous allons prouver qu'elles seraient très-peu sensibles sur le lieu géocentrique. Sans ces petites erreurs, les L, les λ et les v calculés se trouveraient sur une même ligne dans le tableau du jour, et satisferaient par conséquent au lieu géocentrique.

Soit SC (fig. 71) le rayon vecteur de la comète selon le tableau, SCO celui des élémens; l'angle CTO $= \frac{Op}{Tp} = \frac{dv \sin C}{\rho \sin 1''} = \frac{dv \sin(S+T)}{\rho \sin 1''}$; dv ne va qu'une fois à 0.00040, et il pourrait même s'y trouver une faute de calcul. Ce jour là, $\rho = 1{,}65$ et $\frac{0.00040 \sin 26^\circ 33'}{1{,}65 \sin 1''} = 21'',4$.

D'ailleurs

D'ailleurs

$$v \sin\lambda = \rho \tang g, \quad v d\lambda \cos\lambda = \frac{\rho dg}{\cos^2 g}, \quad d\lambda = \frac{\rho dg}{v \cos\lambda \cos^2 g}$$

et

$$dg = \frac{v \cos\lambda \cos^2 g d\lambda}{\rho} = \left(\frac{v}{\rho}\right) d\lambda;$$

il en résulte que les erreurs ne seront guères que les deux tiers des erreurs héliocentriques, c'est-à-dire qu'il n'y en aura que deux qui puissent aller à 30″.

Ces erreurs peuvent se négliger; nous en conclurons que notre orbite en diminuant Π de 8′, est aussi précise qu'il est possible de l'espérer.

On peut donc satisfaire aux observations avec une parabole qui n'est pas la véritable orbite, du moins quand l'arc parcouru n'est pas plus considérable; il n'est guère ici que de 26 à 27°. Remarquons en outre que l'ellipse de la comète de 1759 est probablement la moins alongée, et par conséquent celle des orbites cométaires qui doit le moins se confondre avec la parabole.

117. Nous sommes arrivés par un changement bien simple à représenter nos observations d'une manière suffisante; on ne trouvera pas toujours d'aussi grandes facilités. Voici une méthode plus générale.

Soient L, λ, v la longitude, la latitude et le rayon vecteur calculés sur les élémens provisoires,

$L + dL$, $\lambda + d\lambda$, $v + dv$ les quantités véritables;

L, Λ et V les quantités prises sur une même ligne dans le tableau des hypothèses.

Si nous entrons dans le tableau avec $L+dL$, nous trouverons sur la même ligne $\Lambda + \frac{ndL}{600''}$ et $V + \frac{mdL}{600''}$, m et n sont les variations de v et de λ dans le tableau, pour un changement de 10′ = 600″ dans la longitude.

dL est inconnu; mais nous savons que

$$\Lambda + \frac{ndL}{600''} = \lambda + d\lambda \quad \text{et} \quad V + \frac{mdL}{600''} = v + dv;$$

car si nous supposons que $L+dL$ soit la véritable longitude, $\Lambda + \frac{ndL}{600''}$ et $V + \frac{mdL}{600''}$ qui sont sur la même ligne, sont aussi les quantités vé-

ritables. Nous aurons donc

$$d\lambda = (\Lambda - \lambda) + \frac{ndL}{600''}, \quad d\nu = (V - \nu) + \frac{mdL}{600''};$$

$d\nu$ sera exprimé en parties de l'unité, car $\frac{dL}{600''}$ étant un nombre de secondes divisé par un autre nombre de secondes, n'est plus qu'un nombre abstrait; m est en parties de l'unité; donc $\left(\frac{mdL}{600''}\right)$ sera, comme $(V-\nu)$, exprimé en parties de l'unité, si dL est un nombre de secondes. n, au contraire, est un nombre de secondes, $\left(\frac{n}{600''}\right) dL$ sera un nombre de secondes, comme $(\Lambda - \lambda)$ et dL; ainsi, pour l'homogénéité, dL doit être un nombre de secondes.

118. Or, soit L la longitude sur l'écliptique, H la longitude hélioc. sur l'orbite, ρ la réduction à l'écliptique, $H - \rho = L = \Pi + u - \rho$, en supposant la comète directe et u positif, c'est-à-dire après le passage au périhélie,

$$L = \Pi + u - \rho = \Pi + u - \frac{\text{tang}^2 \frac{1}{2} I \sin 2(H - \Omega)}{\sin 1''} + \text{etc.}$$

$$\begin{aligned}
dL &= d\Pi + du - \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} I \cos 2(H - \Omega)\, d(H - \Omega) \\
&\quad - \left(\frac{\text{tang} \frac{1}{2} I dI}{\cos^2 \frac{1}{2} I}\right) \sin 2(H - \Omega) \\
&= d\Pi + du - \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} I \cos 2(\Pi + u - \Omega)(d\Pi + du - d\Omega) \\
&\qquad - \left(\frac{\text{tang} \frac{1}{2} I}{\cos^2 \frac{1}{2} I}\right) \sin 2(\Pi + u - \Omega)\, dI \\
&= (d\Pi + du)\left[1 - \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} I \cos 2(\Pi + u - \Omega)\right] \\
&\quad + \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} I \cos 2(\Pi + u - \Omega)\, d\Omega \\
&\quad - \text{tang} \tfrac{1}{2} I \,\text{séc}^2 \tfrac{1}{2} I \sin 2(\Pi + u - \Omega)\, dI. \\
&= (1 - \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} I \cos 2C)(d\Pi + du) + \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} I \cos 2C\, d\Omega \\
&\quad - \text{tang} \tfrac{1}{2} I \,\text{séc}^2 \tfrac{1}{2} I \sin 2C\, dI,
\end{aligned}$$

dL, $d\Pi$, du, dI, $d\Omega$ étant exprimés en secondes.

Si l'inclinaison n'est pas considérable, on pourra négliger dI et $d\Omega$

au moins dans un premier essai. Dans notre exemple,

$$\text{tang}^2 \tfrac{1}{2}\text{I} = 0.02415, \qquad \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\text{I}\,\text{séc}^2\tfrac{1}{2}\text{I} = 0.159.$$

119. $$v = h\,\text{séc}^2\tfrac{1}{2}u = h + h\,\text{tang}^2\tfrac{1}{2}u,$$

$$dv = dh + dh\,\text{tang}^2\tfrac{1}{2}u + \frac{h\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u\,du}{\cos^2\tfrac{1}{2}u} = \frac{dh}{\cos^2\tfrac{1}{2}u} + v\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u\,du\sin 1'';$$

car dv doit être en parties du rayon, et du qui naturellement est en secondes, doit être multiplié par sin 1″ pour l'avoir en parties du rayon.

Ainsi

$$dv = dh\,\text{séc}^2\tfrac{1}{2}u + v\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u\sin 1''du = (\text{V} - v) + \frac{m\,d\text{L}}{600''},$$

ou

$$0 = (\text{V} - v) + \left(\frac{m}{600''}\right)d\text{L} - v\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u\sin 1''du - dh\,\text{séc}^2\tfrac{1}{2}u$$

$$= (\text{V} - v) + \left(\frac{m}{600''}\right)d\Pi + \left(\frac{m}{600''}\right)du - v\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u\sin 1''du - dh\,\text{séc}^2\tfrac{1}{2}u$$

$$= (\text{V} - v) + \left(\frac{m}{600''}\right)d\Pi + \left(\frac{m}{600''} - v\,\text{tang}\tfrac{1}{2}u\sin 1''\right)du - dh\,\text{séc}^2\tfrac{1}{2}u.$$

120. $d\Pi$ et dh sont des constantes, du est une variable qu'il faut éliminer. Or

$$t = \text{C}h^{\frac{3}{2}}(\text{tang}^3\tfrac{1}{2}u + 3\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u),$$

$$dt = \tfrac{3}{2}\text{C}h^{\frac{1}{2}}dh\,(\text{tang}^3\tfrac{1}{2}u + 3\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u) + \text{C}h^{\frac{3}{2}}\left(\frac{3\,\text{tang}^2\tfrac{1}{2}u\,d\tfrac{1}{2}u}{\cos^2\tfrac{1}{2}u} + \frac{3d\tfrac{1}{2}u}{\cos^2\tfrac{1}{2}u}\right),$$

$$dt = \frac{\tfrac{3}{2}\text{C}h^{\frac{3}{2}}dh}{h}(\text{tang}^3\tfrac{1}{2}u + 3\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}u) + \frac{\tfrac{3}{2}\text{C}h^{\frac{3}{2}}du}{\cos^2\tfrac{1}{2}u}(1 + \text{tang}^2\tfrac{1}{2}u)$$

$$= \frac{\tfrac{3}{2}t\,dh}{h} + \frac{\tfrac{3}{2}\text{C}h^{\frac{3}{2}}du}{\cos^4\tfrac{1}{2}u} = \tfrac{3}{2}\left(\frac{t}{h}\right)dh + \frac{\tfrac{3}{2}\text{C}v^2du}{h^{\frac{1}{2}}}$$

donc $$\tfrac{3}{2}\cdot\left(\frac{\text{C}v^2}{h^{\frac{1}{2}}}\right)du = dt - \tfrac{3}{2}\left(\frac{t}{h}\right)dh,$$

$$du = \tfrac{2}{3}\left(\frac{h^{\frac{1}{2}}}{\text{C}v^2}\right)dt - \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\frac{h^{\frac{1}{2}}}{\text{C}v^2}\cdot\frac{t}{h}\,dh = \tfrac{2}{3}\left(\frac{h^{\frac{1}{2}}}{\text{C}}\right)\frac{dt}{v^2} - \frac{t}{\text{C}h^{\frac{1}{2}}v^2}dh.$$

Soit p le tems du passage, T celui de l'observation, $\mathrm{T}-p=t$ le tems écoulé depuis le périhélie, $dt=-dp$; ainsi

$$du=-\tfrac{2}{3}\cdot\frac{h^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{C}}\cdot\frac{dp}{v^{2}}-\frac{t}{\mathrm{C}h^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{dh}{v^{2}},$$

dp et C sont exprimés en jours et décimales, $\frac{dp}{\mathrm{C}}$ est un simple rapport; il en est de même de $\frac{t}{\mathrm{C}}$; v, h, dh sont en parties de l'unité; ainsi du est ici exprimé en parties du rayon : pour l'avoir en secondes, on fera

$$du=-\tfrac{2}{3}\cdot\frac{h^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{C}}\cdot\frac{dp}{v^{2}\sin 1''}-\frac{t}{\mathrm{C}h^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{dh}{v^{2}\sin 1''},$$

et par conséquent

121. $$0=(\mathrm{V}-v)+\left(\frac{m}{600''}\right)d\Pi$$
$$-\left(\frac{m}{600''}-v\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u\sin 1''\right)\left(\tfrac{2}{3}\cdot\frac{h^{\frac{1}{2}}dp}{\mathrm{C}v^{2}\sin 1''}+\frac{tdh}{\mathrm{C}h^{\frac{1}{2}}v^{2}\sin 1''}\right)$$
$$-dh\,\text{séc}^{2}\tfrac{1}{2}u$$
$$=(\mathrm{V}-v)+\left(\frac{m}{600''}\right)d\Pi+\left(v\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u-\frac{m}{600\sin 1''}\right)\left(\tfrac{2}{3}\cdot\frac{h^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{C}}\right)\frac{dp}{v^{2}}$$
$$+\left(v\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u-\frac{m}{600\sin 1''}\right)\frac{tdh}{\mathrm{C}h^{\frac{1}{2}}v^{2}}-dh\,\text{séc}^{2}\tfrac{1}{2}u,$$
$$=(\mathrm{V}-v)+\left(\frac{m}{610''}\right)d\Pi+\left(\frac{v\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u-\frac{m}{600''\sin 1''}}{v^{2}}\right)\left(\tfrac{2}{3}\cdot\frac{h^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{C}}\right)dp$$
$$+\left\{\left(\frac{v\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u-\frac{m}{600\sin 1''}}{v^{2}}\right)\frac{t}{\mathrm{C}h^{\frac{1}{2}}}-\text{séc}^{2}\tfrac{1}{2}u\right\}dh$$
$$=(\mathrm{V}-v)+ad\Pi+bcdp+(bd-\text{séc}^{2}\tfrac{1}{2}u)dh,$$

en faisant

$$a=\frac{m}{600''},\quad b=\left(\frac{v\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u-\frac{a}{\sin 1''}}{v^{2}}\right),\quad c=\left(\frac{2h^{\frac{1}{2}}}{3\mathrm{C}}\right),\quad d=\frac{t}{\mathrm{C}h^{\frac{1}{2}}}:$$

telle est la relation entre les corrections des trois élémens de la parabole.

$(\mathrm{V}-v)$ et dh sont en parties du rayon, dp en parties du jour, $d\Pi$

en secondes; t est positif après le passage au périhélie, négatif auparavant; il en est de même de u, qui est positif après le passage, et négatif avant le passage. $t = \mathrm{C}(\tang^3 \tfrac{1}{2} u + 3 \tang \tfrac{1}{2} u)$ prouve que t et u sont de même signe.

122. Si l'on veut tenir compte de l'erreur de la réduction à l'écliptique, il faut (118) multiplier par $(1 - \tang^2 \tfrac{1}{2} \mathrm{I} \cos 2\mathrm{C})$ les termes a, b, ajouter les termes

$$a \tang^2 \tfrac{1}{2} \mathrm{I} \cos 2\mathrm{C} d\Omega - a \tang \tfrac{1}{2} \mathrm{I} \operatorname{séc}^2 \tfrac{1}{2} \mathrm{I} \sin 2\mathrm{C} d\mathrm{I};$$

$d\Omega$ et $d\mathrm{I}$ étant exprimés en secondes.

123. $$\operatorname{Tang} \lambda = \tang \mathrm{I} \sin(\mathrm{H} - \Omega),$$

$$d\lambda = \frac{d\mathrm{I}\cos^2\lambda}{\cos^2\mathrm{I}} \sin(\mathrm{H} - \Omega) + \tang \mathrm{I} \cos(\mathrm{H} - \Omega)(d\mathrm{H} - d\Omega)\cos^2\lambda,$$

$$d\lambda = \left(\frac{\cos^2\lambda}{\cos^2\mathrm{I}}\right)\sin(\mathrm{H} - \Omega)d\mathrm{I} + \tang \mathrm{I}\cos^2\lambda\cos(\mathrm{H} - \Omega)(d\Pi + du - d\Omega)$$

$$= \left(\frac{\cos^2\lambda}{\cos^2\mathrm{I}}\right)\sin(\mathrm{H} - \Omega)d\mathrm{I} + \tang \mathrm{I}\cos^2\lambda\cos(\mathrm{H} - \Omega)(d\Pi - d\Omega) + \tang \mathrm{I}\cos^2\lambda\cos(\mathrm{H} - \Omega)du,$$

$$d\lambda = (\Lambda - \lambda) + \frac{n\,d\mathrm{L}}{600''} = \left(\frac{\cos^2\lambda}{\cos^2\mathrm{I}}\right)\sin(\mathrm{H} - \Omega)d\mathrm{I} + \tang \mathrm{I}\cos^2\lambda\cos(\mathrm{H} - \Omega)d\Pi - \tang \mathrm{I}\cos^2\lambda\cos(\mathrm{H} - \Omega)d\Omega + \tang \mathrm{I}\cos^2\lambda\cos(\mathrm{H} - \Omega)du,$$

$$0 = (\Lambda - \lambda) + \frac{n\,d\mathrm{L}}{600''} - \left(\frac{\cos^2\lambda}{\cos^2\mathrm{I}}\right)\sin(\mathrm{H} - \Omega)d\mathrm{I} - \tang \mathrm{I}\cos^2\lambda\cos(\mathrm{H} - \Omega)d\Pi + \tang \mathrm{I}\cos^2\lambda\cos(\mathrm{H} - \Omega)d\Omega - \tang \mathrm{I}\cos^2\lambda\cos(\mathrm{H} - \Omega)du,$$

$$0 = (\Lambda - \lambda) + \frac{n}{600''}(d\Pi + du) - \left(\frac{\cos^2\lambda}{\cos^2\mathrm{I}}\right)\sin(\mathrm{H} - \Omega)d\mathrm{I} - \tang \mathrm{I}\cos^2\lambda\cos(\mathrm{H} - \Omega)d\Pi + \tang \mathrm{I}\cos^2\lambda\cos(\mathrm{H} - \Omega)d\Omega - \tang \mathrm{I}\cos^2\lambda\cos(\mathrm{H} - \Omega)du,$$

$$0 = (\Lambda - \lambda) + \left(\frac{n}{600''} - \tang \mathrm{I}\cos^2\lambda\cos(\mathrm{H} - \Omega)\right)d\Pi + \left(\frac{n}{600''} - \tang \mathrm{I}\cos^2\lambda\cos(\mathrm{H} - \Omega)\right)du - \left(\frac{\cos^2\lambda}{\cos^2\mathrm{I}}\right)\sin(\mathrm{H} - \Omega)d\mathrm{I} + \tang \mathrm{I}\cos^2\lambda\cos(\mathrm{H} - \Omega)d\Omega,$$

$$0 = (\Lambda - \lambda) + \left(\frac{n}{600''} - \tang \mathrm{I}\cos^2\lambda\cos(\mathrm{H} - \Omega)\right)(d\Pi + du) - \left(\frac{\cos^2\lambda}{\cos^2\mathrm{I}}\right)\sin(\mathrm{H} - \Omega)d\mathrm{I} + \tang \mathrm{I}\cos^2\lambda\cos(\mathrm{H} - \Omega)d\Omega.$$

124. Il n'y a plus véritablement que deux inconnues dI et $d\Omega$; il suffirait de deux observations bien choisies, mais on en peut employer un nombre indéfini. Il en faut trois au moins pour corriger les élémens de la longitude.

On peut ici sans scrupule négliger la petite erreur de la réduction.

On voit comment on pourrait corriger les élémens par la totalité des observations, si le problème en valait la peine ; mais on pourra n'y employer qu'un nombre borné d'observations, en les choisissant parmi celles qui donnent les erreurs les plus grandes en plus ou en moins et les erreurs moyennes. On corrigerait ainsi les plus grands écarts, sans porter l'erreur sur les observations mieux représentées ; on aurait des élémens d'une exactitude plus que suffisante pour reconnaître la comète, soit à ses apparitions déjà observées, soit à ses différens retours ; supposé pourtant que la comète n'ait pas été dans le cas d'éprouver, dans l'intervalle, des perturbations capables de la rendre méconnaissable ; ce dont il est difficile de répondre.

125. Puisque nous sommes parvenus à représenter très-passablement par une parabole une comète dont le demi-grand axe n'était pourtant que de 18, à plus forte raison pourrions-nous la représenter par des ellipses de 20, 30, 40, 50, 100 parties.

Il est bien inutile d'essayer de trop grands demi-axes, l'ellipse approcherait assez de la parabole pour qu'il fût impossible de la distinguer. En effet, dans l'expression elliptique de $T' - T$, le terme le plus fort après le premier n'est que de $\frac{7^l.26654}{a}\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^5 \sin\frac{1}{2}\omega$, qui pour $a = 100$, devient $0.0726654\left(\frac{v^{\frac{1}{2}}}{\sin z}\right)^5 \sin\frac{1}{2}\omega$; v diffère peu de l'unité, et z de 45°, $\sin\frac{1}{2}\omega$ est une petite fraction ; on voit donc que ce terme est alors insensible, et que l'ellipse est indéterminée.

126. Nous avons vu que la comète avait passé à son nœud ascendant long-tems avant d'arriver à son périhélie ; car le nœud étant en 1ˢ 23°, et le périhélie en 10ˢ 3°, il a fallu que la comète rétrogradât de 3ˢ 20° avant d'arriver à son périhélie : aussi, dès les premiers jours de l'apparition, nous avons remarqué que la latitude était boréale et croissante. Dans quelque sens que le mouvement soit dirigé, le nœud ascendant, celui d'où se compte l'argument de latitude est le point où la latitude

va devenir boréale, et l'on a sin λ = sin I sin distance à ce nœud comptée sur l'orbite. La latitude est boréale tant que cette distance est moindre que de 180°.

De cette manière, l'inclinaison est toujours un angle moindre que de 90°. Soit C la distance au nœud, cos I tang C = tang distance au nœud sur l'écliptique. Cette nouvelle distance s'ajoute au lieu du nœud, pour avoir la longitude sur l'écliptique si la comète est directe, et se retranche si elle est rétrograde.

Il en est, à cet égard, de l'anomalie comme de la distance au nœud, elle s'ajoute au périhélie après le passage, et se retranche avant, si la comète est directe. C'est le contraire si elle est rétrograde.

Il y aurait un autre moyen de considérer la chose, ce serait celui de regarder le mouvement de la comète comme direct, au moins dans l'orbite; mais l'inclinaison pourrait alors avoir toutes les valeurs possibles, depuis 0° jusqu'à 180°.

Quand l'inclinaison serait moindre que de 90°, cos I serait positif; la formule tang (L — ☊) = cos I tang (H — ☊) donnerait le mouvement en longitude, positif ou direct comme le mouvement sur l'orbite : si l'inclinaison était de 90°, cosinus I serait 0, et tang (L — ☊) = 0; la longitude héliocentrique sur l'écliptique serait toujours égale à la longitude du nœud; tout le mouvement se ferait dans un cercle de latitude. La latitude serait égale à son argument.

Si l'inclinaison passait 90°, cos I serait négatif; la comète avançant dans son orbite, rétrograderait sur l'écliptique.

La formule sin λ = sin I sin (H — ☊) donnerait toujours une latitude boréale, quand sin (H — ☊) serait une quantité positive; au lieu que pour une comète rétrograde, pour satisfaire à la règle des signes, il faut faire sin λ = sin I sin (☊ — H).

Au reste, tout cela revient au même, pourvu que l'on s'entende, et je ne vois aucune raison bien importante pour changer la méthode reçue par les astronomes, qui distinguent les comètes en directes et rétrogrades, avec une inclinaison toujours au-dessous de 90°.

127. A mesure que l'inclinaison approche plus de 90°, le mouvement sur l'écliptique devient plus inégal, par les variations rapides de la réduction qui est exprimée par la formule

$$\text{tang}^2 \tfrac{1}{2} I \frac{\sin 2 (L - ☊)}{\sin 1''} - \text{tang}^4 \tfrac{1}{2} I \frac{\sin 4 (L - ☊)}{\sin 2''} + \text{etc.}$$

Le mouvement en longitude sur l'écliptique peut être fort lent dans l'intervalle des observations qu'on emploie à déterminer l'orbite ; mais il n'en résulte aucun changement essentiel dans la méthode. Pour réduire les dL au mouvement sur l'orbite, il suffira d'employer la seconde des deux formules que nous avons données (94).

Pour soumettre la méthode à l'épreuve dans ces occasions extraordinaires où l'inclinaison est très-grande, on peut conserver les élémens de notre ellipse, à la réserve de l'inclinaison, conserver les rayons vecteurs et les longitudes dans l'orbite, calculer les λ et les lieux géocentriques avec une très-forte inclinaison, et se servir de ces nouveaux lieux pour retrouver l'ellipse ou la parabole.

On pourra de même changer la position de la terre, rendre la comète stationnaire; on pourra changer le passage au périhélie ou les anomalies, donner au rayon vecteur une valeur qui soit deux ou trois fois celle du rayon vecteur de la terre, supposer la comète au périhélie et à peu près stationnaire, on peut la supposer périhélie et en conjonction inférieure, enfin varier les données à volonté pour éprouver la méthode dans tous les cas possibles. L'espace nous empêche de donner des exemples de tous ces calculs, et nous allons suivre la comète dans l'autre branche de sa courbe, après le passage au périhélie, et nous y trouverons un tems où le mouvement géocentrique a été presque nul; et le changement des circonstances pourra nous fournir quelques remarques nouvelles.

128. Nous avons trouvé que la distance du nœud au périhélie était de 3ˢ 19° 56′ 40″, celle du périhélie au nœud descendant ne sera que de 2ˢ 10° 3′ 20″; il faudrait 67 jours à la comète de 109 pour parcourir cet arc; il n'en faudra que 29 à notre comète : elle a donc dû se trouver dans son nœud descendant, le 10 ou le 11 avril. En effet, dès le 13, elle avait déjà 2° 8′ de latitude australe. Elle avait été revue le 31 mars; elle fut observée ce même jour, ainsi que les 1, 5, 6, 7, 13, 14 et 15 avril.

Nous pourrions nous prévaloir de nos élémens approximatifs pour renfermer dans des limites plus étroites les suppositions que nous ferons sur les x; mais nous nous mettrons dans la position où se seraient trouvés les astronomes qui n'avaient aucune connaissance des observations de Messier, s'ils eussent alors aperçu la comète que, pour la plupart, ils n'ont vue que dans la troisième apparition. Nous la traiterons comme si elle nous était entièrement inconnue.

129.

129. Soit donc pour le 31 mars,

$$\odot = 0^s\,11^\circ\ 6'\,32'' \qquad \log V\ldots\ 0.0001880,$$
$$G = 10.27.20.30 \qquad g = 4^\circ\,19'\,57''\,B$$
$$T = -\ \ 1.13.46.02.$$

Si $x = 0$, nous aurons

$$L = 7^s\,27^\circ\,20'\,30'' = G - 3^s, \qquad V\cos T = 0.69203:$$

c'est la plus courte distance accourcie que l'on puisse supposer; elle sera plus grande, si nous faisons x additive à la longitude $7^s\,27^\circ$; elle sera moindre, si nous faisons x négative.

Je forme donc dans le tableau suivant la colonne L, en faisant $L = 7^s\,27^\circ\,20'\,30'' \pm x$; je calcule , ν, λ, r et ρ, comme ci-dessus, avec $(T - x)$, qui devient $(T + x)$; je m'arrête d'une part à $x = +23^\circ$, qui me donne $\rho = 1.01622$, et de l'autre à $x = -3^\circ$, qui donne $\rho = 0.68728$, sauf à continuer, si cela devient nécessaire.

Quand on a calculé avec x positif, il y a peu de chose à changer pour x négatif; les λ et les ν changeront un peu, les ρ se déduiront des premiers d'une manière fort aisée; car les ρ pour $-x$, o et $+x$ sont en progression arithmétique; en conséquence, nommant ρ la distance pour $x = 0$, $\rho_{\prime}$ la distance pour $-x$, et ρ' la distance pour $+x$, on aura $\rho_{\prime} = 2\rho - \rho'$; ainsi nous aurons

$$\text{pour } x = \quad 0^\circ\ldots\ \rho = 0.72247$$
$$2\rho = 1.44494$$
$$\text{pour } x = +1^\circ\ldots\ \rho' = 0.73455$$
$$\text{pour } x = -1^\circ\ldots\ \rho_{\prime} = 0.71039$$
$$2\rho = 1.44494$$
$$\text{pour } x = +2^\circ\ldots\ \rho' = 0.74663$$
$$\text{pour } x = -2^\circ\ldots\ \rho_{\prime} = 0.69831$$

et ainsi de tous les autres.

Hypothèses du premier jour ou du 31 mars.

x	L $\binom{31 \text{ mars}}{90}$	λ	v	dv	ρ
— 3	7ˢ 24° 20′ 30″	4° 17′ 25″	0.69493		0.68728
— 2	7.25	4.22. 8	0.69447	46	0.69831
— 1	7.26	4.26.47	0.69423	24	0.71039
— 0	7.27	4.31.20	0.69419	4	0.72247
+ 1	7.28	4.35.49	0.69437	18	0.73455
2	7.29	4.40.12	0.69476	39	0.74663
3	8. 0	4.44.30	0.69536	60	0.75874
10	8. 7	5.12. 8	0.70561	1025	0.84449
11	8. 8	5.15.45	0.70797	236	0.85699
12	8. 9	5.19.11	0.71056	259	0.86956
13	8.10	5 22.22	0.71307	251	0.88224
14	8.11	5.25.32	0.71554	247	0.83504
20	8.17	5.43.29	0.74013	2409	0.97435
21	8.18	5.46. 0	0.74503	490	0.98811
22	8.19	5.48.28	0.75023	520	1.00207
23	8.20.20.30	5.50.50	0.75573	550	1.01622

On pourrait remplir les vides par une interpolation très-facile, et qui serait encore plus exacte qu'il ne faut pour les premières tentatives.

Il résulte déjà de ce tableau que v surpasse 0,7 presque infailliblement, qu'il passe au moins 0.694; il y a toute apparence qu'il ne passe pas 0,8. Voilà tout ce qu'on peut faire avec une seule observation.

130. Le lendemain premier avril, M. Messier observa encore la comète; nous avons

$\odot = 0^s\ 12^\circ\ 5'\ 36''$, $G = 10^s\ 26^\circ\ 58'\ 29''$ $g = 4^\circ\ 4'\ 42''$, $\log V = 0.0003120$.

Je forme un tableau pareil au précédent; ces deux tableaux demandent chacun une page des calculs les plus simples et qui n'exigent aucune attention. On a le tems de les faire en attendant la troisième observation, surtout quand elle tarde, comme il est arrivé cette fois, car la comète n'a été vue que le 5.

Hypothèses du second jour ou du premier avril.

x	L $\binom{1^{\text{er}}\text{ avril}}{91}$	λ	v	dv	ρ
— 3	7ˢ 23° 58′ 29″	3° 50′ 36″	0.71162		0.66900
— 2	7.24	3.55. 2	0.71114	— 48	0.68137
— 1	7.25	3.59.25	0.71088	— 26	0.69377
— 0	7.26	4. 3.42	0.71083	— 05	0.70615
+ 1	7.27	4. 7.55	0.71100	+ 17	0.71853
2	7.28	4.12. 4	0.71139	+ 39	0.73093
3	7.29	4.16. 8	0.71199	+ 60	0.74330
10	8. 6	4.42.20	0.72242	1063	0.83118
11	8. 7	4.45.46	0.72482	240	0.84378
12	8. 8	4.49. 4	0.72746	264	0.85687
13	8. 9	4.52.17	0.73033	287	0.86945
14	8.10	4.55.25	0.73343	310	0.88152
20	8.16	5.12.22	0.75768	2735	0.96423
21	8.17	5.14.52	0.76269	501	0.97834
22	8.18	5.17.16	0.76800	531	0.99261
23	8.19.58.29	5.19.36	0.77362	562	1.00713

131. Il suffit de jeter les yeux sur ces deux tableaux pour juger que les v vont en augmentant, et que la comète a passé au périhélie, que les v sont entre 0,7 et 0,8 très-probablement; que les λ diminuent, et que la comète s'approche du nœud descendant.

Elle paraît s'approcher aussi de la terre, mais cette dernière conjecture n'est pas aussi certaine; la longitude géocentrique est décroissante de 22′ 1″.

La formule $du = \frac{1^\circ\, 23'\, 37'',9\, h^{\frac{1}{2}}}{vv}$, en supposant $v = 0,71$, nous donne les quantités ci-jointes, selon les suppositions diverses que nous pouvons faire pour h, en commençant par 0,7 qui serait le *maximum*, et finissant par 0,3 qui est peu probable. Or cette distance est probablement plus petite que 0,7; nous rejeterons $du = 2^\circ\, 18'\, 48''$, et l'autre extrême $du = 1^\circ 30' 52''$. Le milieu entre ces deux limites est $du = 1^\circ 54'$.

Or, si la comète avançait de 1° 54′ en longitude, tandis que le soleil

avance de 59', il serait difficile qu'il en résultât un mouvement géocentrique rétrograde de 22', lorsque l'élongation est de 43° 46' 2" et 45° 7' 7", c'est-à-dire croissante de 1° 21' 5".

h	du
0.7	2° 18' 40"
0.6	2. 8.30
0.5	1.57.18
0.4	1.44.56
0.3	1.30.52

Nous avons (XXVIII. 2)

$$dT = \frac{\left(\frac{v}{V}\right)\cos T\cos(S+T)\,dS}{1-\left(\frac{v}{V}\right)\cos S},$$

ou

$$dS = \frac{dT\left[1-\left(\frac{v}{V}\right)\cos S\right]}{\left(\frac{v}{V}\right)\cos T\cos(S+T)} = \frac{1^\circ\,21'\,5''\left[1-\left(\frac{v}{V}\right)\cos S\right]}{\left(\frac{v}{V}\right)\cos T\cos(S+T)}.$$

Or $\left(\frac{v}{V}\right) < 1$, à plus forte raison $\left(\frac{v}{V}\right)\cos S$; donc le numérateur est nécessairement positif. Cos T est positif, donc dS est de même signe que $\cos(S+T)$; et comme T est de 45°, et que ρ est plus grand que v, S doit être plus grand que l'angle à la comète : mais $S+C = 180° - T = 135°$; donc $S > C$ et $S > 68°$, donc $S+T > 90°$, donc $\cos(S+T)$ est négatif, donc dS est négatif, donc la comète est rétrograde; $dL > d\odot$ et $dS = dL - d\odot$ doit avoir le même signe que dL.

132. Ainsi nous savons déjà le second jour que la comète est rétrograde, qu'elle a passé au périhélie, qu'elle marche vers son nœud descendant, que la distance périhélie n'est pas de 0,7; mais (107)

$$dv = \frac{\sin 1^\circ\,23'\,38''\sin\frac{1}{2}u\cos\frac{1}{2}u}{h^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sin 1^\circ\,23'\,38''\sin\frac{1}{2}u}{v^{\frac{1}{2}}}$$
$$= 0.028866\sin\tfrac{1}{2}u;$$

et si u ne passe pas 60°, $dv < 0.014433$; or il est bien probable, avec

un rayon vecteur = 0,7, que l'anomalie n'est pas de 60°. Ainsi, pour former nos hypothèses, il faudra que dv ne passe pas 0,013, 0.014, et que dL soit de 1° 50′ à 2°.

Je prends dans les deux tableaux les quantités suivantes,

	L	λ	ν	ρ
31 mars... $x =$ 1° 30′	7ˢ 28° 50′ 30″	4.58. 0	0.69456	0.74059
1ᵉʳ avril.. $x' =$ 0. 0	7.26.58.29	4. 3.42	0.71083	0.70616
dL.....	1.52. 1	—34.18	0.01627 = dv.	
31 mars... $x =$ 11° 30′	8. 8.50.30	5.17.27	0.70926	0.86328
$x' =$ 10	8. 6.58.29	4.42.20	0.72242	0.83118
$dL =$	1.52. 1	— 35. 7	1316 = dv.	
31 mars... $x =$ 21° 30′	8.18.50.30	5.47.14	0.74763	0.99509
$x' =$ 20. 0	8.16.58.29	5.15.22	0.75768	0.96423
$dL =$	— 1.52. 1	—34.52	+ 1005 = dv.	

133. Dans toutes ces suppositions, la comète se rapproche de la terre.

De ces trois hypothèses, la première est la moins vraisemblable ; en effet, elle donnerait T′ — T = 1.10655. La seconde donne T′ — T = 0.96357 moins défectueuse ; la troisième, T′ — T = 0.98057 dans la parabole ; l'ellipse probablement donnerait T′ — T = 1 à peu près.

134. Augmentons le mouvement de 10′.

31 mars... $x =$ 11° 40′	8ˢ 9° 0′ 30″	5° 18′ 2″	0.70970
1ᵉʳ avril... $x' =$ 10	8. 6.58.29	4.42.20	0.72242
$dL =$	— 2. 2. 1	—35.42	+ 1272 = dv.
31 mars... $x =$ 21° 40′	8.19. 0.30	5.47.40	0.74850
$x' =$ 20. 0	8.16.58.29	5.12.22	0.75768
$dL =$	— 2 2. 1	—35.18	+ 918 = dv.

La première de ces deux nouvelles hypothèses donne T′—T = 1.02665; il suffirait de diminuer un peu dL et dv, pour arriver juste et trouver une parabole qui s'ajusterait à ces deux observations. On en trouverait bien d'autres en faisant de nouvelles suppositions pour x.

Nous n'avons encore que des conjectures, mais elles ont une grande vraisemblance, et elles différeront peu de la vérité. Dans le fait, notre ellipse donne

$$L = 8^s\ 11^\circ\ 4'\ 2'',\quad L' = 8^s\ 9^\circ\ 7'\ 14'',\quad v = 0.71236,\quad v' = 0.72531,$$
$$dv = 1295 \quad \text{et} \quad dL = -\ 1^\circ\ 56'\ 58''.$$

Nous sommes donc arrivés assez près, par des raisonnemens fort simples, et par des calculs faciles, qui laissent peu de chose à faire pour le jour où viendra la troisième observation.

135. L'observation suivante est du 5; l'intervalle est de quatre jours pendant lesquels notre rayon vecteur qui, le premier avril était de 0.72242, aura dû croître de $4 \times 0.01272 = 0.05088$; ainsi, le 5, le rayon vecteur a dû être 0.772 au moins : nous rejeterons les hypothèses qui le feraient moindre.

$$\text{Le } 5 \ldots\ldots \odot = 0^s\ 16^\circ\ 1'\ 52'' \qquad V = 0.0008020$$
$$G = 10.25.25.12 \qquad g = 2^\circ\ 48'\ 43''.$$
$$T = -\ 1.20.36.20.$$

Je forme en conséquence le tableau suivant,

x	L $\left(\begin{smallmatrix}5 \text{ avril}\\ 95\end{smallmatrix}\right)$	λ	v	dv	ρ
0	$7^s\ 25^\circ\ 25'\ 12''$	$2^\circ\ 18'\ 36''$	0.77485		0.63583
1	7.26	2.21.31	0.77500	15	0.64935
2	7.27	2.24.24	0.77538	38	0.66287
3	7.28	2.27.14	0.77599	61	0.67641
4	7.29	2.30. 1	0.77685	86	0.68997
5	8. 0	2.32.45	0.77795	110	0.70357
6	8. 1	2.35.27	0.77928	133	0.71721
7	8. 2	2.38. 6	0.78086	158	0.73089
8	8. 3.25.12	2.40.42	0.78268	182	0.74464

136. $x = 0$ me montre d'abord que la plus petite valeur possible de v est 0.77485, et qu'ainsi les v du 31 mars et du premier avril sont trop faibles, ce qui est véritable.

Quand x est de peu de degrés, les différences pour v sont peu de chose d'un degré à l'autre; on est obligé de calculer un plus grand nombre d'hypothèses, mais l'interpolation de 10 en 10 minutes devient inutile, ce qui fait compensation.

137. En quatre jours d'intervalle sans observations, la distance angulaire au périhélie a dû augmenter de 8° environ, car la marche de la comète se ralentit : les différences des rayons vecteurs vont au contraire en augmentant; elles doivent être de 0.013 par jour, ou 0.054 pour quatre jours; ainsi le rayon vecteur doit être de 0.778. J'ai poussé les calculs jusqu'à 0.78268; nous devons donc croire que les valeurs véritables sont entre celles qui composent le tableau.

D'après ces raisonnemens, je prends dans mon dernier calcul les valeurs pour $x = 10°$; et faisant $x = 4°$ le 5 avril, j'ai les quantités suivantes,

	L.	λ	v
1ᵉʳ avril.... $x = 10°$	8ˢ 6° 58′ 29″	4° 42′ 20″	0.72242
5 avril.... $x' = 4$	7.29.25.13	2.30. 1	0.77685
$dL =$	7.35.16	2.12.19	+ 5443

elles me donnent $du = 7° 52' 20''$ et $T' - T = 4^j.0109$. On voit donc qu'en conservant $x = 10°$, il suffira d'un changement très-léger dans les x du 31 mars et du 5 avril, pour trouver une parabole qui satisfasse à ces trois observations; on pourrait même négliger les erreurs légères de $T' - T$, et avoir une parabole assez approchée; et je suis persuadé qu'un grand nombre d'orbites n'ont pas été déterminées d'une manière plus rigoureuse.

On voit encore qu'en peu d'instans, le jour de la troisième observation on connaît à peu près l'orbite; au lieu que dans les autres méthodes, il faut attendre au moins trois observations pour commencer les calculs. Ainsi, par notre méthode, on aurait moins de calculs à faire; ils seraient du moins bien plus faciles et plus expéditifs, et l'on aurait l'avantage d'être le premier à connaître la comète, et à en apercevoir l'identité avec une comète déjà observée. Ces divers avantages me paraissent décisifs pour un astronome.

138. Le lendemain 6, la comète fut encore observée par M. Messier.

$$\odot = 0^s\ 17^\circ\ 0'\ 26'' \qquad V = 0.0009230$$
$$G = \underline{10.24.59.37} \qquad g = 2^\circ\ 24'\ 52''.$$
$$T = -\ 1.22.\ 0.49$$

Les ν augmentent d'environ 0.014 : dans le tableau que nous allons former, ils doivent être de 0,78 à 0,80 ; ce qui d'ailleurs est visible, car $x = 0$ donne déjà $\nu = 0.78984$,

x	$L\left(\begin{smallmatrix}6 \text{ avril} \\ 96\end{smallmatrix}\right)$	λ	ν	$d\nu$	ρ	6 Avril.
0	7ˢ 24° 59′ 27″	2° 1′ 14″	0.78984		0.61678	Les ρ sont inutiles, ou à peu près ; mais ils coûtent si peu.
1	7.25	2. 3.56	0.78995	11	0.63057	
2	7.26	2. 6.35	0.79032	37	0.64437	
3	7.27	2. 9.11	0.79092	60	0.65818	
4	7.28	2.11.46	0.79176	84	0.67201	
5	7.29	2.14.18	0.79285	109	0.68589	
6	8. 0	2.16.54	0.79419	134	0.69980	
7	8. 1.59.27	2.19.14	0.79577	158	0.71376	

139. La comète fut encore observée le 7, ν augmentant toujours de 0.014, doit être environ de 0.804,

$$\odot = 0^s\ 17^\circ\ 59'\ 16'' \qquad V = 0.0010440$$
$$G = \underline{10.24.32.34} \qquad g = 1^\circ\ 46'\ 28''\text{B}$$
$$T = -\ 1.23.26.42$$

x	$L\left(\begin{smallmatrix}7 \text{ avril} \\ 97\end{smallmatrix}\right)$	λ	ν	$d\nu$	ρ
0	7ˢ 24° 22′ 34″	1° 26′ 22″	0.80547		0.59703
1	7.25	1.28.23	0.80561	14	0.61108
2	7.26	1.30.23	0.80597	58	0.62659
3	7.27	1.32.21	0.80662	65	0.63925
4	7.28	1.34.17	0.80749	87	0.65333
5	7.29.22.34	1.36.11	0.80861	112	0.66747

Dès

Dès le premier calcul, on voit que $\nu = 0.80547$, ce qui continue de nous prouver que dans les calculs précédens, pour T′ — T, nous aurions dû donner aux ν des valeurs un peu plus fortes, et que par conséquent nos L sont aussi un peu faibles. Nous ne nous donnerons pas la peine de chercher d'autres paraboles, si faciles à trouver; nous passerons en revue auparavant toutes les observations de cette seconde apparition.

140. Nous ne retrouvons plus d'observations avant le 13, après six jours d'intervalle; ν aura dû augmenter au moins de 0.084, et sera par conséquent 0.89. La longitude diminuera de 8 ou 9°; il y a toute apparence qu'il faudra faire x négatif et positif dans le tableau du 13.

$$\odot = 0^s\,23°\,51'\,37''\qquad V = 0.0017720$$
$$G = 10.20.53.16\qquad g = 2°\;5'\,42''\text{A.... le 13}$$
$$T = -\;2.\;2.58.21\qquad g = 1.56.22''\text{B .... le 7}$$
$$\text{Mouvement en latitude en 6 jours} = 4.\;2.\;4$$
$$\text{Mouvement diurne..........}\;40'\,20'',67.$$

On voit que la comète a dû passer au nœud descendant entre le 9 et le 10; mais l'interruption est trop forte et le mouvement trop inégal pour en conclure avec sûreté l'instant du passage par le nœud. Mais on voit par les tableaux du 7 et du 13, que le 10 la longitude devait peu différer de 7^s 23° : c'est la longitude du nœud descendant.

x	L $\binom{13 \text{ avril}}{103}$	λ	ν	$d\nu$	ρ
— 2	7^s 18° 53′ 16″	0° 59′ 43″	0.89511	40	0.42504
— 1	7.19	1. 1.56	0.89471	12	0.44067
0	7.20	1. 4. 9	0.89459	15	0.45628
+ 1	7.21	1. 6.20	0.89474	41	0.47189
+ 2	7.22.53.16	1. 8.30	0.89515		0.48751

$x = 0$ nous donne $\nu = 0.89459$, ce qui confirme les remarques précédentes.

141. Le 14... ⊙ = 0ˢ 24° 50′ 14″ V = 0.0018940
G = 10.19.59.28 g = 5° 10′ 8″
T = — 2. 4.50.46

x	L (14 avril 104)	λ	v	dv	ρ
— 2	7ˢ 17° 59′ 28″	1° 22′ 40″	0.90994	39	0.39516
— 1	7.18	1.26. 1	0.90955	12	0.41047
0	7.19	1.29.21	0.90943	17	0.42691
+ 1	7.20	1.32.40	0.90960	43	0.44278
+ 2	7.21.59.28	1.35.56	0.91003		0.45866

L'élongation est augmentée de 1° 52′ 25″, $x = 0$ donne $v = 0.90943$, et du 13 au 14 il a augmenté de 0.01484. Voilà un moyen fort simple de connaître à peu près l'augmentation diurne de v; mais il n'est sûr que dans les circonstances où x est fort petit. En effet, du 31 mars au premier avril, on trouverait $dv = 0.01664$ pour $x = 0$.

142. La comète a été revue le 16, après quoi elle a cessé d'être visible; la latitude australe augmentait rapidement, la longitude géocentrique diminuait promptement et irrégulièrement, ainsi que la latitude : tous ces symptômes annonçaient que la comète était plus voisine de la terre; elle était trop peu de tems sur l'horizon, et s'y trouvait en présence du soleil ou dans le crépuscule.

Le 16, ⊙...... 0ˢ 26° 47′ 19″ V = 0.002135
G...... 10.17.39.59 g = 5° 56′ 59″
T = — 2. 9. 7.20

x	L (16 avril 106)	λ	v	dv	ρ
— 2	7ˢ 15° 39′ 59″	2° 4′ 32″	0.94014	38	0.32653
— 1	7.16	2.10.19	0.93976	7	0.34174
0	7.17	2.16.35	0.93969	21	0.35813
+ 1	7.18	2.22.48	0.93990	50	0.37452
2	7.19.39.59	2.28.59	0.94040		0.39092

143. Sans essayer de représenter ces observations trois à trois par autant de paraboles qui ne nous fourniraient aucune remarque nouvelle, supposons que nous n'ayons que les trois observations du 31 mars, du 7 et du 16 avril, et cherchons une parabole qui les représente; nos intervalles seront de 7 et de 9 jours. Nous avons déjà vu que l'égalité absolue d'intervalle n'était nullement nécessaire, et que même elle n'ajoute rien à la facilité de la méthode; ce qui n'est pas plus indispensable, mais seulement un peu plus commode, c'est que les intervalles soient d'un nombre entier de jours. Si le contraire arrivait, les deux $d\rho$, au lieu d'être ou parfaitement égaux, ou du moins dans le rapport de deux entiers, seraient entre eux dans le rapport de deux nombres fractionnaires; du reste le procédé serait absolument le même.

144. Nous pourrions avec les trois observations choisies, suivre la marche détaillée ci-dessus, et faire nos calculs comme on les ferait immédiatement après chaque observation; mais ce serait répéter les mêmes préceptes et les mêmes réflexions. Pour varier nos exemples, supposons que les trois observations nous soient données ensemble; nous commencerons par faire les trois tableaux du 31 mars, du 7 et du 16 avril.

Nous verrons au premier coup-d'œil que les ρ sont de 0,7, 0,8 et 0,9 environ, pour que les $d\rho$ soient dans la proportion des tems; que la comète a passé le périhélie, et qu'elle approche du nœud descendant et de la terre.

145. Choisissons au hasard $x = 11°$ dans le premier tableau, et prenons dans celui du 7, $x' = 3°$, nous trouverons $T' - T = 6{,}49$ au lieu de 7; en conservant $x = 11°$, prenons $x' = 2°$, nous aurons $T' - T = 6{,}83$; d'où l'on peut conclure que si l'on prend $x' = 1°\,30'$, $T' - T$ différera peu de 7. On trouvera $T' - T = 7^j{,}05$.

Ainsi $dx' = -30'$ produit un changement de $+0^j{,}22$, nous dirons $0{,}22 : 0{,}05 :: 30' : dx' = \frac{5}{22}.30 = \frac{150}{22} = \frac{75}{11} = 6'{,}8$. J'aurais dû faire $dx' = -23{,}2$, ou $x' = 1°\,36'{,}8$. J'essaie $1°\,36'$ en nombre rond, c'est-à-dire que je fais

	L	λ	ρ
31 mars... $x = 11°$	$8^s\ 8°\,20'\,30''$	$5°\,15'\,43''$	0.70799
7 avril... $x' = 1.36'$	7.25.58.34	1.29.35	0.80581
$dL =$	$-12.21.56$	3.46. 8	$+$ 0.09782 $d\rho$

Je trouve $T' - T = 7^j.0017$; il serait fort inutile de chercher une précision plus grande. Le rayon vecteur a diminué de 0,09782 en 7 jours, ou de 0.01397 par jour. En neuf, il doit diminuer de 0.12573, ou 0.126; car la comète s'éloignant de son périhélie, les dv vont en augmentant. Je dois donc chercher le 16 un $v = 0.952$; il ne s'en trouve aucun dans le tableau où le plus faible est 0.93976; ce qui suffirait déjà pour faire rejeter l'hypothèse formée. Mais en voici une autre preuve.

Les dL vont en diminuant, car la comète s'éloigne de son périhélie; $\frac{12^\circ\ 21'\ 56''}{7} = 1^\circ\ 46'$ sera le mouvement diurne; 15° 54′ seraient le mouvement pour neuf jours, en le supposant uniforme; mettons 15° 30′, parce qu'il diminue; retranchons-les de 7^s 25° 58′ 34″ longitude du 7, il restera 7^s 10° 28′ qui ne sont pas dans le tableau, et qui donneraient un v encore plus fort; il en résulte que le 7, notre v était trop faible; il faut donc renoncer à notre hypothèse, et recommencer le calcul en faisant v plus fort le 31 mars.

146. 31 mars...	$x = 13°$	8^s 10° 20′ 30″	5° 22′ 34″	0.71337
7	$x' = 4$	7.28.22.34	1.34.17	0.80749
	$dL =$	11.57.56	3.48.17	0.09412 dv.

Ayant augmenté v, il faut que je diminue dL, et voilà pourquoi le 7, je choisis $x' = 4°$. Cette nouvelle supposition donne $T' - T = 6^j,83$, au lieu de 7 jours; il faut augmenter dL que nous avons trop diminué, et diminuer par conséquent L'.

Quand nous avons ci-dessus trouvé $6^j,83$, nous avons diminué dL de 24′; faisons ici de même,

$x = 13°$	8^s 10° 20′ 30″	5° 22′ 34″	0.71337
$x' = 3.36'$	7.27.58.34	1.33.32	0.80745
$dL =$	12.21.56	3.49. 2	0.09408

Je trouve $T' - T = 6^j,98$ seulement; il est probable que l'ellipse donnerait plus que 7, mais nous ne la connaissons pas. Nous avions 0.17 à corriger, mais nous avons corrigé 15; il nous reste $\frac{2}{17}$ ou $\frac{1}{9}$ à corriger : augmentons dL de $\frac{1}{9}$ ou $\frac{2}{17}$ de 24, ce serait environ 3′ à retran-

cher de x' et de L'. J'ai par inadvertance retranché 4'; j'ai fait

$x = 13°$	8ˢ 10° 20′ 30″	5° 22′ 34″	0.71337	
$x' = 3.32'$	7.27.54.34	1.33.19	0.80706	
$dL =$	12.25.56	3.49.15	9369	$= dv.$

Ce qui donne T' — T = 7ʲ,0010, résultat dont nous pouvons nous contenter, mais qui prouve que x' est un peu trop faible, et que $x' = 3° 33'$ eût été meilleur. Quoi qu'il en soit, portons $x' = 3° 32'$ pour chercher dans le tableau du 16 une ligne qui donne T'' — T' = 9ʲ.

En 7 jours, dv a été de 9369; en 9 jours, il sera

$$\frac{9.9369}{7} = \frac{84321}{7} = 12047$$

Le rayon vecteur du 7 était............ 80706

Celui du 16 serait donc................ 0.92753

mais il doit être plus fort. Je fais au hasard

$x' = 3° 32'$	7ˢ 27° 54′ 34″	1° 33′ 19″B	0.80706	
$x'' = -2.0$	7.15.39.59	2. 4.32 B	0.94014	
dL'...	12.14.55	3.37.51	0.13308...	dv,

et T'' — T' = 9ʲ.022. je diminue dL' de 3', et je fais pour les trois jours,

8ˢ 10° 20′ 30″	5° 22′ 34″B	0.71337
7.27.54.34	1.33.19 B	0.80606
7.15.42.59	2. 4.49 A	0.94012

Nous avons déjà vu que T' — T = 7ʲ.001 ; nous trouverons par les deux dernières lignes T'' — T' = 9ʲ,0. Cherchons de plus T''— T; par la première et la troisième ligne, nous trouverons 16ʲ,1407 au lieu de 16ʲ. Diminuons de 20' chacune de nos trois longitudes, ce qui diminuera un peu nos rayons vecteurs; nous aurons

147.	31 mars...	8ˢ 10° 0′ 30″	5° 21′ 26″B	
	7 avril...	7.27.34.34	1.32.43 B	et T''— T = 15.98
	16 avril...	7.15.22.59	2. 2.53 A.	

Nous pouvons nous en tenir à ce dernier calcul, d'autant plus que

l'intervalle augmenterait dans l'ellipse, et deviendrait trop grand. Cherchons donc les élémens, et nous trouverons

$$p = 71.614, \quad h = 0.58379.$$

Ces deux élémens sont fort approchés.

$u = 50° 18' 46''$, $u'' = 76° 0' 2''$ et $\Pi = 10^s 1° 4' 41''$, qui se rapproche beaucoup de ce que nous avons eu dans l'autre branche, quand nous avions $u < 78°$. ☊ $= 1^s 22° 6' 36''$ et $I = 16° 58' 15''$. Ces deux quantités sont un peu faibles; mais si le voisinage du nœud peut faire croire que ce nœud est mieux déterminé, il n'en est pas de même de l'inclinaison qui se tire plus exactement des observations faites vers 90° de distance au nœud.

Nous ne perdrons pas notre tems à corriger cette première ébauche; nous ferons seulement remarquer combien peu elle nous a coûté, et nous passerons ensuite à la troisième apparition où les u passent 78°. Le tout se borne aux trois tableaux et à onze évaluations de la formule $T' - T$.

148. La comète fut apperçue de nouveau le 29 avril; elle était visible à la vue simple. Messier et La Caille l'observèrent presque tous les jours dans le mois de mai, jusqu'à sa disparition dans les premiers jours de juin. Le mouvement était devenu plus rapide et plus irrégulier, d'où il résultait que la comète était plus voisine de la terre. La diminution de latitude géocentrique montrait qu'elle s'éloignait de la terre, puisque la latitude héliocentrique était croissante; mais nous ne ferons aucun usage de cette connaissance tirée des observations précédentes.

Supposons qu'on ait observé

$$G = 5^s 22° 13' 46'' \qquad g = 31° 15' 9''$$
$$\odot = 1.11.10.41 \qquad V = 0{,}0038110$$
$$\text{élongation} = T = 4.11.\ 3.\ 5$$

L'élongation qui surpasse 90°, prouve que $\rho \cos\lambda$ surpasse l'unité. Sur le prolongement de $TC = \rho$ (fig. 72), abaissons la perpendiculaire SP; $PT = V \cos T = 0.6625$. Pour que PC égale 1, il faut que TC égale 0.3375 : mais PC est plus petit que SC; ainsi TC pourrait être moindre que 0,3, mais il est probable qu'il n'est pas au-dessous de 0,2.

$TSP = 90° - STP = 48° 56' 55''$, $x = CSP$ doit être plus grand que

TSP ; donc $x = 49°$ au moins. Je forme ainsi le tableau suivant :

x	L (1 mai) 121	λ	$d\lambda$	ν	$d\nu$	ρ
50	7ˢ 2° 13′ 46″	7° 8′ 0″	47′ 1″	1.19274	2598	0.24412
49	7. 3.13.46	6.20.59	47.21	1.16676	2444	0 21262
48	7. 4.13.46	5.33.58		1.14232		0.18240

On voit par la figure que

$$L = ♅ - TSC = ♅ - (PSC - PST) = ♅ + PST - PSC$$
$$= ♅ + 90° - 180 + T - x = ♅ - 3^s + (T - x)$$
$$= \odot + 180° - 90 + (T - x) = \odot + 3^s + (T - x).$$

Nous nous arrêtons à $x = 48°$ pour ne pas faire x trop petit. Les trois lignes que nous donnons suffisent ici ; mais si l'on n'avait aucune idée de l'orbite, il faudrait continuer x au-dessous de 50°, jusqu'à ce qu'on trouvât pour ν des valeurs invraisemblables, et former au moins plusieurs groupes de x, comme nous avons fait pour le 31 mars et le premier avril.

149. Il n'y eut pas d'observations le 2, mais le 3 on avait

$$G = 5^s\ 17°\ 1'\ 58'', \qquad g = 26°\ 40'\ 2,$$
$$\odot = 1.13.\ 6.51 \qquad V = 0.004012$$
$$T = 4.\ 3.55.\ 7.$$

La latitude est diminuée de 4°31′7″, on peut croire que la comète s'éloigne, il faut augmenter ρ ; le rayon vecteur qui est au moins 1,15, indique un mouvement diurne qui doit être entre 21 et 72′ (Table III), milieu 46′, ce qui fait 93′ pour deux jours. Ce mouvement paraît rétrograde, car T est diminué de 7° 8′ en deux jours. $dx = dG = -5°$ environ ; nous ferons $x = 46°$, 45, 44, etc.

x	L (3 mai) 123	λ	ν	$d\nu$	ρ
46	7ˢ 1° 1′ 58″	7° 13′ 30″	1.21531	2287	0.30410
45	7. 2. 1.58	6.38. 6	1.19244	2126	0.27434
44	7. 3. 1.58	6. 2.41	1.17082		0.24560

150. Point d'observations le 4, mais le 5,

$$G = 5^s\ 13^\circ 55'\ 7'' \qquad g = 23^\circ 35' 22''$$
$$\odot = 1.15.\ 2.35 \qquad \log V = 0.0042110$$
$$T = 3.28.52.32$$

dg diminue ; nous ferons $x = 44^\circ, 43, 42, 41$.

x	L (5 mai) 125	λ	ν	$d\nu$	ρ
44	6ˢ 29° 55′ 7″	7° 24′ 42″	1.24046	2251	0.36620
43	7. 0.55. 7	6.56.25	1.21795	2058	0.33703
42	7. 1.55. 7	6.27.49	1.19737	1932	0.30871
41	7. 2.55. 7	5.58.50	1.17805		0.28113

151. Dans les tableaux du 3 et du 5, je prends au hasard deux lignes, et je cherche dans le tableau du premier mai un ν qui soit en progression arithmétique avec les deux autres. J'obtiens ainsi

L	λ	ν	$d\nu$
7ˢ 3° 12′ 5″	6° 21′ 44″	1.16693	2551
7. 2. 1.58	6.38. 6	1.19244	2551
7. 0.55. 7	6.56.25	1.21795	

$$dL = 1.10.\ 7 \qquad 16.22 = d\lambda$$
$$dL' = 1.\ 6.51 \qquad 18.19 = d\lambda'$$

les

les dL diminuent, et cela doit être; mais les $d\lambda$ augmentent, ce qui est contradictoire.

Je conserve la seconde ligne, je retranche 10′ de la troisième longitude L‴; j'interpole pour changer λ‴ et ν‴, et cherchant ν′ en progression arithmétique avec ν″ et ν‴; j'obtiens

7ˢ 3° 20′ 47″	6° 14′ 8″	1.16318	2926
7.2. 1.58	6.38. 6	1.19244	2926
7.0.45. 7	7. 1. 8	1.22170	
1.18.49	23.58		
1.16.51	23. 2		

au lieu de retrancher 10′, si j'en retranche 20 j'aurai, par des opérations semblables,

7ˢ 3° 30′ 26″	6° 7′ 51″	1.15943	3301
7.2. 1.58	6.38. 6	1.19244	3301
7.0.35. 7	7. 5.51	1.22545	
1.28.28	30.15		
1.26.51	27.45		

milieu entre ces deux dernières hypothèses,

	7ˢ 3° 25′ 36″	6° 10′ 59″	1.16130	3114
	7.2. 1.58	6.38. 6	1.19244	3113
	7.0.40. 7	7. 3.29	1.22357	
$dL =$	1.23.38	27. 7		
$dL'' =$	1.21.51	25.23		

La première hypothèse donne	T′ − T = 5ʲ.6378	0ʲ.2008	0ʲ.4781
La moyenne	T′ − T = 5.8386	0.2773	
La seconde	T′ − T = 4.1159		

On voit que les erreurs ne changent pas bien proportionnellement; faisons par approximation

$$0.4781 : 10' :: 0.1159 : \left(\frac{0.1159}{0.4781}\right) 10' = 2' \, 30''.$$

Il faut ajouter 2′ 30″ à la troisième longitude de la seconde hypothèse,

puisque nous avons trop retranché. Nous aurons ainsi :

7ˢ 3° 27′ 21″	6° 10′ 26″	1.16069
7.2. 1.58	6.38. 6	1.19244
7.0.37.37	7. 4.39	1.22419
1.25.23	27.40	3175
1.24.21	26.33	3175.

Nous trouverons....... $T' - T = 1.9683$ au lieu de 2,0,
$T' - T' = 2.0024$ au lieu de 2,0,
d'où $T' - T = 3.9707$ au lieu de 4,0,
et directement $T' - T = 3.9657$ au lieu de 4,0.

152. Tout cela n'est pas fort exact, mais il serait aisé de satisfaire aux intervalles par de légères modifications; on peut ne pas se donner tant de peine pour une première ébauche. Cherchons les élémens par les deux observations extrêmes, nous trouverons

$$p = 72.941, \quad h = 0.57338, \quad \Pi = 10^s\ 3°\ 9'\ 32'',$$
$$\Omega = 1^s\ 21°\ 47'\ 6'', \quad I = 18°\ 58'\ 59''.$$

p est un peu trop fort, h un peu faible, Π un peu fort, Ω un peu faible, I trop fort de 1°.

Comparons les élémens déduits de ces trois observations avec ceux que nous avons eus pour la seconde apparition, quand u était au-dessous de 78° (147).

	h	p	Π	Ω	I
$u < 78$..........	0.58379	71.614	10.1. 4.41	1.22. 6.36	16.58.15
$u > 78$..........	0.57338	72.941	10.3. 9.32	1.21.47. 6	18.58.59
Milieu	0.57859	72.277	10.2. 7. 6	1.21.56.51	17.58.37
1ʳᵉ apparition....	0.58733	71.666	10.3. 2. 6	1.22.59. 5	17.41.50
Moyenne........	0.58296	71.971	10.2.34.36	1.22.27.58	17.50.13
Élémens supposés.	0.58297	71.547	10.3.16.18	1.23.45.35	17.40. 5

les différences paraîtront peu considérables, quand on se souviendra que parmi les différentes orbites, il en est qui sont conclues d'arcs de $1°\frac{1}{2}$ et 3°.

153. Pendant le reste de la troisième apparition où les observations sont plus nombreuses, il serait fort inutile pour notre objet, de calculer des tableaux d'hypothèses pour tous les jours d'observatiou, d'autant plus que le mouvemeut se ralentit de jour eu jour. Prenons seulement de 4 en 4 jours, c'est-à-dire les 9, 13, 17, 21, 25, 29 mai et 3 juin; tous les intervalles serout de quatre jours, à la réserve du dernier qui sera de 5.

Le 9, $G = 5^s\, 10°\, 32'\ 1$ $g = 19°\, 46'\, 56''$
$\odot = 1.18.54.36$ $\log V = 0.0045910$
$T = 3.21.37.25$

x	L 9 mai 129	λ	v	dv	ρ
40°	7ˢ 0° 32′ 1″	6° 57′ 15″	1.23553	1954	0.41591
41	6.29	7.18.53	1.25507	2058	0.44428
42	6.28	7.40.20	1.27565	2167	0.47351
43	6.27	8. 1.38	1.29732	2283	0.50367
44	6.26.32. 1	8.22.44	1.32015		0.53484

Quand nous n'aurious pas les observations précédentes, comme il est évident que $v > 1$, nous n'aurions jamais un grand nombre de suppositions à faire pour x. Nous commencerions par $v = 1\frac{1}{4}$ et $v = 1\frac{1}{3}$; les ρ ne sont guères que de simple curiosité.

Le 13, $G = 5^s\, 8°\, 51'\, 51''$ $g = 17°\, 32'\, 40''$
$\odot = 1.22.45.52$ $\log V = 0.0049600$
$T = 3.16.\ 5.59$

x	L 13 mai 153	λ	v	dv	ρ
42	6ˢ 26° 21′ 51″	8° 1′ 43″	1.32115	2229	0.59453
43	6.25.51.51	8.28. 5	1.34344	2347	0.62574
44	6.24.51.51	8.45.12	1.36691		0.65798

Le rayon vecteur 1,34 suppose un mouvement de 15′ à 53′, milieu 33′ ou 2° environ en quatre jours.

Le 17, G = 5ˢ 7° 59′ 35″ g = 16° 4′ 30″
⊙ = 1.26.36.48 log V = 0.0053100
T = 3.11.22.47

x	L 17 mai 137	λ	ν	$d\nu$	ρ
44	6ˢ 23° 59′ 35″	9° 0′ 31″	1.39682	2511	0.75901
45	6.22.59.35	9.14.36	1.42193	2647	0.79266
46	6.21.59.35	9.28.51	1.44840		0.82793

154. Le mouvement qui se ralentit est de 2° environ par jour. Pour faire usage des trois dernières observations, je prends la deuxième ligne du second tableau arbitrairement; je choisis dans le troisième tableau la longitude qui donne 2° de mouvement, avec λ et ν qui répondent à cette longitude; je trouve $d\nu = 5651$. Je suppose $d\nu$ constant, ce qui me donne le ν de la première ligne, et par conséquent la longitude et la latitude; je vois que les dL et les $d\lambda$ se ralentissent, ainsi que cela doit être.

	6ˢ 28° 0′ 53″	7° 51′ 24″	1.28692
	6.25.51.51	8.28. 5	1.34344
	6.23.52. 5	9. 2.17	1.39995
dL	2. 9. 2	36.41	5652
dL′	1.59.46	34.12	5651

En conservant la seconde ligne, j'augmente arbitrairement dL′ de quelques minutes, et par des opérations toujours les mêmes, je forme l'hypothèse suivante :

6ˢ 28° 9′ 34″	7° 48′ 20″	1.28378
6.25.51.51	8.28. 5	1.34344
6.23.44.35	9. 4. 2	1.40310
2.17.43	39.45	5966
2. 7.16	55.57	5966

En conservant toujours la seconde ligne, et augmentant encore dL' de 7′ 30″ comme ci-dessus, je forme la troisième hypothèse, et je pourrais en former ainsi plusieurs autres.

6ˢ 28.18. 5	7° 45′ 14	1.28064
6.25.51.51	8.28. 5	1.34344
6.23.37. 5	9. 5.48	1.40624
2.26.14	42.51	6280
2.14.46	37.43	6280

155. Dans les trois hypothèses les dL vont en se ralentissant, ainsi que les $d\lambda$; les dv sont constans, comme ils doivent l'être à fort peu près.

La première donne $T'' - T = 7^j.1870$ au lieu de 8,0.
La seconde....... $T'' - T = 7.6147$ au lieu de 8,0.
La troisième...... $T'' - T = 8.0979$ au lieu de 8.

Les variations d'erreurs sont 0,4277 et 0.4832 qui ne sont pas tout-à-fait proportionnelles. 0.4832 : 0.0978 :: 7′ 30″ : 1′ 31″ qu'il faut ajouter à L'''; je forme ainsi l'hypothèse

6ˢ 28° 16′ 31″	7° 45′ 51″	1.28127
6.25.51.51	8.28. 5	1.34344
6.23.38.36	9. 5.27	1.40561
2.24.40	42.14	6217
2.13.15	37.22	6217

Ici, comme nous avons des mouvemens plus considérables, il ne sera pas inutile d'examiner si les latitudes et les différences de longitudes sont telles que les trois lieux héliocentriques de la comète soient dans un même plan, c'est-à-dire si nous avons (X.196)

$$\tang \lambda' \sin dL'' + \tang \lambda''' \sin dL = \tang \lambda'' \sin (dL'' + dL');$$

je ne trouve entre les deux membres de l'équation qu'une différence de 0.0000078, d'où je conclus que le théorème est satisfait suffisamment. Cette vérification est plus facile que celle de $T - T'$.

156. Je trouve T″ — T = 7j.9557 au lieu de 8,0. Cet intervalle est un peu faible pour la parabole ; il serait probablement trop fort pour l'ellipse : nous nous y tiendrons, et cherchant les élémens, nous aurons

p	h	Π	☊	I
73.273	0.599046	10s 0° 52′ 15″	1s 22° 48′ 56″	18° 10′ 25″.

Ainsi, depuis le passage au périhélie, voilà déjà trois systèmes d'élémens, ou trois ébauches absolument indépeudantes. Joignons-y la première apparition dans l'autre branche

p	h	Π	Π	I
71.614	0.58379	10s 1° 4′ 41″	1s 22° 6′ 56″	16° 58′ 15″
72.941	0.57338	10.3. 9.32	1.21.47. 6	18.58.59
73.273	0.59905	10.0.52.15	1.22.48.56	18.10.25
72.609	0.58541	10.1.42. 9	1.22.14.13	18. 2.33
71.666	0.58733	10.3. 2. 6	1.22.59. 5	17.41.50
72.1375	0.58637	10.2.22. 7	1.22.36.39	17.52.11.

On voit que chacune de nos tentatives en particulier nous donne une première approximation très-passable, et que malgré la différence des circonstances, la méthode est toujours essentiellement la même.

157. Passons au 21. La longitude en quatre jours n'a diminué que de 25′ ½.

$$G = 5^s\,7^\circ\,34'\,3'' \qquad g = 15^\circ\,2'\,3''$$
$$\odot = 2.0.27.26 \qquad \log V = 0.0056400$$
$$T = 3.7.\ 6.37$$

x	L 21 mai.	λ	v	dv	ρ
46	6s 21° 34′ 43″	9° 58′ 40″	1.46790	2816	0.91560
47	6.20.34.43	9.50.51	1.49606	2971	0.95263
48	6.19.34.43	10. 2.51	1.52577		0.99108

Le 25, $G = 5^s\,7^\circ\,25'\,22''$ $g = 14^\circ\,15'\,27''$
$\odot = 2.4.17.48$ $\log V = 0.0059400$
$T = 3.3.\ 7.34$

Le mouvement n'est plus que de 8′ 41″ en quatre jours; le mouvement en latitude est de 46′ 36″,

x	L 25 mai.	λ	v	dv	ρ
46	6ˢ 21° 25′ 22″	9° 49′ 23″	1.47890	2827	0.99297
47	6.20.25.22	10. 0.10	1.50717	2981	1.03023
48	6.19.25.22	10.10.45	1.53698		1.06920

Le 29, $G = 5^s\ 7^\circ\,28'\ 6''$ $g = 13^\circ\,39'\,28''$
$\odot = 2.\ 8.\ 7.53$ $\log V = 0.0062040$
$T = 2.29.20.13$

x	L 29 mai.	λ	v	dv	ρ
49	6ˢ 18° 28′ 6″	10° 29′ 39″	1.57238	2993	1.1786
50	6.17.28. 6	10.38.40	1.60231	3816	1.2180
51	6.16.28. 6	10.46. 3	1.64047		1.2644

Le mouvement géocentrique qui était rétrograde devient ici direct. Du 21 au 25 la comète a rétrogradé de 8′ 41″; elle a avancé de 2′ 34″ du 25 au 29. La circonstance est excessivement défavorable; voyons comment nous en sortirons par notre méthode. Le mouvement en latitude n'est que de 35′ 59″.

158. v est ici de 1,5 à 1,6, le mouvement doit être de 11 à 43′ par jour (Table III), milieu 27′ ou un peu moins de 2° pour quatre jours.

En partant de la longitude du 21 mai, première ligne, je prends dans celle du 25 mai, une longitude qui donne un mouvement de 1° 49′ 21″ en longitude. Il en résulte un $dv = 8114$, qui me sert à déterminer v''' et la troisième ligne entière.

	L	λ	ν
	6ˢ 21° 34′ 43″	9° 38′ 40″	1.46790
	6 19.45 22	10. 7.13	1.52904
	6.17.57.49	10.43.47	1.59018
$dL = -$	1.49.21	28.33	6114
$dL' = -$	1.47.33	36.34	6114

il en résulte T″—T=7ʲ.8934 au lieu de 8 jours.

En conservant la première ligne, je cherche à augmenter dL et $d\nu$; je fais

L	λ	ν
6ˢ 21° 34′ 43″	9° 38′ 40″	1.46790
6.19.39.34	10. 7.43	1.52843
6.17.52.23	10.34.36	1.58883
1.55. 9	29. 3	6053
1.47.11	26.53	6040

Il y a bien une petite irrégularité dans les $d\nu$ qui diminuent au lieu d'augmenter; négligeant cette erreur, je trouve

T″—T=7ʲ.9848 au lieu de 8,0; l'ellipse donnerait plus et peut-être trop,
T′—T=3.9844 au lieu de 4,0,
T″—T′=3.9968 au lieu de 4,0,
d'où 7.9812 au lieu de 8,0.

Si nous négligeons ces erreurs qui disparaissent probablement dans l'ellipse, nous aurons

p	h	Π	☊	I
73.547	0.62287	9ˢ 29° 2′ 26″	1ˢ 24° 13′ 26″,	17° 29′ 9″;

élémens inexacts sans doute, mais qui sont déterminés sur un mouvement géocentrique de 8° 41′, et qui, par cette considération, paraîtront sans doute meilleurs qu'on ne devait l'espérer. On voit par les deux dernières tentatives, que p et h augmentent sensiblement, et que Π diminue.

159.

159. En rassemblant toutes les orbites calculées jusqu'ici par des observations indépendantes les unes des autres, et dans une grande variété de circonstances, nous jugerons mieux de l'incertitude que peuvent laisser les paraboles calculées sur un petit nombre d'observations, comme il arrive le plus souvent, et nous verrons qu'on est en droit de soupçonner des erreurs de 1° et même 2° dans le plus grand nombre des orbites qui composent le catalogue qu'on trouvera à la fin de ce chapitre.

Résumé des recherches précédentes.

u moyen.		h	π	☊	I	Intervalles totaux.
+ 88°	71.375	0.60236	10. 4.54.53	1.23.17.23	17.33.42	3 jours.
+ 87	71.647	0.60867	10. 5. 8. 6	1.23.10.58	17.30. 8	6
+ 77	71.695	0.60473	10. 4.40.18	1.23.12.25	17.29.12	3
+ 71	71.761	0.56042	10. 1. 6. 6	1.23.44.14	17.52.40	3
— 63	71.614	0.58379	10. 1. 4.41	1.22. 6.36	16.58.15	16
— 91	72.941	0.57338	10. 3. 9.22	1.21.47. 5	18.56. 9	4
— 96	73.273	0.59905	10. 0.52.15	1.22.48.56	18.10.25	8
— 101	73.556	0.62287	9.29. 2.27	1.24.13.26	17.29. 9	8 sur un mouv. de 8′
Milieu...	72.219	0.59442	10. 2.29.46	1.22.52. 4	17.45.19	
Parabole.	72.425	0.597075	10. 1. 0,24	1.24. 7. 0	17.28.55	Klinkenberg.
Ellipse...	71.547	0.582973	10. 3.19.28	1.23.45.35	17.40. 5	Klinkenberg.
(113)	71.667	0.58368	10. 3. 2.20	1.22.59. 0	17.41.50	et (114)

La huitième orbite qui s'écarte le plus des autres a été déterminée par un mouvement de 8′ en huit jours.

Le milieu entre les huit orbites, fort incertain en lui-même, comme chacune de ces paraboles en particulier, ne s'écarte pas considérablement de la parabole éprouvée (114), qui a satisfait si passablement aux observations de la première branche. Nous pouvons donc essayer sur la seconde branche cette même parabole qu'il s'agit de corriger, si toutefois on peut en trouver une qui satisfasse à la totalité des observations, ce qui ne nous est pas encore démontré; car l'ellipse même de La Caille ne s'accorde qu'à 10′ près avec les premières observations

de Messier, et dans celle de Klinkenberg, j'ai trouvé des erreurs qui vont à 14 minutes.

160. Pour donner un exemple de ces comparaisons des élémens trouvés, avec les observations, c'est-à-dire avec les tableaux des hypothèses qui représentent les observations, choisissons la première de toutes, c'est-à-dire celle du 21 janvier.

Les élémens de Klinkenberg que nous avons pris pour base, supposent le passage de la comète à son périhélie le 12 mars, c'est-à-dire de l'année, le.......................... 71.5469

Nous avons calculé pour une distance au périhélie 50.25

Donc le tems de notre premier calcul est de janv., le 21.2969 ou 21.297.

$\log h = 0.58368\ldots\ldots\ 9.7661748$ $\qquad p = 71.667$

$\frac{1}{2}\log h\ldots\ldots\ 9.8830874$ $\qquad T = 21.297$

$\frac{3}{2}\log h = \log h^{\frac{3}{2}}\ldots\ldots\ 9.6492622$ $\qquad p - T = 50.370 = t$

$\log h^{-\frac{3}{2}}\ldots\ldots\ 0.3507378$

$\log t = +\ 50^j.370\ldots\ldots\ 1.7021720$

$\log t' = +\ 112.956\ldots\ldots\ 2.0529098$

pour 112.75 la table (IV) donne.... = 91° 4′ 18″7

différence = 0.206 $\qquad$ pour 0j 2...... 4. 1.28

du pour 0j,1 = 120″ 64 $\qquad$ pour 0.006.... 7.24

$u = 91.\ 8.27.22$

$\frac{1}{2}u = 45.34.13.6$

On voit ici combien la table IV est commode pour trouver l'anomalie

$\log h\ldots\ 9.7661748$

C. $\log\cos\frac{1}{2}u = 45°\ 34'\ 13'',6\ldots\ 0.1548822$

id.......................... 0.1548822

$\log v = 1.19105\ldots\ 0.0759392$

$u =$ 3ˢ 1° 8′ 27″ = anomalie vraie avant le périhélie, additive,

$\Pi =$ 10. 3. 2.20 = longitude du périhélie,

$H =$ 1. 4.10.47 = longitude dans l'orbite,

$\Omega =$ 1.22.59. 0 = longitude du nœud ascendant,

$C =$ 0.18.48.13 = argument de latitude.

Puisque la comète n'atteindra à son périhélie qu'en rétrogradant pendant 50 jours, sa longitude actuelle doit être plus grande que celle du périhélie; ainsi je fais $H = \Pi + u$. Ainsi, pour les comètes rétrogrades, l'anomalie est positive avant le périhélie, et négative après; il en est de même de t.

cos I =	17° 41′ 50″...	9.9789453	sin I.........	9.4828548
tang C =	18.48.13....	9.5321147	sin C........	9.5082945
tang C′ =	17.56.20....	9.5110600	sin λ = 5° 37′ 24″..	8.9911493
☊ =	1ˢ 22.59. 0		latitude héliocent. calculée	

L = 1. 5. 0.40 = longitude réduite à l'écliptique
L, = 1. 4.54. 4 = longit. la plus approchante sur le tableau du 21
diffé. = 6.36 = 6′,6,

$m = dv$ pour 10′ = − 0.00393, 0.000393 × 6,6 = − 0.00259
v du tableau pour L = 1ˢ 4° 54′ 4″ = 1.18716
v pour L, = 1.5. 0.40 = V = 1.18457
v calculé sur les élémens............. = v = 1.19105
V − v = − 0.00648

$n = d\lambda$ pour 10′ dans le tableau = − 3″, n.6,6...− 2″
λ du tableau pour L = 1ˢ 4° 54′ 4″..... 5° 42′ 5,
λ du tableau pour L = 1.5. 0.40 = Λ. 5.42. 3
λ calculé = .. 5.37.24
Λ − λ = ... + 4.39

161. Pour faire disparaître l'erreur, nous avons l'équation (121),

$$o = V - v + \left(\frac{m}{600''}\right) d\Pi - \left(\frac{v \operatorname{tang} \frac{1}{2} u - m \operatorname{cos\acute{e}c} 600''}{v^2}\right)\left(\frac{2h^{\frac{3}{2}}}{3C}\right) dp$$
$$+ \left[\left(\frac{v \operatorname{tang} \frac{1}{2} u - m \operatorname{cos\acute{e}c} 600''}{v^2}\right)\left(\frac{t}{Ch^{\frac{1}{2}}}\right) - \operatorname{s\acute{e}c}^2 \frac{1}{2} u\right] dh.$$

En voici le calcul, qui suppose C = 27ʲ.40385. On se souviendra que pour une comète rétrograde, t et u sont positifs avant le passage : ce serait le contraire pour une comète directe :

$$\text{C. } 600'' \ldots\ldots\ 7.22185 \qquad v \ldots + 0.07591$$
$$m = -0.00393 - 7.59439 \qquad \text{tang}\,\tfrac{1}{2}u + 0.00864$$
$$-0.00000.655(d\Pi) - 4.81624 + 1.2150 + 0.08455$$
$$-\text{C.}\sin 1'' - 5.31443 + 1.3511 = -m\,\text{coséc}\,600''$$
$$m\,\text{coséc}\,600'' = 1.3511 + 10.13067 + 2.3661 + 0.40927$$
$$\text{ôtez } \log v^2 \ldots\ldots\ldots\ 0.15188$$
$$\log\left(\frac{v\,\text{tang}\frac{1}{2}u - m\,\text{coséc}\,600''}{v^2}\right) = \log s = 0.25739$$
$$\log -\frac{2h^{\frac{1}{2}}}{3\text{C}} - 8.26918$$
$$-0.033618(dp) - 8.52657$$

$$\log s + 0.25739$$
$$\log t + 1.70217$$
$$\text{C.}\log \text{C}h^{\frac{1}{2}} + 8.67912$$
$$\log + 4.3519 \ldots\ 0.63868$$
$$-\text{séc}^2\,\tfrac{1}{2}u - 2.0406$$
$$+ 2.3113\,(dh)$$

L'équation sera donc

$$0 = -0.00648 - 0.00000.6550\,d\Pi - 0.033618\,dp + 2.3113\,dh.$$

162. Pour vérifier cette équation, il faut voir si elle fait disparaître l'erreur; mais comme elle renferme trois inconnues, le problème est indéterminé. Supposons que deux soient égales à 0, et voyons si en les conservant l'une après l'autre successivement, l'erreur devient nulle en effet.

Soit d'abord $dp = dh = 0$, nous aurons

$$d\Pi = \frac{+0.00648}{-0.00000.655} = -16'\,29''.$$

Cette supposition ne change ni u, ni v; elle diminue Π ou la longitude héliocentrique, de 16′ 29″; elle augmente d'autant l'argument de latitude, mais elle ne diminue la longitude que 15′ 51″. La différence 38″ ne produira rien de bien sensible sur V; nous aurons

$\text{L} = 1^s\,4^\circ\,44'\,49''$, $\Lambda = 5^\circ\,42'\,9''$. $\lambda = 5^\circ\,42'\,8''$, $\Lambda - \lambda = +1''$, $\text{V} = 1.19108$;

mais $v = 1.19105$, $V - v = +0.00003$ au lieu de -0.00648; ainsi l'erreur a disparu.

163. Soit maintenant $d\Pi = dh = 0$. L'équation se réduit à

$$dp = \frac{+0.00648}{-0.033618} = -0.19276,\quad p + dp = 71.4743,\quad u = 90°\,49'\,45'',$$
$$v = 1.18801,\quad C = 0^s\,18°\,56'\,54'',\quad L = 1^s\,4°\,52'\,12'',\quad V = 1.18790,$$
$$V - v = -0.00011.$$

Si l'erreur n'est pas tout-à-fait anéantie, elle est au moins considérablement diminuée, et c'est tout ce qu'on peut attendre d'une formule différentielle; à dire vrai l'erreur 0.00011 est insensible.

164. Soit enfin $d\Pi = dp = 0$, il restera $dh = +0.0028036$; h devient 0.586484, t reste le même,

$$u = 90°\,52'\,6'',\quad v = 1.19102,\quad C = 19°\,5'\,34'',\quad L = 1^s\,4°\,43'\,58'',$$
$$V = 1.19109,\quad V - v = +0.00007,$$

et l'erreur est encore devenue insensible.

Nous pouvons avoir confiance en notre équation (161) pour toutes les observations qui précèdent le périhélie. Nous la calculerons de même pour tous les autres jours, et nous aurons les équations suivantes, dans lesquelles tout est multiplié par 100000 pour diminuer le nombre des zéro.

$$0 = -648 - 0.6550\,d\Pi - 3361.8\,dp + 231130\,dh,$$
$$0 = -739 - 0.6416\,d\Pi - 3365.0\,dp + 225680\,dh,$$
$$0 = -653 - 0.6550\,d\Pi - 3446.2\,dp + 229790\,dh,$$
$$0 = -647 - 0.6484\,d\Pi - 3546.7\,dp + 229500\,dh,$$
$$0 = -664 - 0.6517\,d\Pi - 3670.0\,dp + 230770\,dh,$$
$$0 = -679 - 0.6500\,d\Pi - 3724.4\,dp + 230130\,dh,$$
$$0 = = 655 - 0.6701\,d\Pi - 3989.1\,dp + 237010\,dh,$$
$$0 = -656 - 0.6633\,d\Pi - 4035.1\,dp + 234110\,dh,$$
$$0 = -667 - 0.6783\,d\Pi - 4244.5\,dp + 238860\,dh,$$
$$0 = -661 - 0.6850\,d\Pi - 4352.5\,dp + 240730\,dh,$$
$$0 = -752 - 0.7817\,d\Pi - 5517.7\,dp + 268710\,dh,$$
$$0 = -692 - 0.7983\,d\Pi - 5734.2\,dp + 272300\,dh,$$
$$0 = -783 - 0.8517\,d\Pi - 6313.8\,dp + 287660\,dh.$$

Ces équations diffèrent peu les unes des autres, et permettraient de faire dh et $dp = 0$; mais pour voir ce qu'on en peut tirer généralement, je prends la somme des six premières, celle des quatre suivantes, et enfin celle des trois dernières; je forme ainsi les trois équations suivantes, dont je fais ensuite la somme qui pourra représenter toute cette première apparition,

$$
\begin{aligned}
0 &= -4030 - 3.9017\,d\Pi - 21114.2\,dp + 1377000\,dh, \\
0 &= -2639 - 2.6967\,d\Pi - 16620.8\,dp + 950710\,dh, \\
0 &= -2227 - 2.4317\,d\Pi - 17565.7\,dp + 828270\,dh, \\
\hline
0 &= -8896 - 9.0301\,d\Pi - 55300.7\,dp + 3155980\,dh.
\end{aligned}
$$

165. L'élimination donne

$$
\begin{aligned}
dh &= -0.0010475, & h + dh &= 0.5826325, \\
dp &= +0.072829, & p + dp &= 71.739692, \\
d\Pi &= -29'\,56'', & \Pi + d\Pi &= 10^s\,2^\circ\,32'\,24''.
\end{aligned}
$$

Portons ces valeurs dans nos 13 équations de condition, elles se réduiront aux quantités qu'on voit dans la table ci-jointe. On voit que les erreurs sont presque anéanties; la plus forte est la seconde, et l'on peut soupçonner par les équations mêmes, une erreur de calcul. Le $V - v = 739$ paraît trop fort d'une unité sur la première figure: dans ce cas, nous aurions $+0.00032,7$ au lieu de -0.000673, ce qui s'accorderait parfaitement avec les erreurs voisines.

N^{os}	$V - v$
1	+ 0.00047.3
2	— 0.00067.3
3	+ 0.00037.6
4	+ 0.00019.3
5	— 0.00001.9
6	— 0.00009.0
7	+ 0.00010.3
8	— 0.00003.3
9	— 0.00007.5
10	+ 0.00000.7
11	— 0.00030.6
12	+ 0.00039.7
13	— 0.00013.6

Nous avons donc une parabole qui satisfait à la première apparition de la comète, et les élémens n'en sont pas très-différens de ceux de l'ellipse que nous avons prise pour base des calculs que nous avons transformés en observations.

166. Après le passage, les x n'ayant été calculés que de degré en degré, nous mettrons $3600'' = 1°$ au lieu de $600'' = 10'$ dans les diviseurs de m, et l'équation sera

$$0 = (V - v) + \left(\frac{m}{3600''}\right) d\Pi - \left(\frac{v \tang \frac{1}{2} u - m \,\text{cosec}\, 1°}{v^2}\right)\left(\frac{2h^{\frac{1}{2}}}{3C}\right) dp + \left[\left(\frac{v \tang \frac{1}{2} u - m \,\text{cosec}\, 1°}{v^2}\right)\left(\frac{t}{Ch^{\frac{1}{2}}}\right) - \text{séc}^2 \tfrac{1}{2} u\right] dh,$$

où nous remarquerons que pour une comète rétrograde, après le passage, $\tang \frac{1}{2} u$ et t sont des quantités négatives. Nous aurons ainsi pour le 31 mars,

$$0 = -0.00338 + 0.00000.0850\, d\Pi + 0.01874\, dp - 0.4300\, dh.$$

Pour la vérifier, soit d'abord

$$dp = dh = 0, \quad d\Pi = \frac{0.00358}{0.00000.085} = +1° 9' 1'', \quad \Pi + d\Pi = 10^s 4° 12' 32'',$$

u reste $1^s\ 21°\ 20'\ 50''$, $v = 0.71855$, L devient $8^s\ 11°\ 59'\ 24''$, $V = 0.71857$, $V - v = +0.00002$, et l'erreur est corrigée. Mais remarquons que $d\Pi$ est $+1°\ 9'\ 1''$, et qu'il était $-29'\ 56''$; ce qui fait une différence de $1°\ 38'\ 57''$ sur Π, ce qui pourrait faire douter qu'une même parabole pût s'ajuster aux deux branches de l'ellipse; mais remarquons que le dénominateur 0.00000.085 qui donne $d\Pi$, ne nous promet aucune précision.

Soit $d\Pi = dh = 0$, $dp = +\frac{0.00358}{0.01874} = +0.191$, $p + dp = 71.858$, $u = 50°\ 57'\ 6''$, $v = 0.71618$, $L = 8^s\ 11°\ 14'\ 40''$, $V = 0.71613$, $V - v = -0.00005$; dp est ici plus fort que ci-dessus, mais il est de même signe.

Soit enfin

$$d\Pi = dp = 0, \quad dh = \frac{+0.00358}{-0.4300} = -0.00083255, \quad h + dh = 0.5799355,$$

$u = 52°\ 11'\ 38'',5$, $v = 0.71340$, $L = 8^s\ 10'\ 50$, $V = 0.71255$, $V - v = -0.00085$.

Ici l'erreur ne disparaît pas entièrement, ce qui vient sans doute de ce que dh produit un changement de 1° 12′ dans l'anomalie, et que l'équation différentielle n'est peut être pas assez exacte ; d'ailleurs les dV dans nos tableaux varient quelquefois assez sensiblement d'un degré à l'autre. Pour plus d'exactitude, il aurait fallu dans cette équation de condition, employer tang $\frac{1}{2}(u+du)$ et séc² $\frac{1}{2}(u+du)$: de cette manière, j'ai réduit l'erreur de 85 à 41.

167. Nous pouvons donc employer notre équation avec confiance pour les deux dernières apparitions de la comète qui ont succédé au passage par le périhélie ; il n'y aura que le signe de m qui pourra changer, mais ce changement nous sera indiqué par nos tableaux. Au reste dans la seconde apparition, m est fort peu de chose, ce qui rend les équations moins concluantes. Nous aurons ainsi, en multipliant par 100000,

$$\begin{aligned}
0 &= -\ 358 + 0.08500\,d\Pi + 1874.3\,dp - 43000\,dh,\\
0 &= -\ 438 + 0.07139\,d\Pi + 1789.7\,dp - 33360\,dh,\\
0 &= -\ 524 + 0.04389\,d\Pi + 1663.1\,dp - 31940\,dh,\\
0 &= -\ 494 + 0.03806\,d\Pi + 1641.0\,dp - 31480\,dh,\\
0 &= -\ 532 + 0.03111\,d\Pi + 1612.9\,dp - 31610\,dh,\\
0 &= -\ 710 - 0.00333\,d\Pi + 1503.3\,dp - 30940\,dh,\\
0 &= -\ 813 - 0.00000\,d\Pi + 1540.6\,dp - 23890\,dh,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= -\ 1320 + 0.20028\,d\Pi + 5327.1\,dp - 108300\,dh \ (1, 2, 3),\\
0 &= -\ 1026 + 0.06917\,d\Pi + 3253.9\,dp - 63090\,dh \ (4, 5),\\
0 &= -\ 1523 - 0.00333\,d\Pi + 3043.4\,dp - 54830\,dh \ (6, 7).
\end{aligned}$$

Somme des sept équations

$$0 = -\ 3869 + 0.26612\,d\Pi + 11623.9\,dp - 226220\,dh.$$

168. On voit tout d'abord que ces équations ne sont ni assez nombreuses, ni assez bien composées pour corriger sûrement notre parabole. Les dernières surtout sont insuffisantes pour trouver $d\Pi$. La remarque s'applique en général à toutes les observations dans lesquelles un changement de 1° sur x ne produit aucun changement sensible dans la valeur de v, c'est-à-dire quand l'angle à la comète avoisine 90°. Je rejette donc les deux dernières observations; je mets donc la première équation toute seule ; je réunis la deuxième à la troisième, la quatrième à

à la cinquième, et j'obtiens ainsi :

$$0 = - \ 358 + 0.08500\,d\Pi + 1874.3\,dp - 43000\,dh,$$
$$0 = - \ 962 + 0.11528\,d\Pi + 3452.8\,dp - 65300\,dh,$$
$$0 = - 1026 + 0.06927\,d\Pi + 3253.9\,dp - 63420\,dh.$$

L'élimination donne

$$dh = + 0.011152, \quad h + dh = 0.594832, \quad dp = 0.60862,$$
$$p + dp = 72.27562, \quad d\Pi = + 59' 27'', \quad \Pi + d\Pi = 10^s 4^\circ 1' 57''.$$

Ces corrections sont fort différentes de celles qui provenaient de la première apparition. *dh* est un peu plus fort et de signe opposé; *dp* est de même signe, mais huit ou neuf fois plus fort, $d\Pi$ presque double et de signe contraire. Ces quantités substituées dans nos équations changent les $(V - v)$, comme on le voit dans le tableau ci-joint. Tous les $(V - v)$, sauf le premier, sont diminués sensiblement; tous ont changé de signe, sauf les deux derniers. Avec de légères modifications, on diminuerait un peu les deux premiers, mais ce serait en augmentant les deux derniers, et cette partie de la seconde branche, assez voisine du périhélie, sera passablement représentée par cette seconde parabole qui diffère assez de la première, surtout pour le tems du périhélie plus avancé de $1^\circ \frac{1}{2}$ en longitude.

N^{os}	$V - v$
1	+ 0.00484
2	+ 0.00431
3	+ 0.00225
4	+ 0.00234
5	+ 0.00163
6	− 0.00133
7	− 0.00142

169. Puisque $d\Pi$ ne produit presque rien dans cette seconde apparition, laissons-lui sa valeur trouvée pour la première parabole, c'est-à-dire $d\Pi = - 30'$; réduisons nos trois équations à deux, en prenant la somme des deux dernières, et en y substituant cette valeur de $d\Pi$,

nous aurons ainsi

$$o = -1680 + 5327.1\,dp - 108300\,dh,$$
$$o = -2668 + 6297.8\,dp - 117920\,dh,$$

éliminons, et nous trouverons

$$dh = +0.05564,\ h + dh = 0.63931,\ dp = +1.4465,\ p + dp = 73.1135,$$

quantités beaucoup trop fortes, et qui ne s'accordent nullement avec la première parabole.

170. Dans la troisième apparition où u surpasse 78°, nous trouverons encore d'autres élémens, tang $\frac{1}{2}u$ et t seront négatifs comme dans la seconde. Pour le premier mai, l'équation sera

$$o = -0.01582 - 0.00000.67834\,d\Pi - 0.002703\,dp - 2.3703\,dh.$$

Soit d'abord

$$dp = dh = o, \quad d\Pi = \frac{+0.01582}{-0.00000.67834} = -38'\ 52''.$$

Par là, L devient 7ˢ 2° 37′ 22″, $V = 1.18252$; v est toujours 1.18167, $V - v = +0.00085$; l'erreur est plus qu'anéantie, puisqu'elle a changé de signe par la petite inexactitude de l'équation et l'effet de ddV du tableau qui est de 154.

Soit

$$d\Pi = dh = o, \quad dp = \frac{+0.01582}{-0.002703} = -5j.8528;$$

correction énorme qui changera L de 4°, fera sortir cette longitude de nos tableaux, et rendra plus sensible l'inexactitude de l'équation différenticlle. Cependant, par une interpolation grossière, j'ai trouvé $V = 1.2799$; mais $v = 1.2747$, ainsi $V - v = +0.0052$; on voit que l'erreur a beaucoup diminué en changeant de signe.

Soit

$$d\Pi = dp = o,\ dh = -\frac{0.01582}{2.3703} = -0.0066744,\ h + dh = 0.5770056;$$

u devient 3ˢ 1° 20′ 49″, L = 7ˢ 2° 36′ 54″, $V = 1.18272$, $v = 1.18179$, $V - v = +0.00093$, ce qui peut passer pour exact.

Ces corrections se rapprochent de celles qui ont été trouvées par la première branche où nous avions, comme ici, $u > 78°$.

171. Nous aurons ainsi, en multipliant par 100000,

$$
\begin{aligned}
o &= -1582 - 0.67834\,d\Pi - 270.3\,dp - 237600\,dh,\\
o &= -1697 - 0.63529\,d\Pi - 62.8\,dp - 216270\,dh,\\
o &= -1689 - 0.65250\,d\Pi + 43.1\,dp - 207390\,dh,\\
o &= -1979 - 0.60195\,d\Pi + 235.4\,dp - 189270\,dh,\\
o &= -2228 - 0.65194\,d\Pi + 246.1\,dp - 195979\,dh,\\
o &= -2544 - 0.69750\,d\Pi + 265.1\,dp - 200960\,dh,\\
o &= -2880 - 0.78220\,d\Pi + 215.2\,dp - 217890\,dh,\\
o &= -3247 - 0.82810\,d\Pi + 234.9\,dp - 222560\,dh,\\
o &= -3873 - 0.83610\,d\Pi + 307.8\,dp - 216080\,dh.
\end{aligned}
$$

A la neuvième équation, j'ajoute la première et la deuxième dont j'ai changé les signes; la somme est

$$o = -594 + 0.4775\,d\Pi + 640.9\,dp + 2.37790\,dh.$$

Je fais la somme des équations 3, 4 et 5, et puis celle des équations 7 et 8; j'ai les deux équations suivantes :

$$
\begin{aligned}
o &= -5896 - 1.8792\,d\Pi + 524.6\,dp - 5.92630\,dh,\\
o &= -8671 - 2.3078\,d\Pi + 715.2\,dp - 6.41410\,dh.
\end{aligned}
$$

L'élimination donne pour la troisième apparition,

$$dh = +0.0160030,\quad h + dh = 0.599683,\quad dp = +0.8956,$$
$$p + dp = 72.562,\quad d\Pi = -2^s\,12'\,9'',\quad \Pi - 10^s\,0^\circ\,50'\,11''.$$

Portons ces valeurs dans nos neuf équations, elles se réduiront aux quantités ci-jointes, qui seront les erreurs des élémens corrigés :

	V — v
1	— 0.00247
2	— 0.00087
3	+ 0.00203
4	— 0.00015
5	+ 0.00015
6	— 0.00012
7	— 0.00028
8	— 0.00033
9	— 0.00446

Ces erreurs sont en général fort petites ; les deux extrêmes sont les plus fortes.

On peut donc en conclure que les trois apparitions se trouvent assez bien représentées, mais c'est par trois paraboles différentes.

172. Comparons ces trois paraboles :

$$
\begin{array}{llll}
\text{I....} & h = 0.58263, & p = 71.7397, & \Pi = 10^s\,2^\circ\,32'\,24'', \\
\text{II....} & h = 0.59483, & p = 72.2756, & \Pi = 10.4.\;1.57, \\
\text{III....} & h = 0.59968, & p = 72.5620. & \Pi = 10.0.50.11, \\
\hline
\text{milieu....} & h = 0.59232, & p = 72.1934, & \Pi = 10.2.28.11.
\end{array}
$$

Tout nous confirme qu'une seule parabole pourra difficilement se confondre avec un arc de 197° d'une ellipse aussi peu alongée.

173. Cherchons maintenant les élémens par les trois équations résultantes des trois apparitions,

$$
\begin{aligned}
0 &= -\;\;8896 - 9.0301\,d\Pi - 55300.7\,dp + 3155980\,dh, \\
0 &= -\;\;5869 + 0.2661\,d\Pi + 11623.9\,dp + \;\;226220\,dh, \\
0 &= -\,15161 - 3.8095\,d\Pi + \;\;1880.7\,dp - 1471830\,dh,
\end{aligned}
$$

nous trouverons

$$
\begin{aligned}
dh &= -\,0.00042971, & h + dh &= 0.58325, \\
dp &= +\,0.4074, & p + dp &= 72.0744, \\
d\Pi &= -\,1^\circ\,0'\,22'', & \Pi + d\Pi &= 10^s\,2^\circ\,2'\,0''.
\end{aligned}
$$

Voilà des corrections moins considérables ; nous pourrons les porter dans toutes nos équations, et voir de combien il s'en faudra qu'elles ne les réduisent à zéro ; mais il sera beaucoup plus sûr encore de recommencer sur ces élémens le calcul des quantités L, λ, v, Λ, V, V — v ; c'est ce que j'ai fait, et c'est ainsi que j'ai formé le tableau suivant, où l'on voit les (V — v) des premières équations, les (V' — v') des élémens corrigés. Il faut se souvenir que nous n'avons encore corrigé ni le nœud, ni l'inclinaison.

Jours de l'année.	V — v	V′ — v′	Λ — λ
21.297	— 0.00647	+ 0.00305	— 7′ 9″
22.	— 0.00739	+ 0.00133	— 6. 2
23.	— 0.00653	+ 0.00164	— 6.12
25.	— 0.00647	+ 0.00135	— 4.20
27.	— 0.00664	+ 0.00017	— 5.10
28.	— 0.00679	+ 0.00072	— 4.56
31.	— 0.00655	+ 0.00024	— 4.17
32.	— 0.00656	— 0.00014	— 3.58
34.	— 0.00667	— 0.00050	— 3.37
35.	— 0.00661	— 0.00056	— 3.20
42.	— 0.00752	— 0.00264	— 1.24
43.	— 0.00692	+ 0.00051	— 2.31
45.297	— 0.00783	+ 0.00376	— 0.19
90.649	— 0.00358	— 0.00138	— 7.27
91.	— 0.00438	+ 0.00069	— 7.59
95.	— 0.00524	— 0.00081	— 5.50
96.	— 0.00494	— 0.00005	— 6. 4
97.	— 0.00552	+ 0.00048	— 6. 8
103.	— 0.00710	— 0.00082	— 0.58
106.649	— 0.00813	— 0.00150	+ 2.67
121.447	— 0.01582	+ 0.00981	— 34.15
123.	— 0.01697	+ 0.00807	— 23.25
125.	— 0.01689	+ 0.00252	— 14.43
129.	— 0.01979	+ 0.00365	— 16.42
133.	— 0.02228	+ 0.00233	— 10.50
137.	— 0.02544	+ 0.00147	— 10.17
141.	— 0.02880	+ 0.00071	— 9.12
145.	— 0.03244	— 0.00051	— 8. 8
149.447	— 0.03873	— 0.00412	— 6.58

174. On voit d'abord qu'en général les (V — v) ont changé de signe, ce qui peut faire soupçonner que les corrections données par les équations de condition sont un peu trop fortes.

La seconde apparition paraît fort bien représentée, et un léger changement sur Π soit en plus, soit en moins, n'en changera guères les erreurs.

La troisième apparition prouve de même que nos corrections sont un peu trop fortes ; il n'y a guères que la dernière qui paraisse indiquer le besoin de corrections plus fortes.

Nous avons diminué Π de 1° 0′ 22″, on pourra maintenant y ajouter 10 ou 15′, et l'on diminuera les plus fortes erreurs ; mais par là on augmente un peu celles qui sont restées de même signe. Ainsi, quoique nous nous soyons singulièrement rapproché de nos observations, on voit toujours la difficulté de satisfaire à tout avec une seule parabole.

175. Après avoir fait tout ce qui nous est possible pour les longitudes, il faut corriger les latitudes. L'équation est

$$0=(\Lambda-\lambda)+\tang I\cos^2\lambda\cos(L-\Omega)d\Omega-\operatorname{s\acute{e}c}^2 I\cos^2\lambda\sin(L-\Omega)\,dI,$$

qui, pour une comète rétrograde, devient

$$0=(\Lambda-\lambda)-m\tang I\cos^2\lambda\cos(\Omega-L)\,d\Omega-\operatorname{s\acute{e}c}^2 I\cos^2\lambda\sin(\Omega-L)\,dI.$$

Nous négligeons les termes dépendans de du et $d\Pi$, parce que nous avons corrigé ces erreurs. Nous aurons ainsi les équations suivantes :

$$0=-\ 429''-0.2990\,d\Omega-0.3486\,dI,$$
$$0=-\ 440-0.2975\,d\Omega-0.3607\,dI,$$
$$0=-\ 372-0.2960\,d\Omega-0.3738\,dI,$$
$$0=-\ 260-0.2924\,d\Omega-0.4007\,dI,$$
$$0=-\ 310-0.2883\,d\Omega-0.4288\,dI,$$
$$0=-\ 296-0.2861\,d\Omega-0.4432\,dI,$$
$$0=-\ 257-0.2786\,d\Omega-0.4883\,dI,$$
$$0=-\ 238-0.2758\,d\Omega-0.5039\,dI,$$
$$0=-\ 217-0.2696\,d\Omega-0.5360\,dI,$$
$$0=-\ 200-0.2662\,d\Omega-0.5526\,dI,$$
$$0=-\ 84-0.2357\,d\Omega-0.6753\,dI,$$
$$0=-\ 151-0.2302\,d\Omega-0.6938\,dI,$$
$$0=-\ 19-0.2516\,d\Omega-0.5888\,dI,$$
$$0=-\ 447+0.3010\,d\Omega-0.3318\,dI,$$
$$0=-\ 479+0.3047\,d\Omega-0.2965\,dI,$$
$$0=-\ 350+0.3145\,d\Omega-0.1656\,dI,$$
$$0=-\ 664+0.3116\,d\Omega-0.1312\,dI,$$
$$0=-\ 368+0.3172\,d\Omega-0.1008\,dI,$$
$$0=-\ 58+0.3182\,d\Omega+0.0609\,dI,$$

$$
\begin{aligned}
o &= + \quad 127 + 0.3161\,d\Omega + 0.1309\,dI,\\
o &= - \ 2054 + 0.2942\,d\Omega + 0.3809\,dI,\\
o &= - \ 1405 + 0.2911\,d\Omega + 0.4047\,dI,\\
o &= - \quad 883 + 0.2883\,d\Omega + 0.4252\,dI,\\
o &= - \ 1002 + 0.2811\,d\Omega + 0.4704\,dI,\\
o &= - \quad 650 + 0.2745\,d\Omega + 0.5080\,dI,\\
o &= - \quad 617 + 0.2680\,d\Omega + 0.5412\,dI,\\
o &= - \quad 552 + 0.2618\,d\Omega + 0.5709\,dI,\\
o &= - \quad 448 + 0.2557\,d\Omega + 0.5974\,dI,\\
o &= - \quad 418 + 0.2499\,d\Omega + 0.6213\,dI,\\
\hline
o &= - \ 6645 + 8.1166\,d\Omega + 10.0806\,dI,\\
o &= + \ 1609 - 6.0776\,d\Omega - 12.1320\,dI,\\
\hline
o &= - \ 818.71 + d\Omega + 1.2420\,dI,\\
o &= + \ 264.84 - d\Omega - 1.9962\,dI,\\
\hline
o &= - \ 553.87 \qquad\qquad - 0.7542\,dI,
\end{aligned}
$$

$$dI = \frac{-553{,}87}{0.7542} = -12'\,14'' \qquad\qquad d\Omega = +28'\,51''$$

$$I = 17^\circ\,41'\,50'' \qquad\qquad 1^s\,22^\circ\,59'\,0''$$

$$I + dI = 17.29.36 \qquad\qquad \Omega + d\Omega = 1.23.27.51$$

176. Je prends la somme de ces équations en changeant les signes de manière que tous les coefficiens de $d\Omega$ soient positifs; je fais la même chose de manière que tous ceux de dI soient négatifs, et je trouve $d\Omega = +28'\,51''$ et $dI = -12'\,14''$. Il est visible que ces changemens ne corrigeront pas toutes les erreurs à beaucoup près. Ainsi, dans la première équation, l'erreur qui était de $7'.9''$ deviendra $10'\,53''$: dans la dernière, l'erreur qui était de $6'\,58''$ deviendra $7'\,6''$. Il paraît donc plus difficile encore dans la parabole, de représenter les latitudes que les longitudes. En voici la raison :

177. Supposons h, p et Π bien connues, c'est-à-dire une parabole et une ellipse décrites sur le même axe et autour du même foyer. Les anomalies u croîtront d'abord plus vite dans la parabole que dans l'ellipse; la différence qui est nulle au périhélie, sera déjà de $13'\,40''$ à 42°; elle décroîtra ensuite jusqu'à 78°; alors elle deviendra négative, et sera de $30'$ à 105°, de $37'\frac{1}{2}$ à 110°. Ainsi, dans l'intervalle de 42°

à 110, l'erreur aura varié de 51′ 10″ : voilà pour une branche de l'ellipse; dans l'autre, les anomalies ont varié de 91° à 65°; l'erreur parabolique a passé de — 12′ à + 8′, la différence est de 20′.

Avant le périhélie, l'argument de latitude était

$$C = (\Omega - \Pi - u) \quad \text{et} \quad dC = d\Omega - du.$$

Après le périhélie, l'argument était

$$C = (\Omega - \Pi + u), \quad dC = d\Omega + du;$$

la latitude est donc affectée différemment par l'erreur de l'anomalie, tantôt positive et tantôt négative, agissant dans un sens, et puis dans un autre sur l'argument C : toutes nos équations de condition sont donc essentiellement fausses, et l'élimination ne peut nous donner que peu de lumières sur la correction du nœud et sur celle de l'inclinaison, lorsque l'arc est si grand et l'ellipse aussi peu alongée; et voilà sans doute pourquoi les astronomes qui déterminent l'orbite par deux observations assez rapprochées et par une troisième observation plus éloignée, et qui ensuite déterminent le nœnd et l'inclinaison par les deux observations extrêmes, ne peuvent jamais représenter la latitude intermédiaire; mais l'erreur qu'ils sont forcés d'y laisser est ordinairement légère, parce que la seconde observation étant peu distante de la première à laquelle ils ont rigoureusement satisfait, l'écart ne peut être bien sensible. Ils attribuent cet écart à l'erreur des observations qui, par leur manière d'opérer, doit être portée toute entière sur la seconde latitude. Cette cause d'erreur n'est que trop réelle, mais celle de la parabole ne l'est pas moins, et elle est bien plus forte.

Mais supposons, ce qui était fort possible, que notre comète n'eût été observée que de 14 à 68° d'anomalie, l'erreur de l'anomalie aurait été + 7′ dans les deux observations extrêmes; il n'en serait rien résulté sur l'inclinaison, l'erreur du nœud aurait été de 7′, les erreurs de latitude beaucoup moindres; on eût pu les attribuer aux observations. Dans cette hypothèse, la comète eût décrit un arc de 54°; on se serait cru sûr de la bonté de l'orbite, et l'on se serait abusé. Combien de comètes ont décrit des arcs beaucoup moindres pendant leur apparition, on ne peut donc compter sur leurs orbites.

178. Pour remplacer nos équations de condition dans le cas présent, la grandeur

la grandeur de l'arc nous fournit un moyen, le meilleur que nous puissions employer, mais qui n'est pas lui-même absolument rigoureux.

L'erreur parabolique est nulle à 78°, et fort petite dans les environs.

Le 4 février, l'anomalie étant de 75°,

$$L = 21^\circ\, 59'\, 43'', \qquad \lambda = 9^\circ\, 16'\, 24''.$$

Le 16 mars, l'anomalie étant de 76°,

$$L' = 7^s\, 16^\circ\, 11'\, 51'', \qquad \lambda' = -2^\circ\, 7'\, 26'',$$

d'où je conclus qu'à $1^s\, 16^\circ\, 11'\, 51''$ de longitude, répond

$$\lambda = +2^\circ\, 7'\, 26''.$$

Je calcule

$$\tang(x + \tfrac{1}{2}dL) = \frac{\tang\frac{1}{2}dL \sin(\lambda + \lambda')}{\sin(\lambda - \lambda')} = 18^\circ\, 47'\, 58''$$

$$\tfrac{1}{2}dL = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ 12.\ 6.\ 4$$

$$x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ 6.41.54$$

$$x + dL = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ 30.54.\ 2,$$

$$\Omega = 1^s\, 16^\circ\, 11'\, 51'' + x = 1^s\, 22^\circ\, 53'\, 45''$$

$$= 21^\circ\, 59'\, 43'' + 30^\circ\, 54'\, 2'' = 1^s\, 22^\circ\, 53'\, 45'',$$

$$\tang I = \frac{\tang \lambda}{\sin x} = \frac{\tang \lambda'}{\sin(x + dL)} = 17^\circ\, 38'\, 16''.$$

On pourrait faire des calculs semblables sur les observations voisines; mais on voit par cet exemple que la correction du nœud supposé est $-5'\, 15''$, celle de l'inclinaison $-3'\, 34''$: on peut donc croire le nœud et l'inclinaison connus à très-peu près; on ne pourra connaître mieux ces élémens qu'après avoir déterminé l'ellipse.

179. Il est fort probable en général que la véritable orbite est elliptique : si elle était hyperbolique ou parabolique, ce serait une recherche bien vaine que celle de l'orbite, dans le cas d'une comète qui se serait montrée à nous seulement pendant quelques semaines pour ne reparaître jamais. Les comètes elliptiques sont donc les seules qui puissent nous intéresser; quand elles ont déjà paru, comme celle de 1759, on a le grand axe. Au lieu de calculer les (T′ — T) dans la parabole, on les calcule pour l'ellipse; on arrive ainsi à des élémens plus approchés, qui se perfectionneront successivement à chaque apparition nouvelle,

en tenant compte des perturbations que la comète aura pu éprouver. MM. Lagrange et Laplace en ont donné le moyen, et tout nouvellement une Académie vient de proposer ce sujet au concours.

Si la comète est observée pour la première fois, et qu'une parabole la représente passablement, c'est une peine assez inutile que de chercher une ellipse que les perturbations pourront altérer, et qui sera toujours fort incertaine; car si la parabole satisfait à un certain point aux observations, on trouvera facilement plusieurs ellipses qui y satisferont mieux encore, et entre lesquelles il sera difficile de faire un choix.

Si l'on reconnaît, par les moyens que nous venons d'exposer, l'impossibilité de satisfaire à toutes les observations par une seule parabole, on aura raison de croire que l'ellipse est peu alongée; alors on pourra supposer un demi-grand axe de 10, 20, 30, etc. La supposition qui satisfera le mieux aux observations vous donnera les élémens véritables. Nous avons, dans les recherches précédentes, remarqué plus d'une fois que nos essais, qui étaient malheureux dans la parabole, auraient beaucoup mieux et beaucoup plutôt réussi dans l'ellipse, avec le demi-axe de notre comète; ainsi il nous en aurait beaucoup moins coûté pour avoir l'orbite véritable, si le hasard nous eût conduit à supposer un demi-axe de 18 à 20. Nous n'avons donc rien à ajouter, et tout le travail se réduira à essayer successivement plusieurs demi-axes. Au reste, pour sentir le besoin de recourir à l'ellipse, il faudra que l'arc parcouru soit considérable, sans quoi l'on trouverait toujours une parabole; en effet, nous sommes parvenus à représenter séparément les trois apparitions de la comète. Notre dernière parabole satisfait passablement à l'arc total, et nos derniers élémens diffèrent peu de ceux que nous avons pris pour base de nos calculs.

180. Dès qu'on aura satisfait à deux intervalles $(T''-T)$, on aura trois rayons vecteurs avec les angles compris; il n'en faut pas davantage pour déterminer l'ellipse par la méthode (XXI. 228). On peut déterminer les u par notre formule (42), alors on cherchera le demi-grand axe a par la formule $a = \frac{(v \cos u - h)}{2v \cos^2 \frac{1}{2} u - sh}$ (4, page 200).

181. Si l'on ne retrouve pas a tel qu'on l'a supposé, on recommencera le calcul avec une valeur différente, jusqu'à ce que tout s'accorde; mais il sera toujours difficile de répondre de la vraie valeur

de a; un premier retour de la comète ne donne pas la durée moyenne de la révolution, ni la vraie valeur de a; la comète de 1759 a reparu à des intervalles de 75 et de 76 ans. Clairaut, le premier, a démontré analytiquement que la différence des révolutions observées était un effet des perturbations, principalement de Jupiter. Nous avons un exemple bien plus frappant de ces effets, dans la comète de 1770, qu'on n'a pu représenter que par une ellipse de $5\frac{1}{2}$ ans. A ce compte, elle aurait dû reparaître sept fois depuis sa première apparition. M. Burckhardt a fait des efforts inutiles pour satisfaire aux observations autrement que par une ellipse qui diffère très-peu de celle que Lexell avait trouvée dans le tems. M. Laplace a démontré que l'orbite avait dû être totalement changée par l'attraction de Jupiter, dont elle avait dû passer si près, qu'elle avait traversé les orbites des satellites; or comme elle n'a dérangé en rien le cours ordinaire de ces petites planètes, on en peut conclure en passant que la masse de la comète était bien peu de chose. Quoi qu'il en soit, elle n'a pas reparu, le grand axe de son orbite a dû être considérablement agrandi, sa révolution devenir plus longue, ses apparitions moins fréquentes; et comme elle doit toujours être fort éloignée de la terre, on peut conjecturer qu'on ne la reverra plus, et son ellipse nous devient même inutile, puisqu'il nous est impossible de calculer les perturbations qu'elle aura pu éprouver dans une orbite variable et inconnue.

182. On a essayé quelquefois des orbites hyperboliques sans beaucoup de succès, et peut-être sans raison bien déterminante, elles n'ont pas mieux réussi que la parabole pour la comète de 1770; ainsi pour les calculs de l'orbite hyperbolique, nous nous bornerons à dire qu'il faut changer les signes de a et de $m=\frac{h}{a}$ dans les formules elliptiques (4,7,54.)

183. La méthode que nous venons d'exposer nous paraît devoir réussir dans tous les cas; nous avons vu (158) qu'un mouvement géocentrique de 8' en longitude, et d'un degré en latitude, pendant un intervalle de 8 jours, nous avait conduits à une approximation sinon fort exacte, au moins fort suffisante pour un premier essai; il est difficile qu'il se rencontre des circonstances plus défavorables; et alors même il est plus que probable que d'autres méthodes ne réussiraient pas mieux; ces méthodes se sont multipliées depuis les premiers calculs de Newton et Halley jusqu'à nos jours. Il n'est presque pas un géomètre

ou un astronome distingué, qui ne se soit exercé sur ce problème, que Newton qualifiait de très-difficile; il l'est véritablement, par l'analyse, qui conduit à des équations du sixième ou du septième degré; mais nous venons de voir combien il est devenu simple, par la méthode trigonométrique. Cependant comme quelques personnes préfèrent les solutions analytiques, nous donnerons une idée de celles qui nous paraissent les plus faciles et les plus sûres; nous commencerons par la méthode de M. Olbers, qui n'a point encore été exposée en français, et qui d'ailleurs est tout-à-la-fois l'une des plus simples et des plus ingénieuses qu'on ait imaginées.

Méthode de M. Olbers.

184. Nous suivrons la marche de l'auteur, en ajoutant quelques développemens et quelques démonstrations qu'il a cru pouvoir supprimer, comme bien connues ou faciles à trouver.

Soit (fig. 73) S le soleil, A, B, C les trois lieux héliocentriques de la comète, AC la corde qui joint les deux positions extrêmes, a, b, c les trois lieux de la terre et ac la corde qui joint les deux extrémités de l'arc qu'elle a décrit, Dd la droite qui joint les intersections des deux cordes avec les rayons vecteurs de la seconde observation.

Soient t' et t'' les intervalles de tems moyen entre les trois observations, $t'+t''$ sera l'intervalle entre A et C, a et c; rigoureusement

$$t' : t'' :: \text{sect. ASB} : \text{sect. BSC}$$
$$:: \text{sect. } a\text{S}b : \text{sect. } b\text{S}c.$$

Supposons, par approximation,

$$t' : t'' :: \text{triangle ASD} : \text{triangle DSC}$$
$$:: \text{triangle } a\text{S}d : \text{triangle } d\text{S}c.$$

Nous avons vu dans l'exposition de la méthode de M. Gauss pour les planètes, que quand on compare ainsi deux secteurs consécutifs, l'erreur est fort petite.

Nous aurons à peu près

$$t' : t'' :: \text{AD} : \text{DC} :: ad : dc;$$

car les triangles qui ont même sommet et les bases sur une même droite, sont entre eux comme ces bases.

Cette supposition est dans le fonds la même que celle qui ferait décrire aux deux corps, et d'un mouvement uniforme, les deux cordes au lieu des deux arcs.

185. Mais si la comète et la terre eussent réellement décrit les deux cordes, au lieu de voir dans la seconde observation, la comète en B avec l'élongation SbB, nous l'aurions vue en D avec l'élongation SdD; ainsi, dans cette hypothèse, il faut réduire le lieu B au lieu D, sur la corde.

Par les deux lieux extrêmes A et C, faisons passer un grand cercle de la sphère; cet arc, à moins d'un grand hasard, ne passera point par le lieu B, mais il passera nécessairement par le point où l'intersection D se projette sur la voûte céleste.

Par les lieux du soleil et de la comète, dans l'observation moyenne, faisons passer un autre arc de grand cercle; cet arc passera aussi par la projection du point D, car B, D, S, d, b sont dans un même plan; le point D est dans le plan du grand cercle qui passe par A et C; il est dans le plan BSd, qui passe par les lieux B et S; ces deux plans ne se confondraient que dans un seul cas, celui où la comète aurait son orbite couchée sur l'écliptique, ce qui n'a point encore été observé; donc le point où D sera vu doit être dans l'intersection de nos deux arcs.

186. Soit donc (fig. 74) CAN le premier de nos deux arcs, SDB le second. Par les deux lieux A et C de la comète, menons du pôle P de l'écliptique les cercles de latitude PAA', PCC'. Dans le triangle PAC nous connaissons les côtés PA et PC avec l'angle compris $APC = A'C' = a''' - a'$. Nous aurons

$$\cot A = \frac{\cot PC \sin PA}{\sin P} - \cos PA \cot P = \frac{\operatorname{tang} \beta''' \cos \beta'}{\sin(a''' - a')} - \sin \beta' \cot(a''' - a');$$

dans le triangle AA'N, nous aurons

$$\cot \pi = \cot NA' = \frac{\cot NAA'}{\sin AA'} = \frac{\cot A}{\sin \beta'} = \frac{\operatorname{tang} \beta''' \cot \beta'}{\sin(a''' - a')} - \cot(a''' - a');$$

longitude du point d'intersection N = longit. du point $A' - A'N = a' - \pi$.
Le triangle NAA' donne encore

$$\operatorname{tang} N = \frac{\operatorname{tang} AA'}{\sin NA'} = \frac{\operatorname{tang} \beta'}{\sin \pi}.$$

L'auteur donne ces deux formules sans démonstration ; de la première on tire

$$\tang\pi = \frac{\sin(a''-a')}{\tang\beta''\cot\beta'-\cos(a''-a')} = \frac{\sin(a''-a')\tang\beta'\cot\beta''}{1-\cos(a''-a')\tang\beta'\cot\beta''};$$

alors nous reconnaîtrons les formules dont nous nous sommes servis (XVII. 13) pour déterminer la position de l'écliptique par rapport à l'équateur.

Ces formules supposent les latitudes croissantes, ainsi que les longitudes, et de plus, que la longitude du soleil surpasse celle de la comète.

187. Dans le triangle BB'S nous avons $\tang BB' = \sin B'S \tang S$,

$$\tang S = \frac{\tang BB'}{\sin B'S} = \frac{\tang\beta''}{\sin(A''-a'')};$$

car B'S est la différence de longitude entre le soleil et le second lieu de la comète ;

$$\text{l'arc } SN = \text{longit. } S - \text{longit. } N = A'' + \pi - a'.$$

188. Dans le triangle DNS, où l'on connaît la base SN et les deux angles S et N, on aura

$$\cot DN = \cot SN \cos N + \frac{\sin N \cot S}{\sin SN}$$
$$= \cot(A''+\pi-a')\cos N + \frac{\sin N \cot S}{\sin(A''+\pi-a')},$$
$$\cot ND' = \frac{\cot DN}{\cos N} = \cot(A''+\pi-a') + \frac{\tang N \cot S}{\sin(A''+\pi-a')} = \cot\sigma;$$
$$\text{longitude } D' = \text{arc } ND' + \text{longit. } N = \sigma + a' - \pi = c'',$$

$\tang DD' = \tang N \sin ND' = \sin\sigma \tang N = \frac{\tang\beta' \sin\sigma}{\sin\pi} = \tang\gamma''$. c'' est la longitude du point D, et γ'' sa latitude. Il faudra substituer ces quantités à a'' et β''.

*189. Cette partie de la solution est un problème de Trigonométrie sphérique qui peut se calculer de bien des manières différentes ; nous avons vu celle de M. Gauss (XXVII. 197) et celle que nous y avons substituée au même endroit. Lambert paraît être le premier qui se soit occupé

de ce problème. Voyez sa solution, dans la Cométographie de Pingré, tome II.

Lambert tire de cette construction un théorème curieux qui sert à déterminer si la comète est plus voisine ou plus éloignée du soleil que la terre. Si SD est plus grand que SB, la comète est plus voisine; si SD est moindre que SB, la comète est plus éloignée. Le peu d'utilité de ce théorème, et le peu d'espace, me forcent à supprimer la démonstration, qui est assez compliquée. Lambert supposait aussi que les cordes étaient coupées proportionnellement au tems, ainsi tout ce commencement paraît lui appartenir; mais ce qu'on ne peut contester à M. Olbers, c'est la manière ingénieuse dont il a su l'employer.

190. Soit maintenant ADC (fig. 75) la corde de la comète projetée orthographiquement sur l'écliptique; on aura encore

$$t' : t'' :: AD : CD :: ad : cd;$$

$$\begin{array}{l}
CO : \sin D :: CD : \sin O \\
\sin D : AM :: \sin M : AD \\
\hline
CO : AM :: CD\sin M : AD\sin O :: t''\sin(c''-a') : t'\sin(a'''-c'');
\end{array}$$

car les points M, N, O peuvent être, sans erreur, considérés comme le centre de la sphère étoilée; on aura de même

$$\begin{array}{l}
cO : \sin d :: cd : \sin O \\
\sin d : aM :: \sin M : ad \\
\hline
cO : aM :: cd\sin M : ad\sin O :: t''\sin(c''-a') : t'\sin(a'''-c'') \\
CO : AM \qquad :: t''\sin(c''-a') : t'\sin(a'''-c'') \\
\hline
CO+cO : AM+aM :: Cc : Aa :: t''\sin(c''-a') : t'\sin(a'''-c''), \\
\rho''' : \rho' :: t''\sin(c''-a') : t'\sin(a'''-c''), \\
\rho''' = \rho' \dfrac{t''\sin(c''-a')}{t'\sin(a'''-c'')} = M\rho'.
\end{array}$$

On voit que ρ', ρ'', ρ''' sont les distances accourcies de la comète à la terre.

191. Ici l'auteur remarque que cette manière de déterminer le rapport entre les rayons extrêmes ρ' et ρ''' n'est pas toujours assez sûre, ni assez commode. Elle devient incertaine quand les différences de

longitude $(c''-a')$ et $(a'''-c'')$ sont de trop petits arcs, ce qui arrive quand l'inclinaison de l'orbite est très-considérable, car alors tout le mouvement se porte en latitude. Si les observations ne sont pas bien précises, on pourra s'épargner le calcul de σ, car la différence de longitude entre B' et D', ou a'' et c'', qui est toujours assez petite, se perdra parmi les erreurs des données; alors on fera simplement

$$\frac{\varepsilon'''}{\varepsilon'} = \mathrm{M} = \frac{t'' \sin(a''-a')}{t' \sin(a'''-a'')}.$$

192. Toutes les projections orthographiques de la corde seront coupées proportionnellement aux tems; on peut donc choisir tout autre plan que celui de l'écliptique; on peut prendre un plan perpendiculaire à l'écliptique, c'est-à-dire un cercle de latitude, et choisir celui qui est perpendiculaire au rayon vecteur de la terre dans la seconde observation; Lambert en avait déjà donné l'exemple.

Soit SC'D'A'ADC (fig. 76) la projection de la fig. 74 sur le plan de ce cercle de latitude. Nous aurons

$$\mathrm{AA'} = \rho' \,\mathrm{tang}\, \beta', \quad \mathrm{SA'} = \rho' \sin(\mathrm{A''}-a'),$$

$$\mathrm{tang\,ASA'} = \mathrm{tang}\, b' = \frac{\rho' \,\mathrm{tang}\, \beta'}{\rho' \sin(\mathrm{A''}-a')} = \frac{\mathrm{tang}\, \beta'}{\sin(\mathrm{A''}-a')},$$

$$\mathrm{tang\,DSD'} = \mathrm{tang}\, b'' = \frac{\mathrm{tang}\, \gamma''}{\sin(\mathrm{A''}-c'')} = \frac{\mathrm{tang}\, \beta''}{\sin(\mathrm{A''}-a'')} \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{fig. } 74).$$

On voit que dans ce système de projection il est inutile de calculer c'' et γ'' :

$$\mathrm{tang\,CSC'} = \frac{\mathrm{tang}\, \beta'''}{\sin(\mathrm{A''}-a''')}, \quad \mathrm{ASD} = b''-b', (\text{fig. } 76),$$

$$\mathrm{CSD} = b'''-b'', \quad \mathrm{ASC} = b'''-b'.$$

Soient

$$\mathrm{SA} = \delta, \quad \mathrm{SC} = \mathrm{N}\delta, \quad \mathrm{SA'} = \rho' \sin(\mathrm{A''}-a') = \delta \cos b'$$

$$\delta = \frac{\rho' \sin(\mathrm{A''}-a')}{\cos b'}, \quad \rho' = \frac{\delta \cos b'}{\sin(\mathrm{A''}-a')}, \quad \rho''' = \frac{\mathrm{N}\delta \cos b'''}{\sin(\mathrm{A''}-a''')} = \mathrm{M}\rho',$$

$$\begin{array}{llll} \sin \mathrm{D} : \mathrm{SA} :: & \sin(b''-b') & : & \mathrm{AD}, \\ \mathrm{SC} : \sin \mathrm{D} :: & \mathrm{DC} & : & \sin(b'''-b'') \\ \hline \mathrm{SC} : \mathrm{SA} :: & \mathrm{DC} \sin(b''-b') & : & \mathrm{AD} \sin(b'''-b''), \\ \mathrm{N}\delta : \delta :: & t'' \sin(b''-b') & : & t' \sin(b'''-b''), \end{array}$$

ρ

$$N = \frac{t''' \sin(b''-b')}{t' \sin(b'''-b'')}, \quad \rho''' = \frac{t''' \sin(b''-b')}{t' \sin(b'''-b'')} \cdot \frac{\rho' \sin(A''-\alpha')}{\cos b'} \cdot \frac{\cos b'''}{\sin(A''-\alpha''')},$$

$$M = \frac{\rho'''}{\rho'} = \frac{t'''}{t'} \cdot \frac{\cos b'''}{\cos b'} \cdot \frac{\sin(b''-b')}{\sin(b'''-b'')} \cdot \frac{\sin(A''-\alpha')}{\sin(A''-\alpha''')}$$

$$= \frac{t'''}{t'} \frac{\cos b'' \cos b''' \sin(A''-\alpha') \sin(b''-b')}{\cos b' \cos b'' \sin(A''-\alpha''') \sin(b'''-b'')} = \frac{t''' \sin(A''-\alpha')(\text{tang}\, b''-\text{tang}\, b')}{t' \sin(A''-\alpha''')(\text{tang}\, b'''-\text{tang}\, b'')}$$

$$= \frac{t'''}{t'} \left(\frac{\text{tang}\, b'' \sin(A''-\alpha') - \text{tang}\, b' \sin(A''-\alpha')}{\text{tang}\, b''' \sin(A''-\alpha''') - \text{tang}\, b'' \sin(A''-\alpha''')} \right)$$

$$= \frac{t'''}{t'} \left\{ \frac{\dfrac{\text{tang}\, \beta'' \sin(A''-\alpha')}{\sin(A''-\alpha'')} - \dfrac{\text{tang}\, \beta' \sin(A''-\alpha')}{\sin(A''-\alpha')}}{\dfrac{\text{tang}\, \beta''' \sin(A''-\alpha''')}{\sin(A''-\alpha''')} - \dfrac{\text{tang}\, \beta'' \sin(A''-\alpha''')}{\sin(A''-\alpha'')}} \right\}$$

$$= \frac{t'''}{t'} \left(\frac{m \sin(A''-\alpha') - \text{tang}\, \beta'}{\text{tang}\, \beta''' - m \sin(A''-\alpha''')} \right),$$

en faisaut, pour abréger, $\frac{\text{tang}\, \beta''}{\sin(A''-\alpha'')} = m = \text{tang}\, b''$.

193. Nous aurons maintenaut

$$r'^2 = R'^2 + \frac{\rho'^2}{\cos^2 \beta'} - 2R' \frac{\rho'}{\cos \beta'} \cos(A'-\alpha') \cos \beta'$$
$$= R'^2 + \rho'^2 \text{séc}^2 \beta' - 2R\rho' \cos(A'-\alpha');$$

car la distance des centres de la terre et de la comète $= \frac{\rho'}{\cos \beta'}$, puisque ρ' est la distance accourcie; l'angle à la terre entre les centres du soleil et de la comète est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont $(A'-\alpha')$ est la base, et β' le côté perpendiculaire, le cosinus de cet angle $= \cos(A'-\alpha')\cos \beta'$, et cet angle appartient au triangle rectiligne entre les trois centres. On aura donc les deux équations

$$r'^2 = R'^2 + \rho'^2 \text{séc}^2 \beta' - 2R'\rho' \cos(A'-\alpha'),$$
$$r'''^2 = R'''^2 + \rho'''^2 \text{séc}^2 \beta''' - 2R'''\rho''' \cos(A'''-\alpha''').$$

194. Il reste à déterminer la corde AC = K. La position de la comète, relativement au soleil, se détermine au moyen des trois coor-

données x, y, z; or

$$x'=\rho'\cos\alpha'-R'\cos A',\quad y'=\rho'\sin\alpha'-R'\sin A',\quad z'=\rho'\operatorname{tang}\beta'.$$

Ces expressions sont du genre de celles que nous avons données (XXX. 24); mais les x et les y sont ici dans le plan de l'écliptique, ce qui les simplifie. Mettez deux accens de plus, et vous aurez les coordonnées de la troisième observation.

195. Mais

$$r'^2=x'^2+y'^2+z'^2,\ r''^2=x''^2+y''^2+z''^2,\ r'''^2=x'''^2+y'''^2+z'''^2.$$

Soit K′ la corde entre la première et la deuxième observation, K″ la corde entre la première et la troisième,

$$\begin{aligned}
K'^2 &= (x''-x')^2+(y''-y')^2+(z''-z')^2,\\
K''^2 &= (x'''-x')^2+(y'''-y')^2+(z'''-z')^2,\\
&= x'''^2+x'^2-2x'x'''+y'''^2+y'^2-2y'y'''+z'''^2+z'^2-2z'z'''\\
&= r'''^2+r'^2-2x'x'''-2y'y'''-2z'z'''.
\end{aligned}$$

Mettons dans cette expression les valeurs des x, des y et des z (194), nous aurons, après les réductions,

$$\begin{aligned}
K''^2=r'^2+r'''^2-2R'R'''\cos(A'''-A')+2\rho'R'''\cos(A'''-\alpha')\\
+2M\rho'R'\cos(A'-\alpha''')-2M\rho'^2\cos(\alpha'''-\alpha')-2M\rho'^2\operatorname{tang}\beta'\operatorname{tang}\beta''';
\end{aligned}$$

en réunissant toutes les quantités connues, on arrivera à une équation

$$K''^2 = F + G\rho' + H\rho'^2,$$

où il n'y a qu'une seule inconnue.

196. Or, d'après le célèbre théorème de Lambert,

$$T = C\left(\frac{r'+r''+K''}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - C\left(\frac{r'+r''-K''}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Faites pour ρ' la supposition que vous jugerez la plus probable; vous en déduirez K″, et si cette corde satisfait au théorème, vous pourrez calculer la parabole; si la première supposition ne réussit pas, vous en tenterez plusieurs successivement; le progrès des erreurs vous con-

duira bientôt à la véritable valeur. M. Olbers assure que jamais on n'aura besoin de six hypothèses ; quatre suffisent communément, rarement la cinquième sera nécessaire.

197. Quand ρ' sera connu, on en déduira directement r', r''', et $\rho''' = M\rho'$. Soient λ' et λ''' les latitudes héliocentriques ; nous aurons

$$\sin\lambda' = \frac{\rho' \operatorname{tang}\beta'}{r'}, \qquad \sin\lambda''' = \frac{\rho''' \operatorname{tang}\beta'''}{r'''}.$$

Soient ϵ' et ϵ''' les angles au soleil,

$$\sin\epsilon' = \frac{\rho' \sin(A' - \alpha')}{r' \cos\lambda'}, \qquad \sin\epsilon''' = \frac{\rho''' \sin(A''' - \alpha''')}{r''' \cos\lambda'''}.$$

Soient C', C''' les longitudes héliocentriques, ω l'argument de latitude compté sur l'écliptique pour la première observation ; nous aurons

$$\cot\omega = \frac{\operatorname{tang}\lambda''' \cot\lambda'}{\sin(C''' - C')} - \cot(C''' - C').$$

Cette équation est la même, au fond, que celle de l'article 187. L'inclinaison se trouvera par la formule $\operatorname{tang} I = \frac{\operatorname{tang}\lambda'}{\sin\omega}$.

Soient u' et u''' les argumens de latitude dans l'orbite,

$$\cos u' = \cos\omega \cos\lambda', \qquad \cos u''' = \cos\lambda''' \cos(\omega + C''' - C');$$

de cette manière $(u''' - u')$ sera en même tems la différence d'anomalie vraie.

Soit φ l'anomalie dans la première observation ; on aura

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \cot(u''' - u') - \frac{\left(\frac{r'}{r'''}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sin\frac{1}{2}(u''' - u')};$$

enfin la distance périhélie $\pi = r' \cos^2\frac{1}{2}\varphi$.

198. Soit $\chi = u''' - u'$; vous aurez

$$\cos\chi = \frac{r'^2 + r'''^2 - K''^2}{2r'r'''}, \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \cot\tfrac{1}{2}\chi - \frac{\left(\frac{r'}{r'''}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sin\frac{1}{2}\chi},$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\chi = \frac{K''^2 - (r''' - r')^2}{4r'r'''}, \quad \cos^2\tfrac{1}{2}\chi = \frac{(r''' + r')^2 - K''^2}{4r'r'''},$$

$$\cot^2\tfrac{1}{2}\chi = \frac{(r''' + r')^2 - K''^2}{K''^2 - (r''' - r')^2}, \quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{[(r''' + r')^2 - K''^2]^{\frac{1}{2}} - 2r'}{[K''^2 - (r''' - r')^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

199. M. Olbers rassemble ensuite les formules vraiment nécessaires; elles se réduisent aux suivantes :

$$m = \frac{\tang \beta''}{\sin(A''-\alpha'')}, \quad M = \frac{[m \sin(A''-\alpha') - \tang \beta']\, t''}{[\tang \beta''' - m \sin(A''-\alpha''')]\, t'},$$

$$r'^2 = R'^2 - 2R' \cos(A'-\alpha')\rho' + \text{séc}^2 \beta' \rho'^2,$$

$$r'''^2 = R'''^2 - 2MR''' \cos(A'''-\alpha''')\rho' + M^2 \text{séc}^2 \beta''' \rho'^2,$$

$$K''^2 = r'^2 + r'''^2 - 2R'R''' \cos(A'''-A') + 2R''' \cos(A'''-\alpha')\rho'$$
$$+ 2MR' \cos(A'-\alpha''')\rho' - 2M \cos(\alpha'''-\alpha')\rho'^2 - 2M \tang \beta' \tang \beta''' \rho'^2;$$

enfin

$$T = t' + t'' = C\left[\left(\frac{r' + r'' + K''}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{r' + r'' - K''}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right];$$

le reste est commun à toutes les méthodes.

200. Pour donner un exemple de ces calculs, nous pourrions choisir entre diverses comètes auxquelles nous avons appliqué cette méthode ; nous prendrons celui de M. Olbers, c'est-à-dire la comète de 1769. C'est aussi la première sur laquelle j'aie essayé ma méthode, qui m'a donné tout aussitôt une approximation suffisante. Voici les données.

Sept.	$4^j\,14^h\,0$	$\alpha' = 80°56'11''$	$\beta' = 17°51'39''$ A
	$8.14.0$	$\alpha'' = 101.\ 0.54$	$\beta'' = 22.\ 5.\ 2$
	$12.14.0$	$\alpha''' = 124.19.22$	$\beta''' = 23.43.55$

$A' = 162°42'\ 5''$ $\log R' = 0.003132$,
$A'' = 166.35.31$ $\log R'' = 0.002665$,
$A''' = 170.29.20$ $\log R''' = 0.002184$;

$$t'' = t' = 4^j{,}0, \quad t' + t'' = T = 8^j{,}0, \quad \frac{t''}{t'} = 1.$$

$A'' = 166.35.31$
$\alpha'' = 101.\ 0.54$

$A''-\alpha'' = 65.34.37$......C. sin... 0.0407118 (1)
$\beta'' = 22.\ 5.\ 2$...... tang... 9.6082375 (2)
log m... 9.6489493

$A'' = 166.35.31$
$\alpha' = 80.56.11$

$A''-\alpha' = 85.39.20$........ sin... 9.9987503 (3)
$m \sin(A''-\alpha') = 0.44432$................ 9.6476996 (4)

$$
\begin{array}{rll}
A'' = & 166.35.31 & \\
a''' = & 124.19.22 \quad \log m \ldots\ldots\ldots & 9.6489493 \\
A'' - a''' = & 42.16.\ 9 \ldots\ldots\ldots \sin\ldots & 9.8277662 \quad (5) \\
m\sin(A'' - a''') = & 0.29972 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 9.4767155 \quad (6) \\
\tang\beta''' = & 0.43964 & 9.6430931 \quad (7)\,(8) \\
 & 0.13992 = \tang\beta''' - m\sin(A'' - a''') &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rll}
\tang\beta' = 17^\circ.51'.39'' = & 0.32224 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 9.5081747 \quad (9) \\
m\sin(A'' - a') = & 0.44432 & \\
 & 0.12208 = m\sin(A'' - a') - \tang\beta' &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\log\ldots & 0.12208 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 9.0866445 \quad (10) \\
\text{C. } \log\ldots & 0.13992 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0.8541202 \quad (11) \\
\log M \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 9.9407647.
\end{array}
$$

201. On voit donc qu'il faut 11 log. différens pour arriver à celui de M; il en faudrait 13 si le rapport $\left(\frac{t''}{T}\right)$ n'était pas l'unité. On voit que dans la recherche de l'arc subsidiaire, M. Olbers ne fait aucune attention aux signes des tangentes; il ne peut y avoir aucun inconvénient, tant que les trois tangentes auront le même signe.

Il faut maintenant calculer r' et r'''.

$$
\begin{array}{rll}
R'^2 = & 1.01453 \ \log \ldots\ldots\ldots & 0.0062640 \quad (14) \\
A' = & 162.42.\ 5 \qquad 2\ldots & 0.3010300 \quad (15) \\
a' = & 80.56.11 \qquad R'\ldots & 0.0031320 \\
A' - a' = & 81.45.54 \ldots\ldots \cos\ldots & 9.1560447 \quad (16) \\
- & 0.28854 \ldots\ldots\ldots\ldots & 9.4602067 \quad (17) \\
\text{séc}^2\beta' = & +1.10384 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0.0429074 \quad (18);
\end{array}
$$

ainsi $r'^2 = 1.01453 - 0.28854\,\rho' + 1.10384\,\rho'^2$.

$$
\begin{array}{rll}
R'''^2 = & 1.01011 \ \log \ldots\ldots\ldots & 0.0043680 \quad (19) \\
A''' = & 170.29.20 \qquad 2\ldots & 0.3010300 \\
a''' = & 124.19.22 \qquad R'''\ldots & 0.0021840 \\
A''' - a''' = & 46.\ 9.58 \ldots\ldots \cos\ldots & 9.8404637 \quad (20) \\
 & \log M\ldots & 9.9407647 \\
 & -\ 1.214626 \ldots\ldots & 0.0844424 \quad (21)
\end{array}
$$

2 log M... 9.8815294
$\text{séc}^2 \beta''' = 23.43.55...$ 0.0767428 (22)
+ 0.90839..... 9.9582722 (23);

ainsi $r'''^2 = 1.01011 - 1.214626\,\rho' + 0.90839\,\rho'^2$.

Calcul de la corde.

202. − 0.3010300
R'...... 0.0031320
R'''...... 0.0021840
$\cos(A''' - A') = 7°\ 47'\ 15''$.......... 9.9959761 (24)
− 2.00596 − 0.3023221 (25)

$A''' = 170.29.20$ + 0.3010300
$a' = 80.56.11$ R'''...... 0.0021840
$A''' - a' = 89.33.\ 9$ cos........ 7.8926660 (26)
+ 0.0156993 .... 8.1958800 (27)

0.3010300
$A' = 162.42.\ 5$ log M + 9.9407647
$a''' = 124.19.29$ log R'... 0.0031320
$(A' - a''') = 38.22.36$....... cos... 9.8942863 (28)
+ 1.37788 .... + 0.1392130 (29)

$a''' = 124.19.22$ − 2M − 0.2417947
$a' = 80.56.11$ $\cos(a''' - a')$.. 9.8613778 (30)
$a''' - a' = 43.23.11$ 0.1031725 (31)
− 1.26816 − 2M − 0.2417947
tang β'... 9.5081747
tang β'''... 9.6430931
−.0.247345 − 9.3930625 (32)

$r'^2 = 1.01453 - 0.288540\,\rho' + 1.10384\,\rho'^2$
$r'''^2 = 1.01011 - 1.214626\,\rho' + 0.90839\,\rho'^2$
$+ 2.02464 - 1.503166\,\rho' + 2.01223\,\rho'^2$
$- 2.00596 + 0.015699\,\rho' - 1.26816\,\rho'^2$
$+ 1.377880\,\rho' - 0.24735\,\rho'^2$
$K''^2 = + 0.01868 - 0.109587\,\rho' + 0.49672\,\rho'^2$.

203. Supposez $\rho = 1$, $\rho'^2 = 1$.

$$
\begin{array}{rrl}
r'^2 = & & 1.01453 \\
& + & 1.10384 \\
& - & 0.28854 \\
\hline
r'^2 = & & 1.82983 \ldots \log\ 0.2624107 \quad (33) \\
r' = & & 1.35270 \ldots\ldots\ 0.1312053 \quad (34) \\
r'''^2 = & & 1.01011 \\
& & 0.90839 \\
\hline
& + & 1.91850 \\
& - & 1.21463 \\
\hline
r'''^2 = & + & 0.70387 \ldots \log\ 9.8474925 \quad (35) \\
r''' = & & 0.83897 \ldots\ldots\ 9.9237462 \quad (36) \\
r' = & & 1.35270 \\
\hline
r'+r''' = & & 2.19167 \\
\tfrac{1}{2}(r'+r'') = & & 1.095835 \\
K''^2 = & + & 0.01868 \\
& + & 0.49669 \\
\hline
& + & 0.51537 \\
& - & 0.10959 \\
\hline
K''^2 = & & 0.40578 \ldots \log\ 9.6082906 \quad (37) \\
K'' = & & 0.63701 \ldots\ldots\ 9.8041453 \quad (38). \\
\tfrac{1}{2}K'' = & & 0.318505 \\
\tfrac{1}{2}(r'+r'') = & & 1.095835 \\
\hline
\frac{r'+r''+K''}{2} = & & 1.414340 \\
\frac{r'+r''-K''}{2} = & & 0.707170
\end{array}
$$

$C =$ 27.40385	1.4378116	(39)		1.4378116	
1.414340	0.1505538	(40)		9.8495238	(42)
	0.0752769			9.9247619	
46.09383	1.6636423	(41)	$\log m$	1.2120973	(43)
$m \ldots$ 18.29661					

29.79722 = T, au lieu de 8,0; ρ' a donc été estimé beaucoup trop fort.

204. Soit $\rho' = 0{,}5$.

$$
\begin{aligned}
(r'^2) &= 1.01453\\
&\quad + 0.27596\\
&\quad - 0.14427\\
r'^2 &= 1.14622 \ldots \log 0.0592680 \quad (44)\\
r' &= 1.070615 \qquad 0.0296340 \quad (45)\\
r'''^2 &= 1.01011\\
&\quad\ \ 0.22704\\
&\quad - 0.60731\\
r'''^2 &= 0.62984 \ldots \log 9.7992302 \quad (46)\\
r''' &= 0.79362 \qquad 9.8996151 \quad (47)\\
r' &= 1.070615\\
r' + r''' &= 1.86424\\
\tfrac{1}{2}(r' + r''') &= 0.93212\\
K''^2 &= 0.01858\\
&\quad + 0.12417\\
&\quad + 0.14275\\
&\quad - 0.05479\\
K''^2 &= 0.08796 \qquad 8.9442852 \quad (48)\\
K'' &= 0.29658 \qquad 9.4721426 \quad (49)\\
&= 0.14838\\
\tfrac{1}{2}K'' &= 0.93212\\
\tfrac{1}{2}(r' + r'' + K'') &= 1.08050\\
\tfrac{1}{2}(r' + r'' - K'') &= 0.78374
\end{aligned}
$$

	1.4378116		1.4378116	
1.08041..	0.0335886	(50)	9.8942219	(52)
	0.0167945		9.9471180	
30.7786	1.4881943	(51)	1.2791445	(53)
19.0138				

11.7648 = T, au lieu de 8; ρ' est encore trop fort.

205.

205. Soit donc $\rho = \frac{1}{3}$.

$r'^2 = 1.01453$
0.12265

$+$ 1.13718
$-$ 0.09618

$r'^2 = 1.04100 \ldots\ldots 0.0174507$ (54)
$r' = 1.02030 \ldots\ldots 0.0087253$ (55)
$\frac{1}{2} r' = 0.51015$
ci-dessous $\frac{1}{2} r''' = 0.42017$

$\frac{1}{2}(r'+r''') = 0.93032$
ci-dessous $\frac{1}{2} \mathrm{K}'' = 0.09662$

$\frac{1}{2}(r'+r'''+\mathrm{K}'') = 1.02694$
$\frac{1}{2}(r'+r'''-\mathrm{K}'') = 0.83370$

$r'''^2 \ldots$ 1.01011
0.10093

1.11104
$-$ 0.40487

$r'''^2 \ldots 0.70617 \ldots\ldots 9.8489093$ (56)
$r''' = 0.84034 \ldots\ldots 9.9244546$ (57)

0.01868
0.05519

0.07387
$-$ 0.03653

$\mathrm{K}''^2 = 0.03734 \ldots\ldots 8.5721743$ (58)
$\mathrm{K}'' = 0.193236 \ldots\ldots 9.2860871$ (59)

	1.4378116		1.4378116	
	0.0115452	(60)	9.9210098	(62)
	0.0057726		9.9605049	
28.5187	1.4551294	(61)	1.3193263	(63)
20.8606				

7.7581 $=$ T, au lieu de 8,0 ; ainsi ρ' est trop petit.

$\frac{1}{2}$ donne 11.76, $\frac{1}{3}$ donne 7.76; $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ fait une variation de 4 jours.

On dira 4' : $\frac{1}{4}$, ou 16 : 1 :: $\frac{1}{6}$: $\frac{1}{6 \cdot 16} = \frac{1}{96}$, un peu plus que 0.01; ainsi au lieu de 0.33333, on doit supposer 0.344 environ. M. Olbers calcule à-la-fois pour 0.345 et 0.350.

206. Jusqu'ici nous avons fait des suppositions si simples, que nous pouvions substituer sans calcul logarithmique les valeurs de ρ' dans nos trois équations, il suffisait, pour $\frac{1}{2}$, de prendre la moitié et le quart; pour $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{9}$, ici nous devons employer le calcul logarithmique.

− 0.28854	9.4602060	+ 1.10314	0.0429062
0.345	9.5398191	$(0.345)^2$	9.0796382
− 0.100006	9.0000251 (64)		9.1225444 (65)
+ 0.132600			
+ 0.032554			
1.01453			
r'^2 = 1.047084	0.0199816 (66)		
r' = 1.02327	0.0099908 (67)		
− 1.214626	−0.0844426 (68)	0.90839...	9.9582723 (70)
0.345	9.5398191		9.0796382
− 0.42098	−9.6242617 (69)		9.0379105 (71)
+ 0.10912			
− 0.31186		$\frac{1}{2} r'$ =	0.511635
1.01011		$\frac{1}{2} r'''$ =	0.417805
r'''^2 = 0.69825	9.8440109 (72)	$\frac{1}{2}(r'+r''')$ =	0.929440
r''' = 0.83561	9.9220054 (73)	$\frac{1}{2}$ K″ =	0.100454
		$\frac{1}{2}(r'+r'''+K'')$ =	1.029894
		$\frac{1}{2}(r'+r'''-K'')$ =	0.828986
− 0.109587	9.0397592	+ 0.49669	9.6960854
	9.5398191		9.0796382
− 0.037982	8.5795783 (74)		8.7757236 (75)
+ 0.059666			
+ 0.021684			
0.01868			
+ 0.040364	8.6059942 (76)		
K″ = 0.200908	9.3029971 (77)		

	1.4378116		1.4378116
1.029894...	0.0127949	0.828986...	9.9185158 (80)
	0.0063975 (78)		9.9592579
28.6420	1.4570040 (79)		1.3155853 (81)
20.6816			

7.9604 = T, au lieu de 8; l'erreur est presqu'insensible, mais ρ' est un peu trop petit.

Cette hypothèse nous a coûté 21 logarithmes nouveaux; mais il y a six de ces logarithmes qui reviennent à chaque hypothèse; ainsi chaque hypothèse en demande 15 quand ces 6 sont une fois déterminés; soit n le nombre des hypothèses, $(15n+6)$ sera le nombre des logarithmes. Six hypothèses feront 96 logarithmes.

207. Soit maintenant $\rho' = 0.350$.

	− 9.4602060		+ 0.0429062
0.35........	9.5440680 (82)	$(0.35)^2$..	9.0881360
− 0.100989	− 9.0042740 (83)		+ 9.1310422 (84)
+ 0.135220			
+ 0.034231			
1.01453			
r'^2 = 1.04876....	0.0206762 (85)		
r' = 1.02409	0.0103381 (86)		
	− 0.0844426		+ 9.9582723
	9.5440680		9.0881360
− 0.42512	− 9.6285106 (87)		+ 9.0464083 (88)
+ 0.11127			
− 0.31385			
+ 1.01011			
r'''^2 = 0.69626	9.8427714 (89)		
r''' = 0.83442	9.9213857 (90)		
$\frac{1}{2} r'''$ = 0.41721			
$\frac{1}{2} r'$ = 0.51205			
0.92926 = $\frac{1}{2}(r'+r''')$			

— 9.0397592 + 9.6960854
9.5440680 9.0881360
— 0.038355 8.5838272 (91) 8.7842214 (92)
+ 0.060845
+ 0.022490
+ 0.01866
$K''' = 0.04115$ 8.6143698 (93)
$K'' = 0.20285$ 9.3071849 (94)
$\frac{1}{2} K'' = 0.10142$
$0.92926 = \frac{1}{2}(r'+r''')$
$1.03068 = \frac{1}{2}(r'+r'''+K'')$
$0.82784 = \frac{1}{2}(r'+r'''-K'')$

1.4378116 1.4378116
1.03068... 0.0131238 (95) 0.82784... 9.9179464 (97)
0.0065619 9.9589732
28.6746 1.4474973 (96) 1.3147312 (98)
20.6410
8.0336 = T. Ici ρ' est un peu trop fort.

208. La vérité est entre ces deux hypothèses; en les comparant

ρ'=0.345	r'=1.02327	r'''=0.83561	K''=0.200908	T=7.9604
0.350	1.02409	0.83442	0.200285	8.0336
+0.005	+0.00182	—0.00119	—0.000623	+0.0732,

$0.0732 : 0.0336 :: 0.005 : x :: 0.00182 : y :: 0.00119 : z$.

C. 0.0732......... 1.13549 (99)
0.0336......... 8.52634 (100)
9.66183 .... 9.66183
0.005.......... 7.69897 (101) 0.00182..... 7.26007 (103)
— 0.002295 7.36080 (102) 0.0008354 6.92190 (104)
0.350000 1.02409
$0.348705 = \rho'$ $r' = 1.0232546$

	9.66183			
0.00119.....	7.07555	(105)	$\log \rho'$...	9.5424581 (107)
0.0005462...	6.73738	(106)	$\log M$...	9.9407647
0.83442			$\log M\rho'$...	9.4832228
$r''' =$ 0.8349662				

209. Après avoir ainsi satisfait à nos équations, cherchons la parabole.

ρ'.............	9.5424581	$M\rho'$.............	9.4832228
C. r'..........	9.9900289 (108)	C. r'''...........	0.0783311 (110)
$\sin\beta'$..........	9.5081747	$\tang\beta'''$.........	9.6430931
$\sin\lambda' = 6°\,18'\,6''$..	9.0406617 (109)	$\sin\lambda''' = 9°\,13'\,5''$..	9.2046470 (111)
C. r'..........	9.9900289	C. r'''...........	0.0783311
ρ'.............	9.5424581	$M\rho'$.............	9.4832228
$\sin(A' - a')$....	9.9954987 (112)	$\sin(A''' - a''')$....	9.8581485 (115)
C. $\cos\lambda'$......	0.0026321 (113)	C. $\cos\lambda'''$.......	0.0056451 (116)
$\sin\epsilon' = 19°\,50'\,9''$.	9.5306178 (114)	$\sin\epsilon''' = 15°\,26'\,41''$.	9.4253475 (117)

$A' + 180° =$	342° 42′ 5″	$A''' + 180° =$	350° 29′ 20″
$\epsilon' =$	19.50. 9	$\epsilon''' =$	15.26.41
$C' =$	2.32.14	$C''' =$	5.56. 1
		$C' =$	2.32.14
		$C''' - C' =$	3.23.47.

Les opérations de cet article sont celles qu'on emploie communément pour convertir un lieu géocentrique en un lieu héliocentrique; elles sont de toutes les méthodes.

210.

$\tang\lambda'''$...........	9.2102866 (118)	$\cot(C''' - C'')$...	1.2265961 (122)
$\cot\lambda'$...........	0.9590003 (119)	nombre $= -$	16.84845 (123)
C. $\sin(C''' - C')$...	1.2273596 (120)	$+$	24.92565
$+$ 24.92565	1.3966465 (121)	$+$	8.07580 $= \cot\omega$
$\cot\omega = 7°\,3'\,32''$.	0.9071856 (124) (125) $\log\cot\omega$		

$C' = 0^s\ 2°\ 32'\ 14''$	C. $\sin\omega$... 0.9115069 (126)
$\omega = 0.\ 7.\ 3.32$	$\tang \lambda'$... 9.0409997
☊ $= 11.25.28.42$	$\tang I = 41°\ 52'\ 25''$ 9.9525066 (127)
$\cos\lambda'$... 9.9973679	$\cos\lambda'''$... 9.9943549 (130)
$\cos\omega$... 9.9966957 (128)	$\cos(\omega + C''' - C')$... 9.9927208 (131)
$\cos u' = 9°\ 27'\ 7''$ 9.9940636 (129)	$\cos u''' = 13°\ 54'\ 17''$ 9.9870837 (132)
	$u' = 9.27.\ 7$
$\omega = 7.\ 3.32$	$u''' - u' = 4.27.10 = \chi$
$C''' - C' = 3.23.47$	$2.13.35 = \frac{1}{2}\chi$
$\omega + C''' - C' = 10.27.19.$	

Les u sont les distances au nœud sur l'orbite; leur différence est en même tems celle des anomalies vraies.

C. $\log r'$........ 9.9900289	$\cot\frac{1}{2}\chi$......... 1.4103029 (133)
$\log r'''$.......... 9.9216689	nombre + 25.72193 (134)
9.9116978	− 23.25300
	$\tang\frac{1}{2}\varphi$......... 2.46893
$\log\left(\frac{r''}{r'}\right)^{\frac{1}{2}}$........ 9.9558489	$\log\tang\frac{1}{2}\varphi = 0.3925988$ (137)
C. $\sin\chi$........ 1.4106309 (135)	$\frac{1}{2}\varphi = 67.57.\ 1$ (138)
18.974......... 1.3664788 (136)	$\varphi = 4.15.52.\ 2$
r'''............. 9.9115978	$u''' = 13.54.17$
$\cos\frac{1}{2}\varphi$......... 9.5745071 (139)	$\Pi -$ ☊ $= 4.29.48.19$
$\cos\frac{1}{2}\varphi$......... 9.5745071 ...	☊ $= 11.25.28.42$
$\pi = 0.115004$ 9.0607120 (140)	$\Pi = 4.25.17.\ 1.$

Il ne reste plus qu'à chercher le tems du passage au périhélie, ce qui se fait comme dans les autres méthodes.

211. Comparez ces élémens avec ceux des quinze orbites que vous trouverez dans le catalogue des comètes, à la suite du chapitre XXXIII, et vous verrez qu'ils ont toute l'exactitude qu'on peut attendre d'une première approximation sur un arc de 4° 27′ de mouvement héliocentrique. Nous les avons obtenus par la recherche de 140 logarithmes. Il est vrai que la distance ρ' étant moindre que l'unité, nous avons trouvé des facilités pour nos hypothèses; mais ajoutez si vous voulez

60 log. pour ceux que nous avons épargnés dans cette occasion, il en résultera toujours qu'avec 200 log. tout au plus, on peut avoir une première ébauche de l'orbite. Si la méthode était infaillible, si elle réussissait toujours aussi bien, si la suite était aussi simple, on pourrait dire qu'il serait assez superflu d'en chercher ou d'en employer d'autres.

En recommençant avec des logarithmes à sept décimales tous les calculs que l'auteur a faits avec six seulement, nous avons eu sur toutes les quantités de légères différences qui ont affecté de quelques minutes les valeurs de Π, de ☊ et de I; il nous importe peu de chercher de quel côté est l'erreur; il nous suffisait de montrer quelle est la marche et la facilité de l'opération.

212. Il s'agit maintenant de rectifier les élémens trouvés par cette méthode approximative. Essayez d'abord votre orbite sur quelqu'observation plus éloignée; si l'erreur est sensible, ce qui arrivera presque toujours, au lieu de $\rho''' = M\rho'$, faites $\rho''' = (M + v)\rho'$, et pour la terre, $ad : dc$ :: $R'\sin(A''-A') : R'''\sin(A'''-A'')$. Ce rapport sera toujours connu; il n'est pas nécessaire d'introduire $t'' : t'$ en place de $ad : dc$.

Pour la comète, cherchez par les élémens tels que vous les connaissez, les différences d'anomalie entre la première et la deuxième observation, entre la deuxième et la troisième. Soient τ et σ ces différences; vous aurez $AD : DC$ :: $r' \sin\tau : r''' \sin\sigma$; vous connaîtrez donc presqu'exactement $\left(\frac{dc}{ad}\right)$, et d'une manière approchée $\left(\frac{DC}{AD}\right)$; alors (191) (fig. 75).

$$CO = \frac{CD}{AD}\,\frac{\sin M}{\sin O}.AM, \quad cO = \frac{cd}{ad}\cdot\frac{\sin M}{\sin O}\,aM,$$

$$\delta''' = CO + Oc = Cc = \frac{\sin M}{\sin O}\left(\frac{CD}{AD}.AM + \frac{cd}{ad}.aM\right);$$

nous avons $M = (b''-b')$, $O = b'''-b''$, soit $f = aM$.

$$\delta''' = \frac{\sin(b''-b')}{\sin(b'''-b'')}\left[\left(\frac{CD}{AD}\right)(\delta'-f) + \left(\frac{cd}{ad}\right)f\right].$$

Soit $\frac{CD}{AD} = \frac{t''}{t'} + p$, $\frac{cd}{ad} = \frac{t''}{t'} + q$; d'où

$$p = \frac{r'''\sin\sigma}{r'\sin\tau} - \frac{t''}{t'}, \qquad q = \frac{R'''\sin(A'''-A'')}{R'\sin(A''-A')} - \frac{t''}{t'},$$

$$\begin{aligned}
\delta''' &= \frac{\sin(b''-b')}{\sin(b'''-b'')}\left[\left(\frac{t''}{t'}+p\right)(\delta'-f)+\left(\frac{t''}{t'}+q\right)f\right]\\
&= \frac{\sin(b''-b')}{\sin(b'''-b'')}\left(\frac{t''}{t'}\delta'+p\delta'-\frac{t''}{t'}f-pf+\frac{t''}{t'}f+qf\right)\\
&= \frac{\sin(b''-b')}{\sin(b'''-b'')}\left(\frac{t''}{t'}\delta'+p\delta'-pf+qf\right)\\
&= \frac{\sin(b''-b')\,t''}{\sin(b'''-b'')\,t'}\left(\delta'+\frac{t'}{t''}p\delta'-\frac{t'}{t''}pf+\frac{t'}{t''}qf\right)\\
&= \mathrm{N}\left(\delta'+\frac{t'}{t''}p\delta'+\frac{t'}{t''}(q-p)f\right)\\
&= \mathrm{N}\left(1+\frac{t'}{t''}p\right)\delta'+(q-p)f\,\frac{\sin(b''-b')}{\sin(b'''-b'')}.
\end{aligned}$$

213. Mais nous avons trouvé (193)

$$\rho'=\frac{\delta'\cos b'}{\sin(\mathrm{A}''-a')},\quad \rho'''=\frac{\delta'''\cos b'''}{\sin(\mathrm{A}''-a''')};$$

donc

$$\begin{aligned}
\rho''' &= \left[\mathrm{N}\left(1+\frac{t'}{t''}p\right)\delta'+(q-p)f\,\frac{\sin(b''-b')}{\sin(b'''-b'')}\right]\frac{\cos b'''}{\sin(\mathrm{A}''-a''')}\\
&= \mathrm{N}\left(1+\frac{t'}{t''}p\right)\rho'\,\frac{\sin(\mathrm{A}''-a')\cos b'''}{\cos b'\sin(\mathrm{A}''-a''')}+(q-p)f\,\frac{\sin(b''-b')\cos b'''}{\sin(b'''-b'')\sin(\mathrm{A}''-a''')}\\
&= \left(1+\frac{t'}{t''}p\right)\rho'\cdot\frac{t''}{t'}\,\frac{\sin(b''-b')}{\sin(b'''-b'')}\,\frac{\sin(\mathrm{A}''-a')}{\sin(\mathrm{A}''-a''')}\cdot\frac{\cos b'''}{\cos b'}\\
&\quad +(q-p)f\,\frac{\sin(b''-b')\cos b'''}{\sin(b'''-b'')\sin(\mathrm{A}''-a''')}\\
&= \mathrm{M}\left(1+\frac{t'}{t''}p\right)\rho'+(q-p)f\,\frac{\sin(b''-b')\cos b'''}{\sin(b'''-b'')\sin(\mathrm{A}''-a''')}.\quad (192)
\end{aligned}$$

214. Mais $f=a\mathrm{M}=\frac{ad\sin b''}{\sin \mathrm{M}}=\frac{ad\sin b''}{\sin(b''-b')}=\frac{\mathrm{R}'\sin(\mathrm{A}''-\mathrm{A}')\sin b''}{\sin(b''-b')}$; portons cette valeur dans le dernier terme, il deviendra

$$\begin{aligned}
h &= (q-p)\,\frac{\mathrm{R}'\sin(\mathrm{A}''-\mathrm{A}')\sin b''}{\sin(b''-b')}\cdot\frac{\sin(b''-b')\cos b'''}{\sin(b'''-b'')\sin(\mathrm{A}''-a''')}\\
&= \frac{(q-p)\,\mathrm{R}'\sin(\mathrm{A}''-\mathrm{A}')\sin b''\cos b'''}{\sin(\mathrm{A}''-a''')\sin(b'''-b'')}\\
&= \frac{\mathrm{R}'\sin(\mathrm{A}''-\mathrm{A}')(q-p)\,\mathrm{tang}\,b''\cos b''\cos b'''}{\sin(\mathrm{A}''-a''')\sin(b'''-b'')}=\frac{\mathrm{R}'\sin(\mathrm{A}''-\mathrm{A}')(q-p)\,\mathrm{tang}\,b''}{\sin(\mathrm{A}''-a''')(\mathrm{tang}\,b'''-\mathrm{tang}\,b'')}\\
&= \frac{\mathrm{R}'\sin(\mathrm{A}''-\mathrm{A}')(q-p)\,\mathrm{tang}\,b''}{\sin(\mathrm{A}''-a''')\left(\frac{\mathrm{tang}\,\beta'''}{\sin(\mathrm{A}''-a''')}-\mathrm{tang}\,b''\right)}=\frac{\mathrm{R}'\sin(\mathrm{A}''-\mathrm{A}')(q-p)\,\mathrm{tang}\,b''}{\mathrm{tang}\,\beta'''-\mathrm{tang}\,b''\sin(\mathrm{A}''-a''')};
\end{aligned}$$

donc

donc

$$h = \frac{R'\sin(A''-A')(q-p)\operatorname{tang} b''}{\operatorname{tang}\beta''-\operatorname{tang} b''\sin(A''-a'')};$$

enfin

$$\rho'''=M\left(1+\frac{t'}{t''}p\right)\rho'+\frac{R'\sin(A''-A')(q-p)\operatorname{tang} b''}{\operatorname{tang}\beta''-\operatorname{tang} b''\sin(A''-a'')}=M\left(1+\frac{t'}{t''}p\right)\rho'+h.$$

215. La valeur de ρ' que nous avons employée diffère peu de la véritable; nommons (ρ) cette première valeur, nous aurons sans erreur sensible $\frac{h\rho'}{(\rho)}=h$,

$$\frac{\rho'''}{\rho'}=M\left(1+\frac{t'}{t''}p\right)+\frac{h}{\rho'}=M\left(1+\frac{t'}{t''}p\right)+\frac{h}{(\rho)}=M+v,$$

en faisant $v=\frac{Mt'p}{t''}+\frac{h}{(\rho)}$.

Pour corriger les équations qui donnent r''' et K'', il suffira de multiplier tous les coefficiens par $\frac{M+v}{M}=H$, quand ils ne contiendront que M, et par H^2 quand ils contiendront M^2.

L'équation qui donne r' reste comme elle est.

216. Rassemblons toutes ces formules.

$$p=\frac{r''\sin\sigma}{r'\sin\tau}-\frac{t''}{t'},$$

$$q=\frac{R''\sin(A''-A'')}{R'\sin(A''-A')}-\frac{t''}{t'};$$

on peut en conclure $q-p=\frac{R''\sin(A''-A'')}{R'\sin(A''-A')}-\frac{r''\sin\sigma}{r'\sin\tau}$,

$$h=\frac{R'\sin(A''-A')(q-p)\operatorname{tang} b''}{\operatorname{tang}\beta''-\operatorname{tang} b''\sin(A''-a'')},$$

$$H=1+\frac{t'}{t''}p+\frac{h}{(\rho)M}=1+\frac{t'}{t''}p+\frac{R'\sin(A''-A')(q-p)\operatorname{tang} b''}{\operatorname{tang} b''\sin(A''-a')-\operatorname{tang}\beta'}\cdot\frac{t'}{t''(\rho)};$$

car dans le dernier terme les valeurs de h et de M ont le même dénominateur, qui disparaît nécessairement dans $\frac{h}{M}$.

217. Ces formules sont faciles à calculer, et l'on trouve sans peine les élémens corrigés aussi exacts que peuvent les donner trois observations voisines.

Mais des observations voisines ne donneront pas de bons élémens, quand ce ne serait qu'à raison des erreurs des observations, et en partie par les petites erreurs des tables du soleil. Ces petites erreurs ont quelquefois une influence très-grande. M. Olbers dit qu'on n'a guères songé à cette cause d'erreur; cependant j'avais insisté particulièrement sur la nécessité de la prendre en considération, lorsque j'avais été chargé, par l'Académie des Sciences en 1792, et depuis par l'Institut en 1802, de rédiger le programme du prix concernant la comète de 1770, et M. Burckhardt, dans sa pièce couronnée, a expliqué comment il a satisfait à cette condition (Voyez les Mémoires de l'Institut, 1806). M. Olbers ajoute que l'influence de ces erreurs sera d'autant plus grande que l'intervalle entre les observations sera moindre, et cela peut arriver quelquefois; cependant si l'intervalle est petit, les erreurs des tables ne doivent pas varier, et l'effet doit être moins fâcheux.

218. Pour trouver une méthode plus générale de correction, M. Olbers se propose le problème suivant:

Connaissant le nœud et l'inclinaison de l'orbite, la longitude et la latitude géocentriques de la comète, trouver la longitude et la latitude héliocentriques, la distance au nœud et la distance au soleil.

Gregory, Euler et Struick se sont occupés de ce problème, ainsi que Lexell et Nordmark; les solutions de ces auteurs sont très-compliquées, parce qu'ils n'y ont employé que la Trigonométrie plane; il dépend cependant de la Trigonométrie sphérique, qui le résout bien plus facilement.

Soit EATL (fig. 77) l'écliptique, ☊ le nœud acendant, I☊N l'orbite de la comète, T le lieu de la terre, C le lieu observé de la comète; menez l'arc de grand cercle GCTH, K sera le lieu héliocentrique de la comète, car ce lieu doit être dans le même plan que le lieu géocentrique de la comète et que le lieu héliocentrique de la terre (XXVII. 195); d'ailleurs il doit être dans l'orbite de la comète; il ne peut donc être que l'intersection K de ces deux cercles : ☊K sera donc la distance au nœud dans l'orbite, KC sera l'angle à la comète, puisqu'il est la différence entre les lieux géocentriques et héliocentriques de la comète, et 180°—TC l'arc de distance observée entre la comète et le soleil.

Deux triangles sphériques donneront toutes les parties de cette figure.

219. Dans le triangle ATC rectangle en A, vous connaissez

$$\mathrm{AT} = (\mathrm{A} - a), \quad \mathrm{AC} = \beta = \text{latitude géoc. comète},$$
$$\cos \mathrm{TC} = \cos \mathrm{AT} \cos \mathrm{AC} = \cos \beta \cos (\mathrm{A} - a),$$
$$\cot \mathrm{ATC} = \cot \mathrm{AC} \sin \mathrm{AT} = \cot \beta \sin (\mathrm{A} - a).$$

Vous connaissez ☊T, l'angle ☊ et l'angle T par la formule précédente; vous aurez ☊K et TK par les analogies de Néper.

Vous connaîtrez $\mathrm{CK} = \mathrm{TC} - \mathrm{TK}$ et $r = \frac{\mathrm{R} \sin \mathrm{TC}}{\sin \mathrm{KC}}$.

Cette solution est d'une grande simplicité; M. Gauss l'a adoptée dans sa Théorie des Planètes.

La figure 77 représente une comète directe dans le premier quart de distance à son nœud ascendant.

220. Vos premières recherches vous ont donné ☊ = longit. du nœud, I = inclinaison. Avec ces valeurs, calculez

$$☊\mathrm{K} = \xi \text{ et } r.$$

Calculez ces mêmes quantités dans une hypothèse (☊ + p), en conservant I; puis dans une autre hypothèse,

$$☊ \text{ et } (\mathrm{I} + q),$$

vous aurez dans chaque hypothèse, pour vos trois observations,

$$\xi', \quad \xi'', \quad \xi''',$$

et

$$r', \quad r'', \quad r''';$$

vous en conclurez dans vos trois hypothèses,

$$\mathrm{K}' = \sqrt{(r'' - r')^2 + 4r'r'' \sin^2 \tfrac{1}{2}(\xi'' - \xi')},$$
$$\mathrm{K}'' = \sqrt{(r''' - r'')^2 + 4r''r''' \sin^2 \tfrac{1}{2}(\xi''' - \xi'')}.$$

Calculez les deux intervalles T′ et T″, première hypothèse,

$(\mathrm{T}' + l)$ et $(\mathrm{T}'' + o)$, deuxième hypothèse,
$(\mathrm{T}' + m)$ et $(\mathrm{T}'' + s)$, troisième hypothèse,

que vous comparerez aux vrais intervalles t' et t''.

221. Soit le vrai lieu du nœud $(\Omega + x)$, la vraie inclinaison $(I + n)$, vous aurez

$$\frac{xl}{p} + \frac{ym}{q} = t' - T', \qquad \frac{xo}{p} + \frac{ys}{q} = t'' - T,$$

d'où

$$x = \frac{(t' - T')sp - (t'' - T'')mp}{mo - sl}, \quad y = \frac{(t' - T')oq - (t'' - T'')lq}{mo - sl}.$$

222. M. Olhers a réduit ici en formules générales le procédé ordinaire des astronomes dans les recherches indirectes ou les méthodes de fausse position ; on n'en a point encore d'autres pour les planètes et les comètes. Long-tems auparavant, Borda, dans sa Description du cercle de réflexion, avait donné des formules de ce genre pour un problème d'astronomie nautique que les marins résolvent ordinairement par trois fausses positions, quoiqu'il y ait une solution directe qui n'est ni plus longue ni plus difficile. J'ai donné dans la Connaissance des Tems de 1809, p. 409, une collection complète de ces formules dont plusieurs sont identiques à celles de M. Olbers.

Vous aurez donc le vrai lieu du nœud et la véritable inclinaison, et résolvant de nouveau le problème sphérique, vous aurez les valeurs des rayons vecteurs et des distances au nœud ; mais sans recommencer les calculs en entier, ce qui serait pourtant le plus sûr et peut-être le plus court, vous pouvez déterminer les corrections de l'une quelconque B de ces quantités. Vous aurez dans trois hypothèses, B, $B + f$, $B + g$, et la véritable valeur sera $B + \frac{fx}{p} + \frac{gy}{q}$. Ces corrections seront d'autant plus sûres ou moins incertaines que les hypothèses seront plus rapprochées. Si elles sont trop différentes, vous aurez au moins des corrections provisoires qui diminueront considérablement les erreurs et rapprocheront les hypothèses avec lesquelles vous chercherez les corrections définitives.

223. Outre cette méthode générale, M. Olbers en propose une autre qui lui paraît plus commode pour une orbite parabolique.

Choisissez deux observations les plus distantes que vous pourrez ; calculez par vos élémens approximatifs les distances accourcies de la comète au soleil. Faites varier successivement ces deux distances.

Première observation......	Δ',	$\Delta' + m$,	Δ'.
Deuxième observation......	Δ''',	Δ''',	$\Delta''' + n$.

Par Δ' et $\Delta'+m$ et le lieu géocentrique, calculez le lieu héliocentrique; par Δ''' et $\Delta'''+n$ et le lieu géocentrique, calculez le lieu héliocentrique, l'angle à la comète sur l'écliptique sera $\sin c = \frac{R \sin (A-a)}{\Delta}$. Vous savez si cet angle est aigu ou obtus; la commutation $\epsilon = 180° - c - (A-a)$,

$$\text{tang lat. hélioc.} = \text{tang}\,\lambda = \frac{\text{tang}\,\beta \sin (A-a)}{\sin \epsilon},$$

ce sont les formules connues.

Cherchez pour les trois hypothèses le nœud et l'inclinaison par les formules données ci-dessus; vous avez $r' = \frac{\Delta'}{\cos \lambda'}$, $r''' = \frac{\Delta'''}{\cos \lambda'''}$; vous en déduirez les anomalies, les distances périhélies et le tems du périhélie, et par conséquent le tems écoulé entre les observations; vous le comparerez au tems observé.

224. Le procédé se réduit aux formules suivantes :

	1re *hypothèse.*	2e.	3e.	*orbite corrigée.*
1re observation...	Δ',	$\Delta'+m$,	Δ',	$\Delta'+x$.
2e observation...	Δ''',	Δ''',	$\Delta'''+n$,	$\Delta'''+y$.
intervalle.....	τ,	$\tau+p$,	$\tau+q$,	t''.
longit. 2e observation...	a,	a $+r$,	a $+s$,	a'' (observée).

$$\frac{px}{m} + \frac{qy}{n} = t'' - \tau,$$

$$\frac{rx}{m} + \frac{sy}{d} = a'' - \text{a}.$$

De ces deux équations, vous tirerez x et y, comme ci-dessus.

Si l'orbite n'est pas parabolique, ou s'il y a quelque erreur dans les observations, vous ne pourrez satisfaire que trois longitudes et deux latitudes, ou deux longitudes et trois latitudes.

225. On ne saurait mettre plus de soin et plus de méthode dans la pratique d'un procédé connu dès long-temps. M. Olbers en a tiré tout le parti possible; mais on ne peut s'empêcher de reconnaître que cette manière de corriger l'orbite est bien moins heureuse et moins simple que celle par laquelle il détermine l'orbite approximative.

Un des avantages qui recommande le plus cette méthode qui est celle

de Newton, reproduite depuis par Euler, c'est que tous les calculs faits pour la parabole serviront immédiatement à trouver l'orbite elliptique, si la parabole ne suffit pas. Dans ce cas, M. Olbers renvoie aux moyens donnés par Euler; aujourd'hui nous renverrions à ceux de M. Gauss.

Mais rarement il sera utile de chercher une ellipse. Cette recherche laisse trop d'incertitude, si le grand axe est un peu considérable. Il suffit d'avoir une parabole qui représente les observations à quelques minutes près, d'abord parce que les observations ne sont guères meilleures en ce cas que les calculs; secondement, parce que cette précision suffit pour avoir le lieu du nœud, l'inclinaison et la distance périhélie plus exactement qu'on ne peut espérer de les trouver quand la comète reviendra. L'orbite d'une comète est une chose fort indifférente pour tout le tems où la comète est invisible : à son retour, les perturbations l'auront probablement altérée de quantités qui passeront l'erreur de la première orbite. Il suffit qu'on puisse reconnaître l'identité, et si l'on a conservé les observations, après le retour, quand on aura des moyens moins incertains pour calculer le demi-grand axe, on pourra faire tous les calculs qui paraîtront utiles. Tout ce qu'on pourrait faire à la première apparition n'empêcherait pas les astronomes de tout recommencer avec les tables et les nouveaux moyens qui leur inspireraient plus de confiance.

226. Quelque imparfaite que soit cette méthode pour corriger une orbite, M. Olbers n'en paraît pas moins persuadé qu'elle est encore préférable à toutes celles que l'on connaissait alors; il la compare à celles de Lambert et de M. Laplace, et la trouve plus sûre et plus facile. Voyez son ouvrage, intitulé : *Abhandlung über die leichteste and bequemste methode die Bahn eines Cometen aus einen Beobachtungen zu berechnen von Wilhelm Olbers.* Weimar, 1797, pages 76 et suiv.

Quoi qu'il en soit de cette assertion de M. Olbers, on voit que sa méthode n'admet que deux observations, et que pour un arc de 200°, comme celui de 1759, on pourrait toujours douter si la courbe qui satisferait aux deux extrêmes s'accorderait avec les observations intermédiaires; il faudrait donc multiplier les calculs. Cette méthode n'a donc pas encore toute la généralité desirable.

227. Il nous est impossible de donner ici une idée des différentes solutions proposées par les géomètres et les astronomes. Les principales

ont été discutées par Pingré, au tome second de sa Cométographie; nous renverrons donc à cet ouvrage, où l'on trouvera d'ailleurs l'indication des sources où l'on devra puiser, si l'on avait encore l'envie d'essayer des méthodes généralement abandonnées. Nous ne parlerons donc ici ni de la solution d'Euler, ni de celle de Lambert, ni de celles de Duséjour, d'Hennert, de Tempelhoff. Nous dirons quelques mots de celle de M. Lagrange, non pour en conseiller l'usage, on peut voir à cet égard le jugement qu'en a porté Pingré; mais le grand géomètre qui l'a imaginée vient de la présenter de nouveau dans la seconde partie de sa Mécanique analytique qui n'a point encore vu le jour. L'éditeur, M. de Prony, nous ayant confié les feuilles imprimées, nous y avons remarqué des formules trigonométriques qui peuvent avoir leur application. (*Mécan. analyt.* Seconde Partie. Section VII, pages 58 et suiv.)

Méthode de M. Lagrange.

228. Soient ρ, ρ', ρ'' les trois rayons vecteurs de la terre calculés par les tables du soleil, R, R', R'' les trois distances de la comète à la terre, C, C', C'' les trois lieux observés de la comète; par ces trois points comme sommets, imaginez le triangle sphérique; ensorte que le côté C'C'' soit opposé à l'angle C, et ainsi des autres. Ces trois angles et ces trois côtés sont censés connus : il n'y a nulle difficulté pour les côtés; mais l'un des angles sera ordinairement fort obtus, les deux autres fort aigus et peu faciles à bien déterminer. Le triangle se réduirait même à un seul arc, si la comète avait décrit un arc de grand cercle.

Soit

$$G^2 = 1 + 2\cos CC'\cos CC''\cos C'C'' - \cos^2 CC' - \cos^2 CC'' - \cos^2 C'C''$$
$$= -4\sin\tfrac{1}{2}(CC' + CC'' + C'C'')\sin\tfrac{1}{2}(CC' + CC'' - C'C'') \times \ldots$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(CC' - CC'' + C'C'')\sin\tfrac{1}{2}(CC' - CC'' - C'C''),$$

ou

$$G = \sin CC'\sin CC''\sin C = \sin C'C''\sin C'C\sin C'$$
$$= \sin C''C'\sin C''C\sin C = (CC'C'') \text{ pour abréger.}$$

229. Soient de même S, S', S'' les trois lieux du soleil, et formez entre ces lieux et ceux de la comète des triangles tels que SC'C'',

S'C'C'', etc. Faites de même

$$\Gamma = (SC'C''), \quad \Gamma' = (S'C'C''), \quad \Gamma'' = (S''C'C'),$$
$$\Gamma_{,} = (CSC''), \quad \Gamma'_{,} = (CS'C''), \quad \Gamma''_{,} = (CS''C''),$$
$$\Gamma_{,,} = (CC'S), \quad \Gamma'_{,,} = (CC'S'), \quad \Gamma''_{,,} = (CC'S''),$$

toutes ces quantités seront connues. Si le mouvement de la comète est peu considérable et les intervalles petits, $G = \sin CC' \sin C'C'' \sin C'$ sera une quantité du troisième ordre qu'il conviendra d'éviter par les moyens indiqués par l'auteur aux articles (42) et (45). *Méc. Analytique.*

230. Soient l, m, n les cosinus des angles que le rayon visuel R fait avec les trois axes perpendiculaires entre eux, Rl, Rm, Rn, les trois coordonnées rectangles de la comète parallèles à ces axes, et ayant leur origine commune au centre de la terre; λ, μ, ν les quantités correspondantes relativement au soleil, $x = Rl - \rho\lambda$, $y = Rm - \rho\mu$, $z = Rn - \rho\nu$, r, r', r'' les trois rayons vecteurs de la comète;

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho(l\lambda + m\mu + n\nu) = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos\sigma,$$
$$P = (m-1)\rho\Gamma - m\rho'\Gamma' + \rho''\Gamma'',$$
$$Q = (m-1)^3\rho\Gamma - m\rho'\Gamma' + \rho''\Gamma'',$$
$$R = \frac{6Pr^3 - Qt^2}{[6(m-1)r^3 - (m-1)^3t^2]G},$$
$$R' = \frac{6P_{,}r^3 - Q_{,}t^2}{[6(m-1)r^3 - (m-1)^3t^2]G},$$
$$R'' = \frac{6P_{,,}r^3 - Q_{,,}t^2}{[6(m-1)r^3 - (m-1)^3t^2]G},$$

en dénotant par $P_{,}$, $Q_{,}$, $P_{,,}$, $Q_{,,}$ ce que P et Q deviennent, lorsqu'on y change Γ, Γ', Γ'' en $\Gamma_{,}$, $\Gamma'_{,}$, $\Gamma''_{,}$ et $\Gamma_{,,}$, $\Gamma'_{,,}$, $\Gamma''_{,,}$.

Substituez ces valeurs de R dans l'équation

$$r^2 = R^2 + \rho^2 - 2R\rho\cos CS,$$

vous aurez une équation finale en r qui montera au huitième degré.

231. A l'égard de la mesure du tems, comme il doit être représenté par le mouvement moyen du soleil, si l'on veut l'exprimer en jours moyens, il suffira de multiplier le nombre des jours par 59′ 8″,33.

Les

Les trois observations donnent

$$R^2 - 2R\rho \cos CS + \rho^2 = r^2,$$
$$R'^2 - 2R'\rho' \cos C'S' + \rho'^2 = r'^2,$$
$$R''^2 - 2R''\rho'' \cos C''S'' + \rho''^2 = r''^2.$$

Soit $s = \frac{r dr}{dt}$,

$$r^2 = r^2, \quad r'^2 = r^2 + 2st + \frac{ds}{dt} t^2 - \frac{g^2 t^3}{3r^3},$$
$$r''^2 = r^2 + 2mst + m^2 \frac{ds}{dt} t^2 - \frac{m^3 g^3}{3r^3} t^3,$$

on aura les trois rayons vecteurs et les angles compris, et par suite les élémens.

Rien de plus simple dans le principe; mais on entrevoit la peine qu'aura le calculateur, sans entrevoir quel sera le succès. Passons à une autre méthode analytique souvent éprouvée.

Méthode de M. Laplace.

232. Dans l'impossibilité où nous sommes d'exposer les principes de cette méthode, nous allons, sans autre préambule, l'appliquer à l'exemple choisi par l'auteur, et nous donnerons les formules à mesure que nous aurons besoin de les calculer. Voyez *Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planètes*, 1784, page 44.

1781	*Longitude géocentrique.*	
Nov. 14	$307^\circ\, 14'\, 45'' = \beta$	
		$-17'\, 13'' = \beta' - \beta$
17	$306.57.32 = \beta'$	
		$-6.\ 6 = \beta'' - \beta'$
19	$306.51.26 = \beta''$	
		$-6.33 = \beta''' - \beta''$
22	$306.44.53 = \beta'''$	
		$-3.16 = \beta^{\text{iv}} - \beta'''$
25	$306.41.37 = \beta^{\text{iv}}$	

Latitude boréale.

14	$55.17.\ 9 = \gamma$	
		$-10^\circ\, 59'\, 57'' = \gamma' - \gamma$
17	$44.17.12 = \gamma'$	
		$-5.\ 2.24 = \gamma'' - \gamma'$
19	$39.14.48 = \gamma''$	
		$-5.25.47 = \gamma''' - \gamma''$
22	$33.49.\ 1 = \gamma'''$	
		$-3.50.18 = \gamma^{\text{iv}} - \gamma'''$
25	$29.58.43 = \gamma^{\text{iv}}$	

$$d\beta = \frac{\beta' - \beta}{3} = -\ 5'\,44''33 \qquad d\gamma = \frac{\gamma' - \gamma}{3} = -\ 5^{\circ}\,39'\,59''0$$

$$d\beta' = \frac{\beta'' - \beta'}{2} = -\ 3.\ 3.\ 0 \qquad d\gamma' = \frac{\gamma'' - \gamma'}{2} = -\ 2.31.12.0$$

$$d\beta'' = \frac{\beta''' - \beta''}{3} = -\ 2.11.\ 0 \qquad d\gamma'' = \frac{\gamma''' - \gamma''}{3} = -\ 1.48.35,667$$

$$d\beta''' = \frac{\beta^{\text{iv}} - \beta'''}{3} = -\ 1.\ 5.33 \qquad d\gamma''' = \frac{\gamma^{\text{iv}} - \gamma'''}{8} = -\ 1.16.46.00$$

Les $d\beta$ et les $d\gamma$ sont, comme on voit, les différences premières de la longitude et de la latitude divisées par l'intervalle de tems exprimé en jours. Ici, les intervalles sont d'un nombre entier de jours ; on a pu faire les divisions à vue. Dans le cas contraire, cette première opération demanderait déjà 24 logarithmes, ou $6(n-1)$, n étant le nombre d'observations.

$$d\beta' - d\beta = +\ 2'\,41''33, \qquad d^2\beta = \frac{d\beta' - d\beta}{5} = +\ 0'\,32''267$$

$$d\beta'' - d\beta' = +\ 0.52.00, \qquad d^2\beta' = \frac{d\beta'' - d\beta'}{5} = +\ 0.10.400$$

$$d\beta''' - d\beta'' = +\ 1.\ 5.67, \qquad d^2\beta'' = \frac{d\beta''' - d\beta''}{6} = +\ 0.10.945$$

$$d\gamma' - d\gamma = +\ 1^{\circ}\ 8'\,47'', \qquad d^2\gamma = \frac{d\gamma' - d\gamma}{5} = +\ 13'\,45''4$$

$$d\gamma'' - d\gamma' = +\ 42.36.333, \quad d^2\gamma' = \frac{d\gamma'' - d\gamma'}{5} = +\ 8.31.267$$

$$d\gamma''' - d\gamma'' = +\ 31.49.667, \quad d^2\gamma'' = \frac{d\gamma''' - d\gamma''}{6} = +\ 5.18.278$$

Les $d^2\beta$ et les $d^2\gamma$ se trouvent, en divisant les différences secondes par les intervalles, entre les observations de deux en deux, c'est-à-dire de n à $(n+2)$. Ces opérations demanderaient 18 logarithmes, si les intervalles n'étaient pas des entiers.

$$d^3\beta = \frac{d^2\beta' - d^2\beta}{8} = -\ 2''73325 \qquad d^3\gamma = \frac{d^2\gamma' - d^2\gamma}{8} = -\ 39''267$$

$$d^3\beta' = \frac{d^2\beta'' - d^2\beta'}{8} = +\ 0.068125 \qquad d^3\gamma' = \frac{d^2\gamma'' - d^2\gamma'}{8} \quad -\ 24.1236$$

Les $d^3\beta$ et les $d^3\gamma$ ont pour diviseurs les intervalles de trois en trois jours ; ils exigeraient 12 logarithmes.

Les $d^4\beta$ et les $d^4\gamma$ se formeront d'une manière analogue en prenant pour diviseurs les intervalles de 4 en 4, c'est-à-dire de n à $(n+4)$,

$$d^4\beta = +\frac{2'',801175}{11} = 0.254652, \quad d^4\gamma = \frac{+15'',1434}{11} = +1''.37667;$$

ils exigeraient 6 log., total, 60 logarithmes : une observation de plus les porterait à 90, deux de plus à 126.

233. Prenez pour époque la longitude qui tient le milieu entre toutes les autres, ou qui s'éloigne le moins de ce milieu : c'est ici celle du 19 qui suit la première de cinq jours et précède la dernière de 6 jours. Nommez i, i', i'', i''', etc. les intervalles entre l'époque et un autre jour quelconque, vous aurez pour le 14, $i=-5$, pour le 17, $i'=-2$, pour le 19, $i''=0$, pour le 22, $i'''=+3$, et pour le 25, $i^{\text{iv}}=+6$; la longitude de la comète à un petit nombre de jours z de l'époque choisie sera

$$\beta - id\beta + ii'd^2\beta - ii'i''d^3\beta + ii'i''i'''d^4 - \text{etc.}$$
$$+z\left\{\begin{array}{l}\delta\beta-(i+i')d^2\beta+(ii'+ii''+i'i'')d^3\beta \\ \quad -(ii'i''+ii'i'''+ii''i'''+i'i''i''')d^4\beta+\text{etc.}\end{array}\right\}$$
$$+z^2[\delta^2\beta-(i+i'+i'')d^3\beta+(ii'+ii''+ii'''+i'i''+i'i'''+i''i''')d^4\beta-\text{etc.}].$$

Cette formule serait très-incommode à calculer, tant par la multiplicité des facteurs que par l'attention qu'il faut donner à leurs signes; mais par la précaution que nous avons prise de choisir pour époque la longitude moyenne, tous les i'' sont 0, ce qui simplifie les coefficiens et fait disparaître ceux qui sont indépendans de z et de z^2, à la réserve des deux premiers. Par la précaution qu'on a prise de réduire toutes les observations à la même époque du jour, tous les i sont de petits nombres entiers qui dispensent de l'usage des logarithmes. Rien n'empêche de se procurer toujours la première de ces deux facilités : quant à la seconde, qui est plus importante encore, elle n'a aucun inconvénient, quand la comète se meut lentement et uniformément; mais dans le cas contraire, il y aurait un peu moins d'exactitude.

234. Notre formule devient ici pour la longitude

$$306^\circ\,51'\,26''+z(-5'44'',3+7\times32''66+10\times-2'',733-30\times0.2546)$$
$$+z^2(32'',266+7\times-2'',733-11\times0''.25456)$$
$$=306^\circ\,51'\,26''-153'',16z+10'',335z^2.$$

Dans l'exemple calculé par Méchain pour M. Laplace, on trouve

$$-153'',46z+10'',54z^2;$$

la différence est peu importante.

Pour la latitude, il n'y a que les β à changer en γ, les coefficiens restent les mêmes,

$$39^\circ\ 14'\ 48''-7855'',34z+535'',4z^2$$

Méchain a trouvé $\qquad -7855'',16z+535'',4z^2;$

nous conserverons ses nombres.

235. Soit

$$\alpha=306^\circ\ 51'\ 26'',\quad a=-\frac{7855''16}{59^\circ 8',193},\quad b=\frac{2\times 535'',4}{61.03646},$$

ou faites $\quad \log a=\log$ coefficient de z en secondes $+6.4499928$,
$\log b=\log 2+\log$ coefficient de $z^2+8.2144106$
$=\log$ coefficient de $z^2+8.5154406$,

vous aurez $\quad a=-0.0432501,\quad b=0.345366.$

Faites $\theta=39^\circ\ 14'\ 48''$,

$\log h=\log$ coefficient de z en secondes $+6.4499928$,
$\log l=\log$ coefficient de z^2 en secondes $+8.5154406$,
$h=-2.213844,\quad l=+17.54354.$

236. Ces préliminaires ont effrayé la plupart des astronomes, et l'un d'eux a même assuré qu'ils sont souvent plus prolixes que la solution entière du problème dans une autre méthode; il peut avoir raison, dans le cas où l'on n'aurait aucune des facilités que nous avons rencontrées ici; mais avec ces facilités qu'on a presque toujours, il nous semble qu'il y aurait un peu d'exagération.

M. Legendre a été plus loin; il a dit que cette interpolation était plus nuisible qu'utile. Pingré l'emploie dans son problème VIII, à trouver une longitude qui a été réellement observée. Il trouve 47″ d'erreur qu'il ne balance pas à rejeter sur l'observation. Au reste, la formule d'interpolation est de Newton (*Princip. mathém.* Liv. III, lemmes 5 et 6). Duséjour en a fait usage.

237. Soit A la longitude de la terre vue du soleil à l'instant que l'on a choisi pour époque, R le rayon vecteur de la terre, R' le rayon vecteur pour $90° + A$; faites

$$r^2 = x^2 \text{séc}^2\theta + 2Rx\cos(A-\alpha) + R^2 \ldots\ldots (1),$$

$$y = \frac{R\sin(A-\alpha)}{2a}\left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{r^3}\right) - \frac{bx}{2a} \ldots\ldots\ldots (2),$$

$$y = -x\left(h\,\text{tang}\,\theta + \frac{l}{2h} + \frac{a^2\sin\theta\cos\theta}{2h}\right) + \left(\frac{R\sin\theta\cos\theta}{2h}\right)\cos(A-\alpha)\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{R^3}\right) (3),$$

$$o = y^2 + a^2x^2 + (y\,\text{tang}\,\theta + hx\,\text{séc}^2\theta)^2 + 2y\left((R'-1)\cos(A-\alpha) - \frac{\sin(A-\alpha)}{R}\right)$$

$$+ 2ax\left((R'-1)\sin(A-\alpha) + \frac{\cos(A-\alpha)}{R}\right) + \frac{1}{R^2} - \frac{2}{r} \ldots\ldots (4).$$

Pour tirer de ces équations les valeurs des trois inconnues x, y et r, on commencera par considérer si, abstraction faite du signe, b est plus grand ou moindre que l : dans le premier cas, on fera usage des équations (1), (2) et (4), en supposant, par exemple, x égal à l'unité; on en déduira les valeurs de r et de y par les équations (1) et (2). On substituera ensuite ces valeurs dans l'équation (4), et si le reste est nul, ce sera une preuve que la valeur de x a été bien choisie; mais si ce reste est négatif, on augmentera la valeur de x; on la diminuera si le reste est positif. On aura ainsi, au moyen d'un petit nombre d'essais, les valeurs véritables de x, y et r : mais comme ces inconnues sont susceptibles de plusieurs valeurs, on choisira celle qui satisfait exactement ou à peu près à l'équation (3).

Dans le second cas, c'est-à-dire, si l'on a $l > b$, on fera usage des équations (1), (3) et (4), et alors ce sera l'équation (2) qui servira de vérification.

238. Ainsi, dans tous les cas, il faut toujours calculer les quatre équations à chaque supposition que l'on fera pour x. Pour abréger un peu, on développe ces formules, et réunissant tous les termes connus, on a quatre équations de la forme suivante :

$$r^2 = F + Gx + Hx^2 \ldots\ldots (1),$$

$$y = M - \frac{N}{r^3} - Ox \ldots\ldots\ldots (2),$$

$$y = -S + \frac{Q}{r^3} - Px \ldots\ldots\ldots (3),$$

$$o = -C - \frac{2}{r} + Bx + Ty + Exy + Lx^2 - Iy^2.$$

Ce tâtonnement est de la même espèce que celui de M. Olbers, mais les formules de M. Olbers sont beaucoup plus simples.

239. Ayant ainsi les valeurs de x, y et r, calculez

$$P = \frac{x}{\cos^2\theta}(y + hx \operatorname{tang}\theta) + Ry\cos(A - \alpha)$$
$$+ x\left\{(R' - 1)\cos(A - \alpha) - \frac{\sin(A - \alpha)}{R}\right\} + Rax\sin(A - \alpha) + R(R' - 1).$$

Si P est négatif, la comète n'aura pas encore atteint son périhélie.

La distance périhélie D de la comète sera $D = r - \frac{1}{2}P^2$.

L'anomalie v de la comète sera donnée par l'équation $\cos^2\frac{1}{2}v = \left(\frac{D}{r}\right)$, d'où l'on conclura par la table l'instant du passage par le périhélie.

Dans notre exemple,

$$A = 57°\,57'\,4'', \quad R = 0.987248, \quad R' = 0.988820,$$

on aura

$$r^2 = 1.667387\,x^2 - 0.7106137x + 0.974653\ldots\ldots (1),$$
$$y = -11.0665 + \frac{10.6484}{r^3} + 3.9927\,x\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$
$$y = 5.771014\,x + \frac{0.03931687}{r^3} - 0.04086053\ldots\ldots (3),$$
$$0 = y^2 + 0.00187057\,x^2 + (0.8169372y - 3.691334x)^2$$
$$- 1.8820446y + 0.0324357\,x + 1.026006 - \frac{2}{r}.$$

Ici, $l > b$; on emploie (1), (3) et (4); ces trois équations donneront

$$x = 0.39107, \quad y = 2.258355, \quad r = 0.9755798.$$

Ces valeurs satisfont à l'équation (2) aussi bien qu'on doit l'attendre d'une équation qui ne peut être fort exacte, à cause du peu de mouvement de la comète en longitude; elle donne $y = 2{,}00048$, au lieu que $y = 2.258355$; la différence est 0.25787.

De ces valeurs, on conclut

$$P = -0.185628, \quad D = 0.9583509, \quad v = 15°\,16'\,24''.$$

qui répondent à 10j,40334; ainsi le passage au périhélie a eu lieu le 29 novembre à 18h 10′ 34″, tems moyen à Paris.

240. Avec ces connaissances approchées des deux élémens, on déterminera l'orbite par la méthode suivante.

Choisissez trois observations éloignées de la comète ; pour les trois instans, calculez les trois rayons vecteurs et les trois anomalies. Soient v, v', v'' ces anomalies, r, r', r'' les rayons vecteurs, $v'-v$, $v''-v'$ seront les angles compris entre les rayons vecteurs. Soit $U=v'-v$, $U'=v''-v'$; nommons α, α', α'' les trois longitudes observées, θ, θ', θ'' les trois latitudes géocentriques, C, C', C'' les trois longitudes du soleil, R, R', R'' les distances à la terre, β, β', β'', les trois longitudes héliocentriques, π, π', π'' les trois latitudes héliocentriques,

$\cos(C-\alpha)\cos\theta = \cos$ angle à la terre entre le soleil et la comète,

$$\sin \text{ angle au soleil} = \left(\frac{R}{r}\right) \sin \text{ angle à la terre},$$

$$\sin\pi = \frac{\sin\theta \sin \text{ angle au} \odot}{\sin \text{ angle à la terre}},$$

$$\cos \text{ commutation} = \frac{\cos \text{ angle au soleil}}{\cos\pi};$$

On aura de même π', π'', et ensuite β, β', β''; les valeurs de β, β' et β'' feront voir si la comète est rétrograde.

Soit V l'angle au soleil entre les deux rayons vecteurs,

$$\cos V = \cos(\beta'-\beta)\cos\pi\cos\pi' + \sin\pi\sin\pi',$$
$$\cos V' = \cos(\beta''-\beta)\cos\pi\cos\pi'' + \sin\pi\sin\pi''.$$

Si les deux élémens étaient exacts, vous auriez

$$V=U \quad \text{et} \quad V'=U';$$

mais comme cela n'arrivera presque jamais, soit

$$m=U-V \quad \text{et} \quad n=U'-V'.$$

L'angle au soleil est susceptible de deux valeurs supplémens l'une de l'autre à 180° ; pour lever le doute, s'il n'est pas levé déjà par l'angle à la terre, il suffira de prendre la valeur de V qui diffère le moins de U.

241. On fera ensuite une seconde hypothèse, dans laquelle, en conservant le même passage par le périhélie, on fera varier la distance

périhélie, d'une petite quantité, comme de $\frac{1}{50}$, et l'on cherchera de même $m' = \mathrm{U} - \mathrm{V}$, $n' = \mathrm{U}' - \mathrm{V}'$.

Enfin on formera une troisième hypothèse, dans laquelle en reprenant la distance périhélie de la première, on fera varier d'un demi-jour plus ou moins le tems du passage; on cherchera de même

$$m'' = \mathrm{U} - \mathrm{V} \quad \text{et} \quad n'' = \mathrm{U}' - \mathrm{V}'.$$

Soit u le nombre par lequel on doit multiplier la variation de la distance périhélie pour avoir la véritable, et t le nombre par lequel on doit multiplier la variation du passage,

$$u(m - m') + t(m - m'') = m; \quad u(n - n') + t(n - n'') = n.$$

De ces deux équations on tirera u et t, et par conséquent les deux élémens corrigés.

242. Les corrections précédentes supposent que les élémens déterminés par la première approximation sont déjà assez exacts. Si la seconde approximation ne paraît pas suffisante, on pourra en essayer une troisième, en faisant subir aux élémens corrigés des variations plus petites que les premières.

Au lieu de calculer U, U', V, V' dans trois hypothèses, on peut les calculer dans cinq, savoir, 1°. avec les élémens trouvés tout d'abord; 2°. en faisant subir une petite variation à la distance périhélie; 3°. en la faisant varier du double; 4°. en conservant la distance périhélie, et faisant varier d'un petit intervalle l'instant du passage; 5°. en doublant cette dernière variation.

Soient m, m', m'', m''', m^{iv}, les valeurs U—V, n, n', n'', n''', n^{iv}, les valeurs U' — V',

$$\begin{aligned} 0 &= (4m' - 3m - m'')u + (m'' - 2m' + m)u^2 \\ &\quad + (4m''' - 3m - m^{\text{iv}})t + (m^{\text{iv}} - 2m'' + m)t^2 + 2m, \\ 0 &= (4n' - 3n - n'')u + (n'' - 2n' + n)u^2 \\ &\quad + (4n''' - 3n - n^{\text{iv}})t + (n^{\text{iv}} - 2n'' + n)t^2 + 2n; \end{aligned}$$

les valeurs de u et de t qui satisfont à ces équations seront plus précises que les précédentes; il sera indispensable de recourir à ces équations, toutes les fois que les termes dépendans des secondes différences seront de même ordre que ceux qui dépendent des différences premières, ce

ce qui arrivera, par exemple, lorsque dans une des observations le rayon vecteur de la comète sera presque perpendiculaire au rayon visuel de la terre à la comète.

243. Soit J la position du nœud, qui sera le nœud ascendant si la comète est directe, φ l'inclinaison de l'orbite,

$$\tang J = \frac{\tang \pi \sin \beta' - \tang \pi' \sin \beta}{\tang \pi \cos \beta' - \tang \pi' \cos \beta} = \frac{\tang \pi \sin \beta'' - \tang \pi'' \sin \beta}{\tang \pi \cos \beta'' - \tang \pi'' \cos \beta}$$
$$= \frac{\tang \pi' \sin \beta'' - \tang \pi'' \sin \beta'}{\tang \pi' \cos \beta'' - \tang \pi'' \cos \beta'},$$

$$\tang \varphi = \frac{\tang \pi}{\sin(\beta - J)} = \frac{\tang \pi'}{\sin(\beta' - J)} = \frac{\tang \pi''}{\sin(\beta'' - J)}.$$

244. Si nous faisons l'application de ces formules à la comète de 1781, nous aurons

Octobre	9^j 16^h 50′ 0″,	$\alpha = 124°\,27'\,42''$,	$\theta = 0°\,11'\,40''$.
Novemb.	17. 8.29.44,	$\alpha' = 306.57.32$,	$\theta' = 44.17.12$.
Décemb.	20. 6. 6.30,	$\alpha'' = 306.17.59$,	$\theta'' = 17.34\ 25$.

$C = 197°\,13'\,44''$ $\quad\log R = 9.998864$,
$C' = 235.55.43$ $\quad\log R' = 9.994602$,
$C'' = 269.20.35$ $\quad\log R'' = 9.992748$.

Première hypothèse. $D = 0.958359$, $\quad p = 29$ nov. 18^h 10′ 34″.

$$v = -61°\,18'\,3'',\quad v' = -18°\,7'\,12'',\quad v'' = 29°\,8'\,15'',$$
$$U = 43°\,10'\,41'',\quad U' = 90°\,26'\,18'',$$
$$\beta = 77°\ 5'\,50'',\quad \beta' = 37°\,26'\,37'',\quad \beta'' = 346°\,49'\,52'',$$
$$\pi = 0.10.34,\quad \pi' = 18.\ 6.32{,}5,\quad \pi'' = 27.12.57,$$
$$V = 42°\,53'\,2'',\quad V' = 90°\,9'\,22'',$$
$$m = 17'\,49'',\quad n = 16'\,56''.$$

On voit par ces valeurs de β, que la comète est rétrograde.

Deuxième hypothèse. On augmentera la distance D de 0.003; on trouvera $m' = -33'\,53''$, $n' = -12'\,54''$.

Troisième hypothèse. On conservera D, on retranchera 6^h = 0,25 de l'instant du passage; on aura $m'' = 48'\,16''$, $n'' = 27'\,13''$; d'où

$$3102u - 1829t = 1069,\qquad 1760u - 617t = 1016$$
$$u = 0.881406,\qquad t = 0.910400,$$

dist. périh. corrig. $= 0.9609951$, passage corrigé 29 nov. $12^h\ 42'\ 46''$.

245. Avec ces élémens corrigés, calculez de nouveau m et n; vous aurez $m = -4'',5$. Ces élémens étant donc fort approchés, vous calculerez $J = 77°\ 22'\ 55''$ et $\varphi = 27°\ 12'\ 4''$.

$\beta'' - J = 269°\ 15'\ 58'' =$ distance au nœud sur l'écliptique.
269.20.50 = distance au nœud sur l'orbite.
29.19.22 = v''.
298.40.12 = distance du périhélie au nœud.
77.22.55 = J.
376. 5. 7
16. 5. 7 = longitude du périhélie.

246. Cette méthode est fort belle; si elle est un peu longue, elle réussit presque toujours; elle n'est pourtant pas infaillible, et après de très-longs calculs, on a été forcé d'y renoncer pour la seconde comète de 1815. On est donc contraint quelquefois à laisser les méthodes qu'on nomme *analytiques*, pour recourir à celles qu'on appelle communément *astronomiques*, *arithmétiques*, ou *de fausse position*. Au fait, toutes les méthodes sont analytiques et de fausse position tout-à-la-fois. L'analyse la plus savante n'a pu fournir que quatre équations qui ne sont rien moins que directes et qui ne se résolvent que par des suppositions successives. Ces équations ont-elles la simplicité de celles que M. Olbers a su tirer de la Trigonométrie et du théorème de Lambert, et la méthode de correction qui vient ensuite n'est-elle pas fondée sur une triple fausse position? Les équations que l'on en tire pour déterminer les corrections, sont-elles exactes, sont-elles analytiques? Le calcul des m et des n n'est-il pas purement trigonométrique? Il n'y a donc aucune différence importante entre les trois méthodes exposées jusqu'ici; la plus courte et la plus facile dans ses principes, et surtout dans la pratique, a seule droit à la préférence. Le calcul trigonométrique sera toujours obligé, quoi qu'on fasse. M. Laplace et M. Olbers le réservent pour la fin; je l'ai mis au commencement, je l'ai fait suivant trois ou quatre hypothèses de x régulièrement croissantes et qui me dispensent d'y revenir. La construction de mes tableaux pour chacune des observations dont je veux faire usage, ne doit donc pas compter dans le nombre des opérations que l'on com-

pare pour connaître la brièveté d'une méthode, car cette partie est commune à toutes. Tout au plus pourrait-on compter dans la mienne les suppositions de x que je multiplie les deux premiers jours, et qui ensuite se trouvent inutiles. On doit seulement compter les calculs faits pour chercher les v et du qui satisfont aux tems $T' - T$, et calculer la première orbite approximative. Quant à ma méthode de correction, elle est la seule jusqu'ici qui se prête à un nombre indéfini d'observations; mais on peut réduire ces observations à trois, comme dans les autres méthodes, et alors mes équations de condition seront plus courtes et plus analytiques que toutes les autres. De toutes les suppositions fondamentales qu'on est forcé de se permettre, celle des dv proportionnels aux tems, est celle qui s'éloigne le moins de la vérité. S'ensuit-il que ma méthode soit préférable à toutes les autres? je suis loin de l'assurer, car je ne l'ai pas essayée sur plus de cinq comètes; elle m'a toujours réussi avec la plus grande facilité; je ne vois pas bien dans quelles circonstances elle pourrait être en défaut, mais l'expérience peut en faire trouver. Tout ce que je me permettrai de conclure, c'est qu'il est bon que les méthodes se multiplient, que chaque calculateur ait la sienne, qu'il affectionne et avec laquelle il se familiarise; les calculs lui paraîtront moins fastidieux, les orbites des comètes qu'on découvrira seront calculées de plusieurs manières, les résultats en seront d'autant plus sûrs. C'est dans cette vue que nous allons encore exposer une méthode analytique.

Méthode de M. Legendre.

247. On trouvera tous les fondemens de cette solution dans l'ouvrage intitulé *Nouvelles Méthodes pour la détermination des orbites des comètes*. Paris, 1805 et 1806. Nous prendrons pour exemple celui que M. Conti a calculé dans l'ouvrage intitulé *Opuscoli astronomici di Giuseppe Calandrelli e Andrea Conti. Roma*, 1813.

Il s'agit de la comète de 1811. Les tems des observations sont

sept.	différence.	milieu.	
$T° = 26{,}35055$		5 948525 log...	0.7743947 (1)
	5.94833		
$T = 32{,}29888$		sin 1".3548",2074..	8.2355821
	5.94832		
$T' = 38{,}24720$		log θ......	9.0099768.

Longit. comète.	Latit. comète.	
$a^{\circ} = 5^{s}\,13^{\circ}\,36'\,22''8$	$b^{\circ} = 47^{\circ}\,15'\,52''9$B	$A = 0^{s}\,8^{\circ}\,38'\,42''8$
$a = 5.23.51.40.1$	$b = 53.16.21.4$	log R 0.0000092
$a' = 6.\ 8.39.\ 8.4$	$b' = 58.39.14.1$	logesinψ 8.2249541 (3)

A est la longitude héliocentrique de la terre pour l'observation du milieu 2 octobre, R le rayon vecteur de la terre, e l'excentricité de son orbite et ψ son anomalie.

$A = 0^{s}\ 8^{\circ}\,38'\,42''8$	$A = 0^{s}\ 8^{\circ}\,38'\,42''8$	$A = 0^{s}\ 8^{\circ}\,38'\,42''8$
$a^{\circ} = 5.13.36.22.8$	$a = 5.23.51.40.1$	$a' = 6.\ 8.39.\ 8.4$
$A - a^{\circ} = 6.25.\ 2.20.0$	$A - a = 6.14.47.\ 2.7$	$A - a' = 5.29.59.34.4$
		$A - a^{\circ} = 6.25.\ 2.20.0$

$A - a^{\circ} + A - a' = (2A - a^{\circ} - a')$ .... 0.25. 1.54.4.

$$M = R\cos A, \qquad N = R\sin A.$$

Log R...	0.0000092	....	0.0000092
cos A...	9.9950373 (4)	sin A...	9.1770044 (5)
log M = RcosA...	9.9950465	log N = RsinA...	9.1770136

$$C = \tang b' \sin(A - a^{\circ}) - \tang b^{\circ} \sin(A - a'),$$

+ tang b'	+ 0.2153030 (6)	— tang b'	— 0.0343680 (9)
sin$(A - a')$	— 9.6265798 (7)	sin$(A - a')$	+ 6.0938149 (10)
— 0.6948368	9.8418828 (8)	— 0.0001343	— 6.1281829 (11)
— 0.0001343			

— 0.6949711 = C, log C = — 9.8419668 (12).

Ici la fraction C est assez considérable, ce qui est heureux, car dans plusieurs formules elle se trouvera au dénominateur.

248. $P = 2\tang b \sin(A - a^{\circ})\sin(A - a') - \tang b' \sin(A - a^{\circ})\sin(A - a)$
$- \tang b^{\circ} \sin(A - a')\sin(A - a)$

2... 0.3010300
tang b... 0.1271918 (13)
$\sin(A-a^\circ)$ — 9.6265798
$\sin(A-a')$ + 6.0938149
— 0.000140804... 6.1486165 (14)
— 0.17730651
— 0.177447314
+ 0.00003479
— 0.177412524 = P
log P = — 9.2489855 (18).

— tang b' — 0.2153030
$\sin(A-a^\circ)$ — 9.6265798
$\sin(A-a)$ — 9.4068418 (15)
— 0.17730651 — 9.2487246 (16)

— tang b — 0.0343680
$\sin(A-a')$ + 6.0938149
$\sin(A-a)$ — 9.4058418
+ 0.00003479 + 5.5350247 (17)

249. $Q = \text{tang}\, b \sin(2A - a^\circ - a') - \text{tang}\, b' \cos(A-a^\circ)\sin(A-a) - \text{tang}\, b^\circ \cos(A-a')\sin(A-a)$

tang b... 0.1271908
$\sin(2A-a^\circ-a')$... 9.6264644 (19)
+ 0.5670941 9.7536552 (20)
— 0.3795622 .... — 9.5792829 (22)
+ 0.1875319
— 0.2761911
— 0.0886592 = Q
log Q = — 8.9477238 (25).

— tang b' — 0.2153030
$\cos(A-a^\circ)$ — 9.9571381 (21)
$\sin(A-a)$ — 9.4068418

— tang b° — 0.0343680
$\cos(A-a')$ — 0.0000000 (23)
$\sin(A-a)$ — 9.4068418
— 0.2761911 — 9.4412098 (24)

250. $H = -2\,\text{tang}\, b^\circ\, \text{tang}\, b' \sin(A-a) + \text{tang}\, b^\circ\, \text{tang}\, b \sin(A-a') + \text{tang}\, b\, \text{tang}\, b' \sin(A-a^\circ)$,

— 2 — 0.3010300
tang b° + 0.0343680
tang b' + 0.2153030
$\sin(A-a)$ — 9.4068418
+ 0.9068654 + 9.9575428 (26)
+ 0.00018004
+ 0.90704544
— 0.93126573
— 0.02422029 = H
log H = — 8.3841793 (29).

+ tang b° + 0.0343680
tang b + 0.1271908
$\sin(A-a')$ + 6.0938148
0.00018004 + 6.2553736 (27)
+ tang b + 0.1271908
tang b' + 0.2153030
$\sin(A-a^\circ)$ — 9.6265798
0.93126573 — 9.9690736 (28)

251. $L = \frac{1}{R} - \frac{1}{2}$,

C. log R... 9.9999908 (30)	$\frac{1}{R}$ = 0.99997884
	0.5
log L = 9.6989516 (31)	L = 0.49997884

252. $L' = \frac{\cos b}{\theta . C} . P\left(\frac{1-\frac{1}{2}e^2}{R}\right) + \frac{\cos b}{\theta . C} . Qe \sin \psi$,

cos b... 9.7767073 (32)	$-\frac{1}{2}$ — 9.6989700
C. θ... 0.9900232	e^2... 6.4505152 (33)
C. C... 0.1580332	C. R... 9.9999908
cos b:θC... 0.9247637	0.00014108 — 6.1494760 (34)
$\frac{1-\frac{1}{2}e^2}{R}$... 9.9999295 (35)	0.99997884
P — 9.2489855	0.99983776 = $\left(\frac{1-\frac{1}{2}e^2}{R}\right)$
log 1er terme — 0.1736787 (36)	
1er terme = — 1.49169047	$\frac{\cos b}{\theta . C}$... 0.9249637
2^e...... = — 0.01251531	$e \sin \psi$... 8.2249541
L' = — 1.50420578	Q — 8.9477238
log L' = — 0.1773073 (38).	—0.01251531 — 8.0974416 (37)

253. $L'' = \frac{\cos^2 b}{2\theta^2 C^2} (P^2 + Q^2 + H^2)$,

$\frac{1}{2}$... 9.6989700	
($\cos^2 b$:$\theta^2 C^2$)... 1.8495273	
1.5484973	1.5484973
P²... 8.4979711	Q²... 7.8954476
+ 1.1129314... 0.0464684 (39)	0.2779361 9.4439449 (40)
+ 0.2779361	
+ 0.0207422	1.5484973
+ 1.4116097 = L″	H²... 6.7683586
	0.0207422 8.3168559 (41)

log L″ = 0.1497146 (42).

254. $r^2 = R^2 + (2R\cos c)\rho + \rho^2 = R^2 + 2R\cos b\cos(A-a)\rho + \rho^2$,
$\frac{1}{r} = L + L'\rho + L''\rho^2$,

$$\begin{array}{rl} \cos b & +\ 9.7767073 \\ \cos(A-a) & -\ \underline{9.9853791}\ (43) \\ \cos c\ldots & -\ 9.7620862 \\ 2\ldots & \ \ 0.3010300 \\ R\ldots & \ \ \underline{0.0000092} \\ \log 2R\cos c & -\ 0.0631254\ (44), \end{array}$$

d'où $r^2 = 1.000042 - 1.156446\rho + \rho^2$,

$\frac{1}{r} = 0.499979 - 1.504206\rho + 1.4116097\rho^2$.

Voilà les équations qu'il faut résoudre par tâtonnement, en essayant pour ρ diverses valeurs jusqu'à ce qu'on en trouve une qui donne pour r^2, et par suite pour $\frac{1}{r}$ tiré de la première équation, la même valeur que fournira la seconde. r est la distance de la Comète au Soleil.

255. Ce qu'il y a de plus simple est de supposer la distance de la Comète à la terre ou $\rho = 1$. Le calcul se fera ainsi :

$$\begin{array}{rll} R^2 = & 1.000042 & \\ \rho^2 = & 1 & \\ - & \underline{1.156446} & \\ r^2 = & 0.8433596\ldots\ldots & \log r^2\ldots\ 9.9261349\ (45) \\ & & \log r\ldots\ 9.9630675 \\ \frac{1}{r} = & 1.08887\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0.0369325\ (46) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} L = & 0.49997884 \\ & \underline{1.4116097} \\ & 1.91158854 \\ & \underline{1.50420578} \\ \frac{1}{r} = & 0.40738276 \\ \text{ci-dessus} = & \underline{1.08887} \\ \text{erreur} = & 0.68149 \end{array}$$

256. Essayons $\rho = \frac{1}{4}$, $\rho' = \frac{1}{4}$,

$$
\begin{array}{rll}
 & 1.0000423 & \\
 & 0.25 & \\
 & 1.2500423 & \\
 - & 0.578223 & \\
r^2 = & 0.6718193\ldots & \log\ldots\ 9.8272526\ (47) \\
r = & & \log r\ldots\ 9.9136263 \\
\frac{1}{r} = & 1.220039\ldots\ldots\ldots\ldots & 0863737\ (48) \\
L = & 0.49997884 & \\
-\frac{1}{4}L'' = & 0.35290242 & \\
 & 0.85188126 & \\
\frac{1}{4}L' = & -\ 0.752103 & \\
\frac{1}{r} = & 0.09977826 & \\
\text{ci-dessus} = & 1.220039 & \\
\text{erreur} = & 1.120261. &
\end{array}
$$

Cette erreur, considérablement augmentée, nous prouve qu'au lieu de diminuer ρ, il fallait l'augmenter. Je fais $\rho = 1,29$ et $\rho = 1,30$, je trouve

ρ	r	erreur.	variation.
1.29	1.08274	+ 0.02496	0.03710
1.30	1.08934	— 0.01214	

L'erreur a changé de signe, d'où je conclus que la véritable valeur doit être vers le tiers de l'intervalle, entre 1,30 et 1,29; je suppose successivement les quantités suivantes qui me donnent les valeurs qu'on trouve à côté.

ρ	r	erreur.
1.2960	1.086694	— 0.001169
1.2957	1.086496	— 0.000454
1.2956	1.086430	— 0.000184
1.2955	1.086362	+ 0.000095

Je

Je conclus de nouveau que la véritable valeur est vers le tiers de l'intervalle, entre 1.2955 et 1.2956; c'est-à-dire, vers 1.29553. Je calcule dans cette supposition, et je trouve

ρ	r	erreur
1.29553	1.086383	— 0.000007

Je néglige une quantité dont il est impossible de répondre en aucune façon, et je m'arrête à

$$\rho = 1.29553, \quad \log \rho \ldots\ 0.1124475,$$
$$r = 1.086383, \quad \log r \ldots\ 0.0359831.$$

M. Conti trouve

$$\log \rho \ldots\ 0.1124374 \quad \log r \ldots\ 0.0359704 \ (88);$$

mais il semble qu'il y a une légère erreur sur la valeur de R', qu'il fait 1.000004 au lieu de 1.000042.

Chacune des suppositions pour ρ exige la recherche de huit logarithmes; nos cinq suppositions en ont exigé 40. Ainsi, pour trouver ρ et r, nous avons au total cherché 88 logarithmes différens. On ne peut se plaindre que l'opération soit trop longue, ni qu'elle soit trop difficile; mais elle exige du soin, de la précision et une attention continuelle à tous les signes algébriques.

257. Soit maintenant

$$P' = \left(\frac{\rho \cos b}{\theta C}\right) P - \left(\frac{1 - \frac{1}{2}e^2}{R}\right), \quad Q' = \left(\frac{\rho \cos b}{\theta C}\right) Q - e \sin \psi,$$
$$H' = \left(\frac{\rho \cos b}{\theta C}\right) H,$$

$$\cos b : \theta C \ldots\ 0.9247637$$
$$\rho \ldots\ 0.1124475$$
$$P \ldots\ \underline{9.2489855}$$
$$+ 1.932843 \ldots\ 0.2861967 \ (89)$$
$$\frac{1 - \frac{1}{2}e^2}{R} \ldots\ \underline{0.999979}$$
$$+ 0.932864 = P', \quad \log. P' = + 9.97209937 \ (90)$$

$\frac{\rho \cos b}{bC}$ — 1.0372112 — 1.0372112

Q — 8.9477238 H — 8.3841793

+ 0.9659062 + 9.9849350 (91) log H′ + 9.4213905

— 0.0167863 — $\varepsilon \sin \psi$

+ 0.9491199 = Q′, log Q′ = + 9.9773211 (92).

258. Soit maintenant

$$
\begin{aligned}
m &= \rho \cos a \cos b + \mathrm{R} \cos \mathrm{A}, \\
n &= \rho \sin a \cos b + \mathrm{R} \sin \mathrm{A}, \\
p &= \rho \sin b, \\
m' &= \quad \mathrm{P}' \sin \mathrm{A} + \mathrm{Q}' \cos \mathrm{A}, \\
n' &= - \mathrm{P}' \cos \mathrm{A} + \mathrm{Q}' \sin \mathrm{A}, \\
p' &= \mathrm{H}',
\end{aligned}
$$

et nous aurons tout ce qu'il faut pour calculer les élémens de la comète,

ρ... 0.1124475............... 0.1124475

cos a — 9.9975022 (93) sin a... 9.0291155 (94)

cos b 9.7767073 9.7767073

— 0.770296 — 9.8866570 (95) + 8.9182703 (96)

M... 0.988659 (97) + 0.082865

m = + 0.218365 log m = 9.3391830 (98) N + 0.150319 (99)

n = 0.233184

log n 9.3676988 (100) ρ... 0.1124475

sin b... 9.9038980 (101)

log p... 0.0163455

+ P′ + 9.9702937 = Q′ + 9.9773211

sin A... 9.1770044 cos A... 9.9950373

+ 0.1403777 + 9.1472981 (102) + 9.9723584 (103)

+ 0.9383360

m' = + 1.0787137 log m' = + 0.0329071 (104)

$$
\begin{array}{llll}
 & -\text{P}' - 9.9702937 & & +\text{Q}' + 9.9773211 \\
 & \cos\text{A}\ldots\ \underline{9.9950373} & & \sin\text{A}\ldots\ \underline{9.1770044} \\
 -0.9232756 & -9.9653310\ (105) & & +9.1543255\ (106) \\
 +\underline{0.1426676} & & & \\
 n' = -0.7806080 & \log n' = -9.8924330\ (107) & &
\end{array}
$$

$$p' = +\text{H}', \quad \log p' = +9.4213905.$$

259.

$$
\begin{array}{llll}
 & \log m\ldots\ 9.3391830 & & -\log m' - 0.0329071 \\
 & \log n' - \underline{9.8924330} & & \log n\ldots\ \underline{9.3676988} \\
 -0.1704574 & -9.2316160\ (108) & & -9.4006059\ (109) \\
 -\underline{0.2515393} & & & \\
 -0.4219967 = mn' - m'n, & \log -9.6253091\ (110) & &
\end{array}
$$

Cette valeur étant négative, il en résulte que la comète est rétrograde.

$$
\begin{array}{llll}
 & m\ldots\ 9.3391830 & & -m' - 0.0329071 \\
 & p' + \underline{9.4213905} & & p + \underline{0.0163455} \\
 +0.057620 & -8.7605735\ (111) & & -0.0492526\ (112) \\
 -\underline{1.120089} & & & \\
 -1.062469 = (mp' - m'p), & \log = -0.0263165, & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
 & n + 9.3676988 & & -n' + 9.8924330 \\
 & p' + \underline{9.4213905} & & p + \underline{0.0163455} \\
 +0.0615303 & +8.7890893\ (113) & & +9.9087785\ (114) \\
 \underline{0.8105474} & & & \\
 0.8720777 = np' - n'p, & \log 9.9405551\ldots\ldots.\ (115) & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
m\ldots\ 9.3391830 & n\ldots\ 9.3676938 \\
m'\ldots\ \underline{0.0329071} & n' - \underline{9.8924330} \\
+9.3720901 & -9.2601268 \\
 & p\ldots\ 0.0163455 \\
 & p'\ldots\ \underline{9.4213905} \\
 & 9.4377360
\end{array}
$$

$mm' + nn' + pp'$ est une quantité positive. On n'a besoin que du signe et non de la quantité.

260. $\text{Tang N} = \frac{np' - n'p}{mp' - m'p} = \text{tang nœud}$;

$\text{tang I} = \frac{mp' - m'p}{(mn' - m'n)\cos N} = \frac{np' - n'p}{(mn' - m'n)\sin N}$;

$\log(np' - n'p)\ldots\ 9.9405551$
$\text{C.}\log(mp' - m'p) - 9.9736835$
$\text{Tang N} = 140^\circ\ 37'\ 15'' - 9.9142386\ (116)$

$\text{C.}\cos N - 0.1118495\ (117)$ $\text{C.}\sin N\ldots\ 0.1976030$
$(mp' - m'p) - 0.0263165$ $(np' - n'p) + 9.9405551$
$(mn' - m'n) - 0.3746909$ $- 9.3746909$
$\text{tang I} = 71^\circ\ 56'\ 0'' + 0.5128569\ (118)$ I toujours $< 90^\circ$ 8.5128490

261. $h = \frac{(mn' - m'n)^2}{2\cos^2 I}$,

$(mn' - m'n)^2\ldots\ 9.2506182$
$\text{C.}\ 2\ldots\ 9.6989700$
$\text{C.}\cos^2 I\ldots\ 1.0648304\ (119)$
$h = 1.03376$ $0.0144186\ (120)$.

Il est aisé de voir que cette manière de trouver la distance périhélie est trop dépendante de l'exactitude avec laquelle on peut connaître l'inclinaison, surtout quand elle est aussi grande que dans notre exemple. Supposons en effet que nous nous trompions de 20′ sur l'inclinaison, ce qui n'est que trop possible dans une première ébauche, nous aurions

$\frac{1}{2}(mn' - m'n)^2\ldots\ 8.9495882$
$\text{C.}\cos^2 I = 72^\circ\ 36'\ldots\ 1.0485392\ (121)$
$h = 0.9956975$ $9.9981274\ (122)$
ci-dessus... 1.03376
différence $= 0.0380625 > \frac{1}{30}$.

M. Conti trouve $h = 1.032573$. Quoique nous nous accordions sur l'inclinaison, mais nous différons d'une petite quantité sur $(mn' - m'n)$.

262. $h \ldots$ 0.0144186
C. $r \ldots$ 9.9640169
$\cos^2 \frac{1}{2}u \ldots\ldots$ 9.9784255

$\cos \frac{1}{2}u = 12° 43' 7'' \ldots$ 9.9892125 (123)
$u = 25.26.14.$

M. Conti trouve $u = 25° 42' 40''$.

$n \ldots$ 9.3676988
C. $m \ldots$ 0.6608170

$\tang \varphi = \frac{n}{m} = 46° 52' 47'' \ldots$ 0.0285158 (124)
$N = 140.37.15 = 4^s 20° 37' 15''$
$\varphi - N = 266.15.32$

$\tang(\varphi - ☋) = 86.15.32 \ldots\ldots$ 1.1845042 (125)
C. cos I... 0.5242696

$\tang \sigma = 2^s 28° 52' 47'' \ldots$ 1.7087738 (126)
$☋ = 10.30.37.15$

longitude = 1.19.20. 2
+ anomal. = 0.25.26.14 } = $2^s 14° 56' 16''$ = longit. périhélie.

M. Conti trouve $2^s 15° 14' 59''$.

263. L'anomalie 25° 26' 14" répond dans la table à

$$18^j.75 + \left(\frac{547}{4544} = 0.1204\right) \text{ ou } 18.8704,$$

$h \ldots$ 0.0144186
$h^{\frac{1}{2}} \ldots$ 0.0072093
$h^{\frac{3}{2}} \ldots$ 0.0216279

18.8704 — 1.2757801 (127)
19.834 — 1.2974080 (128)
32.29888

Passage au périhélie 12.46488 septembre.

264. Ainsi, au moyen de 128 logarithmes différens dans cet exemple, ou 150 peut-être dans une autre occasion dans laquelle il aurait fallu 7 ou 8 suppositions pour arriver aux valeurs de ρ et de r, nous avons trouvé tous les élémens approximatifs de notre comète. La méthode de M. Legendre est donc encore plus courte que celle de M. Olbers; mais elle donne moins de choses, et les donne moins exactement. En effet, les équations de condition de M. Olbers donnent les deux rayons vecteurs et la corde, d'où l'on tire l'angle compris ou la différence des anomalies, ensuite leur somme et enfin les deux anomalies; alors

$$h = r\cos^2\tfrac{1}{2}u = r'\cos^2\tfrac{1}{2}u';$$

h se déduit d'une quantité plus grande, et sans employer aucun élément étranger, ce qui n'a pas lieu dans la formule $h = \frac{(mn' - m'n)}{2\cos^2\frac{1}{2}I}$.

M. Legendre, par une marche inverse, fait $\cos^2\frac{1}{2}u = \frac{h}{r}$, et l'anomalie dépend trop de h qui n'est pas toujours assez sûr. Le passage au périhélie ne saurait non plus être assez exact, si l'on s'est trompé sur les élémens qui précèdent.

Ces deux méthodes ont un défaut commun qui tient à la nature du problème, et qui doit par conséquent être plus ou moins sensible dans toutes les méthodes; ce sont des formules composées de différences entre deux quantités souvent assez petites, et qu'il est impossible de déterminer assez exactement.

Quoi qu'il en soit de ces remarques, on doit se féliciter d'avoir des méthodes qui vont au but par un chemin si facile et si direct. Si elles manquent ce but dans quelques circonstances, elles l'atteignent le plus souvent; et dans tous les cas, elles fournissent toujours une approximation quelconque, et qui n'est pas à dédaigner.

265. Pour corriger ces élémens, l'auteur emploie fort adroitement les différences logarithmiques des élémens qu'il veut corriger; c'est-à-dire, qu'en calculant quelques observations éloignées, d'après ses élémens provisoires, il ajoute à chacun de ses logarithmes une partie proportionnelle pour la correction inconnue. De ces parties proportionnelles successivement ajoutées ou soustraites les unes des autres, il tire enfin la valeur de ses corrections; et pour en avoir la valeur la plus probable, il y applique sa méthode des moindres carrés. Tout cela est

simple et facile à coocevoir, l'exécution seulement est un peu longue : nous ne pouvons ici entrer dans tous ces détails pour lesquels uons renverrons à l'ouvrage même, où l'on tronvera de plus les formules nécessaires pour le cas où les trois observations ne seraient pas également espacées, comme elles l'étaient dans l'exemple que nous avons calcnlé.

266. Il serait fort inutile de s'appesantir sur les moyens de correction, puisqne la méthode exposée ci-dessus peut les remplacer toutes avec avantage. En effet, quand vous avez par un moyen quelconque obtenu des élémens approximatifs, vous les employez à calculer les longitudes héliocentriques et les rayons vecteurs ; c'est ce qui est également de toutes les méthodes. Daos la mienne, au lieu de continuer ce calcul pour obtenir le lieu géoceotrique et le comparer à l'observation, vous vous servez au contraire du lieu géocentrique observé pour calculer la longitude héliocentrique et le rayon vecteur. Vous faites ce calcul dans trois suppositions de x, et vous formez alors pour chaque observation un tableau de trois lignes ; ensorte que le rayon vecteur, calculé sur les élémens approximatifs, se trouve compris dans les limites du tableau. Alors vons formez autant d'équations de condition que vous avez d'observations ; trois suffisent, mais vous ponvez en calculer 30 ou 300 ; il suffit d'en avoir de 4 en 4 jours ou de 5 en 5 pour tout le tems de l'apparition. Vous corrigez aiusi votre parabole ; après quoi, vous cherchez par des moyens pareils à corriger le nœud et l'inclinaison. Cette méthode me paraît plus directe et même plus analytique qu'aucune de celles qu'on a proposées jusqu'à ce jonr.

De la nature des Comètes, de leur atmosphère et de leur queue.

267. Il est démontré par les divers retours de la comète de 1759, que son orbite est elliptique : rien ne démontre jusqu'ici qu'aucune orbite soit parabolique ; car aux paraboles calculées, il serait aisé de substituer une infinité d'ellipses plus ou moins alongées qui satisferaient aux observations aussi bien que la parabole. Il est encore moins démontré qu'aucune orbite soit hyperbolique, qnoique le soupçon en soit venu une fois ou deux, d'après la difficulté de trouver une ellipse on une parabole qui satisfît à des observations qui n'étaient ni bien nombreuses, ni peut-être assez précises. Quoi qu'il en soit, les comètes seront toujours des corps qui décriront des sections coniques dont le soleil occupe un

des foyers ; ainsi elles formeront avec les planètes une même famille. Les différences les plus remarquables sont jusqu'ici la grandeur de l'excentricité et celle de l'inclinaison qui, pour les planètes, ne passe pas encore 35°, et qui, pour les comètes, peut aller à 180 ; mais ce n'est qu'une variété peu essentielle.

268. Si de la courbe et de sa position relativement à l'écliptique, nous passons au corps même de la comète, nous y remarquerons des différences d'abord assez frappantes qui, d'après l'examen, se réduiront encore à peu de chose. Les comètes sont généralement assez petites et beaucoup moindres que les planètes anciennement connues, mais elles s'éloignent beaucoup moins des petites planètes aperçues de nos jours. Les comètes sont environnées d'une nébulosité remarquable ; mais à cet égard encore les nouvelles planètes forment la transition entre les deux espèces que nous comparons.

La masse des comètes est peu considérable, mais celles de Cérès, de Junon, etc. ne le sont guères davantage. Les comètes doivent être sphériques, et rien ne nous prouve le contraire ; elles devraient avoir des phases, et on en voit annoncées et dessinées dans le registre de l'Observatoire, à l'occasion de la comète de 1682. Si l'on n'en voit pas plus souvent, c'est sans doute à cause de la nébulosité qui empêche de distinguer la figure propre du noyau ; c'est ainsi qu'on appelle le corps même de la comète : cette nébulosité produit le même effet que les globes de verre dépoli qui entourent nos lampes. Les comètes doivent être opaques, nous n'avons aucune preuve du contraire : à la vérité, quelques astronomes ont dit avoir vu des étoiles à travers le noyau ; mais outre que les observations sont en très-petit nombre et fort difficiles, elles ne démontrent pas encore que la comète soit diaphane. On peut n'avoir pas bien distingué le noyau d'avec la nébulosité plus épaisse qui touche de plus près au corps de la comète ; et d'ailleurs la réfraction aura pu faire paraître sur le bord antérieur du disque, une étoile qui était en effet cachée par le noyau. Les comètes n'ont point de lumière propre, non plus que les planètes ; au reste, on commence à douter de cette assertion. Quelques astronomes paraissent croire aujourd'hui que les planètes, les satellites et les comètes pourraient bien avoir en propre une lumière faible et presque imperceptible et semblable à celle de la matière nébuleuse (XXXII. 55).

269. La nébulosité qui entoure la comète est son atmosphère ; cette atmosphère

atmosphère est beaucoup plus étendue que celle des planètes ordinaires; cette étendue varie à mesure que la comète se rapprochant du soleil, en éprouve un plus fort degré de chaleur. La chaleur volatilise toutes les parties qui en sont susceptibles, et qu'un long froid avait condensées quand la comète était vers son aphélie : les parties volatilisées deviennent excessivement légères et s'éloignent du corps de la comète qui n'exerce plus sur elles qu'une faible attraction. Dans cet état, si elles viennent à être frappées par les rayons du soleil, elles cèdent à cette impulsion, quelque faible qu'on la suppose, et forment derrière la comète cette longue traînée connue sous le nom de *queue*, et qui est toujours dans la partie opposée au soleil, c'est-à-dire sur le prolongement du rayon vecteur mené du soleil à la comète. Telle est donc la cause qui produit la queue et qui en décide la direction. Apian est le premier qui ait observé cette direction. Tycho, quelques années après, à l'occasion de la comète de 1577, crut voir que la queue était opposée à Vénus, et non au soleil; mais cette idée n'a point été adoptée par les astronomes.

270. La queue ne tenant plus à la comète, ne la suit plus dans son cours; elle reste en arrière : de là cette légère courbure qu'on y remarque, et cette inclinaison qui la fait pencher vers le lieu que la comète vient d'abandonner. Jusqu'ici cette explication, déjà fort ancienne, satisfait en général aux phénomènes observés. Mais il arrive parfois que la queue se divise en plusieurs parties, toutes courbes, toutes inclinées du même côté, mais qui n'ont tout-à-fait ni la même courbure, ni la même inclinaison (Voyez la comète de 1744). Quelquefois la queue, comme en 1807, présente aux yeux une courbe à deux branches, comme serait une parabole. Dans ces cas, qui peuvent varier de bien des manières, il faut convenir que l'explication n'est pas complète, et qu'il nous faudrait, pour rendre raison de tous les détails, quelques connaissances qui nous manquent encore, et nous manqueront peut-être toujours. D'ailleurs il faut avouer aussi que rien n'est moins constant que ces apparences, qu'elles ne sont pas les mêmes pour deux jours de suite, ni pour le même jour en différens climats. Ici, on ne voit à la queue qu'une longueur de quelques degrés; ailleurs, elle occupe une partie considérable du ciel : ici elle est simple, ailleurs elle paraît avoir deux branches. On en a vu qui, dans les climats méridionaux, soutendaient un angle de 90°, et qui, en Europe, n'en avaient que 15

ou 20 tout au plus. Ces circonstances d'ailleurs intéressent le physicien plus encore que l'astronome qui s'occupe spécialement des mouvemens de la comète, et qui se contente, quand la queue est remarquable, d'en déterminer la grandeur et l'inclinaison; quant à la courbure, il est difficile de la mesurer exactement.

271. La grandeur apparente de la queue, celle de la chevelure, c'est-à-dire de la nébulosité ou de l'atmosphère, et celle du noyau, dépendent de la distance de la comète à la terre, et cette distance varie à chaque instant. Hévélius a observé une comète à laquelle il trouva de 25 à 26′ de diamètre (*Voyez* Cométographie, p. 7); mais si le diamètre était presque égal à celui de la lune, il y avait une grande différence de lumière; celle de la comète était pâle, et ressemblait à celle de la lune couverte d'un nuage, p. 1 et 2.

272. On a demandé si les comètes étaient aussi anciennes que le reste du système solaire. Pingré, tome II, p. 119, se déclare pour l'affirmative, mais il n'en donne aucune raison; et si les conjectures d'Herschel (XXXII. 35) sont justes, il pourrait continuellement se former de nouvelles comètes. On peut demander encore si elles sont aussi durables que les autres planètes, on n'en sait rien de bien positif; mais si à chaque fois qu'elles passent au périhélie, elles perdent toute la matière dont s'est composée leur queue : si cette queue se détache et reste disséminée dans l'espace, la comète diminuerait à chacun de ses retours au périhélie, et se réduirait enfin à rien, à moins que dans sa route elle ne trouvât de quoi réparer ses pertes, et c'est un point sur lequel il est impossible de prononcer.

273. La vitesse apparente d'une comète dépend des dimensions de son orbite relativement à la terre. On a remarqué que celle de 1472 avait décrit 120° en un jour. La Caille a calculé (*Mém. de l'Acad.* 1760, p. 108) qu'une comète dont l'orbite se confondrait avec l'écliptique, et qui serait en même tems périhélie, en opposition avec le soleil, rétrograde et à la même distance de la terre que la lune ou à peu près, semblerait parcourir 141° 40′ de grand cercle en une heure, 160° 14′ 54″ en deux heures, 178° 20′ 30″ en 24 heures, que ce mouvement prodigieux serait encore augmenté de 15° par heure par le mouvement diurne; ensorte qu'un observateur entre les tropiques verrait la comète en moins de $\frac{3}{4}$ d'heure s'élever de l'horizon au zénit redescendre vers l'horizon pour se coucher quatre heures après. On n'ob-

servera probablement jamais des mouvemens aussi extraordinaires, ils n'auraient pourtant rien d'impossible; ces apparences seraient produites par les mouvemens combinés de la terre et de la comète, mais ils n'auraient en eux-mêmes rien que de très-régulier, et qui ne fût une conséquence nécessaire des lois communes à toutes les planètes, et que la Trigonométrie nous met en état de calculer. Suivant la position de l'orbite et celle de la terre, l'apparition d'une même comète à ses retours sera plus ou moins longue, son éclat plus ou moins grand; elle aura une queue énorme ou en paraîtra dépourvue, elle pourra parcourir une partie plus ou moins considérable du zodiaque. La comète de 1769 en a parcouru huit signes entiers. Hévélius a calculé qu'une comète pourrait décrire une circonférence entière du zodiaque, et même plus par son mouvement combiné avec celui de la terre. Pingré ne croit pas la chose possible. Hévélius, dans presque tous ses calculs, suppose une trajectoire rectiligne; cependant il démontre ailleurs que le véritable mouvement est curviligne; il dit expressément que la trajectoire est une section conique; et l'on voit à la page 670, des orbites paraboliques et hyperboliques qui tournent leur concavité vers le soleil; mais il ne dit nulle part que le soleil occupe le foyer de la courbe. Un astronome allemand eut pourtant cette idée, nous dit-on; mais c'était un aperçu vague, et dont on ne donnait aucune raison. Newton, le premier, enseigna la vraie théorie; Halley en fit l'application à 24 comètes qui lui parurent assez bien observées pour mériter qu'il prît la peine de les calculer. Bradley hérita de sa méthode, qui fut publiée et traduite en français par Lemonnier, et depuis par Lalande. La Caille exposa dans ses divers Mémoires une méthode peu différente; il s'attacha à faciliter les calculs, et il augmenta le catalogue des comètes. Depuis, les méthodes se sont singulièrement multipliées, mais toutes reposent sur les principes établis par Newton.

274. Nous avons parlé (2) des différentes formes sous lesquelles se montrent les comètes, et des noms qui servaient à les distinguer. Hévélius a pris la peine de nous les dépeindre dans une quarantaine de figures (*Cométogr.*, p. 414 et suiv.); il y a joint les comètes qu'il avait observées lui-même. On peut soupçonner avec beaucoup de vraisemblance, que l'imagination lui a fourni seule quelques-uns des détails qu'il nous présente, ou que sa lunette ne le servait pas assez bien pour qu'il pût nous transmettre une figure assez exacte. On peut en juger

par les figures qu'il nous donne de l'anneau de Saturne, dont il n'avait pas deviné la véritable forme.

275. La terreur qu'inspiraient autrefois les comètes a pu contribuer aussi à la bizarrerie des figures qu'on nous a transmises. Long-tems on les a considérées comme des signes de la colère céleste, comme des annonces de guerre, de peste, de famine, de tremblement de terre ou d'autres fléaux. Le pape Callixte II exorcisait la comète et les Turcs, dans une même bulle. On croyait remarquer qu'elles se montraient à la mort ou à la naissance des princes et des grands hommes. Ainsi, à la naissance de Mithridate, 122 ou 130 ans avant notre ère, on vit, pendant 80 jours, une comète dont l'éclat surpassait celui du soleil; elle occupait un quart du ciel, et elle employait quatre heures à se lever et à se coucher. *Voyez* Justin, liv. 37. Une comète fort remarquable encore, quoique moins extraordinaire, est celle qui parut pendant sept jours, à la mort de César, ou celle qui parut à Constantinople, l'année de la naissance de Mahomet. Mais sans nier tout-à-fait les circonstances dont les historiens ont chargé leurs récits, on peut au moins y supposer quelque exagération; et en effet, depuis que ce sont des astronomes qui font l'histoire et la description des comètes, on n'en trouve plus qui rivalisent d'éclat ni avec le soleil, ni avec la lune, ni même avec Vénus périgée.

276. Autrefois les éclipses du soleil et même celles de lune partageaient avec les comètes le droit d'épouvanter les peuples, même les plus civilisés. On s'est familiarisé avec les éclipses, depuis qu'on les voit si exactement annoncées dans tous les Almanachs. A la vérité, les astronomes n'ont encore aucun moyen de prédire les comètes, si ce n'est celle de Halley, qui doit revenir vers 1835. Mais il ne se passe presque plus d'année où l'on n'en découvre une ou deux. Ces comètes sont pour la plupart si peu remarquables que le public n'y attache aucune importance; d'ailleurs, au bout de quelque tems, les astronomes annoncent la route qu'elles doivent suivre pendant toute leur apparition, le jour de leur plus grand éclat, celui de leur plus grande proximité à la terre, enfin le tems où elles cesseront d'être visibles, ensorte que l'inquiétude n'a pas le tems de naître. Il ne faudrait pourtant répondre de rien encore, si une comète avait un éclat extraordinaire ou une queue bien longue; mais les terreurs ont changé d'objet; on ne redoute plus ni la guerre, ni la famine, ni la mort des potentats; on craint que la

comète ne vienne choquer la terre, la briser, l'enflammer ou l'inonder. Les savans qui ont dissipé les premières craintes, ont peut-être jusqu'à un certain point contribué à faire naître les autres. Newton avait cherché à les prévenir, en remarquant que toutes les orbites connues étaient placées de manière à rendre impossible une rencontre qui pourrait avoir des effets si terribles. Lalande, en convenant de la justesse de cette remarque, examina superficiellement la question de savoir si les perturbations ne pourraient pas changer les nœuds et les inclinaisons de manière qu'une comète, à son retour, pût se trouver sur le chemin de la terre; il crut la chose possible, mais les perturbations pouvaient tout aussi bien produire un effet contraire; et en admettant le fait, il ne suffirait pas que la comète traversât en effet le plan de l'écliptique en un point de l'ellipse que décrit la terre, que le rayon vecteur de la comète fût égal à celui qu'aurait la terre en ce point de son orbite; il faudrait encore que la terre se trouvât pour le moment au point d'intersection des deux ellipses, ensorte que la probabilité de la rencontre serait encore si faible, que raisonnablement elle ne devrait pas nous inquiéter. Mais parmi les 117 comètes qu'on a observées, il n'en est aucune qui puisse rencontrer la terre.

277. Si la distance périhélie surpasse la distance de la terre au soleil, l'orbite de la comète, même en la supposant dans le plan de l'écliptique, embrassera l'orbite de la terre à une distance plus ou moins grande, et qui doit prévenir toutes les alarmes.

Si la distance périhélie est plus petite que la distance de la terre au soleil, et que l'orbite soit dans le plan de l'écliptique, l'ellipse alongée de la comète coupera celle de la terre en deux points; il y aura deux intersections et deux chances de rencontre; mais ce cas n'existe pas dans la nature, ou du moins il nous est inconnu, nous n'en n'avons pas le moindre indice. Au contraire, toutes les orbites connues font avec le plan de l'écliptique un angle plus ou moins grand, et souvent très-considérable; ensorte que quand le rayon vecteur est égal à celui de la terre, la latitude est si forte que la comète passerait, à une grande distance, au-dessus ou au-dessous de la terre. Aucune des comètes observées jusqu'ici n'est donc à craindre, et elles ont toutes passé, non-seulement sans nous faire aucun mal, mais même sans produire la moindre perturbation, et sans nous forcer au moindre changement dans nos tables astronomiques. Il est vrai que le premier jour où l'astro-

nome aperçoit une comète, on ne sait encore quelle peut être sa route; mais au bout de trois jours, l'orbite est calculée; l'astronome peut dire à quelle distance elle s'approchera de la terre, et quand le public aperçoit la comète, il apprend en même tems qu'il n'y a rien à craindre.

278. La comète ne serait donc vraiment redoutable que dans son nœud; quand elle s'y rencontre, son anomalie $u = (\Omega - \Pi)$; son rayon vecteur $= \frac{h}{\cos^2 \frac{1}{2}(\Omega - \Pi)}$: si ce rayon diffère beaucoup de l'unité, la comète n'est pas dangereuse; si sa distance diffère peu de l'unité, il faut la comparer au rayon vecteur de la terre pour le même jour, il faut comparer la longitude de la terre à celle du nœud. On sait le tems du passage de la comète par le périhélie, on en déduit le tems de l'anomalie $(\Omega - \Pi)$, le tems du passage par le nœud; on calcule pour ce moment le lieu de la terre et sa distance au soleil. Soit V cette distance, K la corde qui joint les centres de la comète et de la terre,

$$K^2 = V^2 + \frac{h^2}{\cos^4 \frac{1}{2}(\Omega - \Pi)} - \frac{2Vh\cos(\text{♁} - \Omega)}{\cos^2 \frac{1}{2}(\Omega - \Pi)}.$$

Pour qu'il y ait un choc, il faudrait que K ne surpassât point la somme des rayons du globe terrestre et du globe de la comète, ou que K fût moindre que cette somme.

279. Sans choquer la terre, une comète pourrait en approcher assez pour causer par son attraction quelques fortes marées qui produiraient des inondations; mais on a répondu que la comète passant si près de la terre, irait d'un mouvement si rapide que son attraction n'aurait pas le tems nécessaire pour vaincre l'inertie des eaux, et que les effets seraient très-médiocres; d'ailleurs aucune comète connue ne peut passer assez près. Duséjour a calculé ces effets pour 13000 lieues de distance; et la comète de 1770, qui est de toutes les comètes connues celle qui s'est le plus approchée de la terre, en était encore à 800,000 lieues. Il n'est donc en tout cela rien que de très-rassurant; et c'est parce qu'on n'avait pas lu le Mémoire de Lalande, que les idées qu'il avait mises en avant comme de simples possibilités, extrêmement invraisemblables, causèrent en 1774 des terreurs si extravagantes parmi le peuple de Paris. Au reste, Duséjour combattit même cette probabilité si faible, par des argumens sans réplique.

280. Si la terre ne peut être rencontrée par le corps même de la comète, ne pourrait-elle au moins se trouver enveloppée et embrasée par cette longue queue qui s'étend à plusieurs millions de lieues? D'abord il n'est pas sûr que la queue soit embrasée, et l'on sait que Whiston a voulu expliquer le déluge par la queue de la fameuse comète de 1680 qui pouvait alors se trouver dans le voisinage de la terre. L'ouvrage de Whiston est aujourd'hui rangé dans la classe des romans; et d'ailleurs, puisque la queue est toujours sur le prolongement du rayon vecteur de la comète, pour qu'elle enveloppât la terre, il faudrait que la comète fût à-la-fois en conjonction inférieure et dans son nœud, du moins à fort peu près, circonstances difficiles à réunir quand elles ne sont pas incompatibles. De plus, il est évident que la queue des comètes est extrêmement rare, puisqu'elle n'empêche pas d'apercevoir les plus petites étoiles, et nous pourrions nous trouver plongés dans cette queue sans en éprouver aucun effet sensible, sans même l'apercevoir. Concluons donc que les comètes ne peuvent offrir au public qu'un spectacle quelquefois remarquable, aux savans qu'un sujet de méditations, enfin à l'astronome qu'une matière souvent renaissante de calculs qui n'ont pourtant d'autre but que de tracer, pour ainsi dire, le signalement de la comète, pour qu'on puisse la reconnaître quand elle reparaîtra et déterminer l'ellipse qu'il faudra substituer à la parabole approximative qu'on est réduit d'abord à employer, faute des données nécessaires pour calculer la courbe véritable. Car il n'est que trop vrai que l'apparition la plus longue, celle où la comète a parcouru 200° d'anomalie, est encore insuffisante pour déterminer le grand axe et la révolution. Les astronomes et les géomètres qui se sont livrés à ces recherches, plus curieuses qu'utiles, ont toujours différé de plusieurs centaines d'années sur le tems de la révolution. Nous en citerons quelques exemples. La comète de 1811 avait décrit 183° de son ellipse. M. Conti l'a calculée suivant la méthode de M. Gauss; il a trouvé d'abord pour demi-grand axe 210,6008741 et 3056,3 ans pour le tems de la révolution : mais, par un autre calcul, le demi-grand axe était de 174,3 seulement, et la révolution 2301 ans; les autres élémens n'avaient subi que des changemens presque insensibles. Pour la comète de 1769, Euler et Lexell trouvaient que la période était entre 449 et 519 ans. Pingré trouva depuis 1231 ans.

Dans un grand et beau travail de M. Bessel sur la comète de 1807 (Kœnisberg 1810), on voit d'abord un demi-grand axe 156,252, et une

révolution de 1933,2 ans. Un second calcul fait trouver 130,063 et 1483,5 ans ; enfin, en ayant égard aux perturbations que la comète a dû éprouver par le voisinage de la terre, 143,195 et 1713,5 ans ; tenant compte ensuite des perturbations produites par Jupiter, le retour doit avoir lieu au bout de 1543,1 ans. On voit quelle est l'incertitude de ce problème ; l'ellipse qui résulte des observations peut différer considérablement de celle que la comète doit décrire à son retour.

281. Maupertuis a pensé qu'une comète, passant auprès de la terre, pourrait l'entraîner et la rendre elle-même comète ; mais il faudrait pour cela que la masse de la comète fût plus considérable que celle de la terre. Il a dit encore que la comète pourrait plus facilement nous enlever notre lune, mais elle pourrait aussi devenir pour nous une seconde lune. Il pourrait par la suite en résulter quelques avantages, achetés d'abord par la nécessité de refaire les tables de l'ancienne lune, et même celles du soleil, enfin par l'embarras que causerait aux navigateurs la privation de tous les moyens qu'ils ont actuellement pour trouver leur longitude. Maupertuis ajoute enfin que *notre lune pourrait bien avoir été au commencement une petite comète, qui, pour s'être trop approchée de la terre, s'y est trouvée prise.* Cette dernière opinion paraîtrait appuyée par l'ancienne tradition des Arcadiens, qui prétendaient que leurs ancêtres avaient habité l'Arcadie avant que la lune existât. Pingré, en fortifiant par cet argument la conjecture de Maupertuis, ne songeait pas au premier chapitre de la Genèse ; mais en admettant l'idée de Maupertuis, nous ne voyons pas ce que la comète aurait perdu, si ce n'est sa queue qui se sera dissipée à la longue. Mais elle aura gagné une température plus uniforme et plus semblable à celle dont nous jouissons ; elle aura conservé le degré de chaleur qu'elle venait d'acquérir près de son périhélie. Mais la constitution de la lune paraît trop différente de ce que nous connaissons en général des comètes, pour que nous puissions regarder cette conjecture autrement que comme une rêverie qui mérite peu d'être sérieusement discutée. Au reste, Duséjour l'a réfutée par le calcul.

282. Enfin, Newton a pensé que les comètes pouvaient tomber sur le soleil et réparer les pertes qu'il fait par l'émission continuelle de la lumière. Aucun fait jusqu'ici ne vient à l'appui de cette assertion ; nous n'avons aucun moyen de constater ni de mesurer les pertes que peut faire le soleil, ni aucune idée des moyens qu'il peut avoir de les réparer.

TABLE I.

TABLE Ire.

CATALOGUE DES COMÈTES.

Nº.	Années.	PASSAGE au périhélie. Tems moyen à Paris.	Longitude du périhélie.	Longitude du nœud ascend.	Inclinaison.	Distance périhélie.	Log. dist. pér. = h.	Log. moy mouvem.	Sens du mouvement.	CALCULAT.
1	240	Nov. 10^j 0^h 0′ 0″	9^s 1° 0′ 0″	6^s 0° 0′ 0″	44° 0′ 0″	0.371000	9.570000	0.605000	D	Burckhardt.
2	539	Oct. 20.15.30. 0	10.13.30. 0	1.28. 7^{s}28°	10. 0. 0	0.341200	9.533070	0.660523	D	*Idem.*
3	565	Juill. 9. 0. 0. 0	2.28. 0. 0	5. 8. 0′ 0″	62. 0. 0	0.719000	9.856860	0.174840	R	*Idem.*
....		Juill. 14.12. 0. 0	2.20. 0. 0	5. 9.30. 0	59. 0. 0	0.832000	9.920000	0.080130	R	*Idem.*
4	837	Mars. 1. 0. 0. 0	9.13. 3. 0	6.26.33. 0	10 00 12	0.580000	9.763428	0.314980	R	Pingré.
5	989	Sept. 12. 0. 0. 0	8.24. 0. 0	2.24. 0. 0	17. 0. 0	0.568000	9.754600	0.328200	R	Burckhardt.
6	1066	Mai. 30 ou 31	4. 0. 0. 0	7.20. 0. 0	70 00 80	0.340000	9.530000	0.665	R	Pingré.
7	1097	Sept. 21. 9. 0. 0	11. 2.30. 0	6.27.30. 0	73.30. 0	0.738500	9.868320	0.157648	D	Burckhardt.
8	1231	Janv. 30. 7.22. 0	4.14.48. 0	0.13.30. 0	6. 5. 0	0.947760	9.976698	9.995081	D	Pingré.
9	1264	Juill. 6. 8. 0. 0	9.21. 0. 0	5.19. 0. 0	36.30. 0	0.445000	9.648360	0.487588	D	Duothorn.
	....	Juill. 16. 0. 0. 0	9. 2.30. 0	5.25.30. 0	30.25. 0	0.410000	9.613369	0.509924	D	Pingré.
	....	Juill. 17. 6.10. 0	9. 5.45. 0	5.28.45. 0	30.25. 0	0.410810	9.613640	0.539068	D	*Idem.*
10	1299	Mars. 31. 7.38	0. 3.20. 0	3.17. 8. 0	68.57. 0	0.317930	9.502330	0.706633	R	*Idem.*
11	1301	Sept. Commencem.	6. 0. 0. 0	2. 0. 0. 0	80	0.330000	9.518500	0.68236	D	Burckhardt.
12	1301	Oct. 22. 0. 0. 0	9. 0. 0. 0	0.15. 0. 0	70	0.457000	9.660000	0.47	R	Pingré.
13	1337	Juin. 2. 6.35. 0	1. 7.59. 0	2.24.21. 0	32.11. 0	0.406660	9.609236	9.546271	R	Halley.
	....	Juin. 1. 0.40. 0	0.20. 0. 0	2. 6.22. 0	32.11. 0	0.644520	9.809240	9.216268	R	Pingré.
14	1351	Nov. 26.12. 0. 0	2. 9. 0. 0	Indéterminée.	Indéterm.	1.000000	0.000000	9.90013	D	Burckhardt.
15	1362	Mars. 11. 5. 0. 0	7. 9. 0. 0	8 9. 0. 0	21. 0. 0	0.455800	9.658750	0.47202	R	*Idem.*
	....	Mars. 2. 8. 0. 0	7.17. 0. 0	7.27. 0. 0	32. 0. 0	0.470000	9.672140	0.47073	R	*Idem.*
16	1456	Juin. 8.22.10. 0	10. 1. 0. 0	1.18.30. 0	17 56. 0	0.585520	9.767540	0.308818	R	Pingré.
17	1472	Févr. 28.22.33. 0	1.15.33.30	9.11.46.20	5.20. 0	0.542730	9.734584	0.358252	R	Halley.
16	1531	Août. 24.21.28. 0	10. 1.39. 0	1.19 25. 0	17.56. 0	0.567000	9.753583	0.329754	R	*Idem.*
18	1532	Oct. 19.22.21. 0	3.21. 7. 0	2.20.27. 0	32.36. 0	0.509100	9.706803	0.399924	D	*Idem.*
	....	Oct. 19.15. 2. 0	4.15.44. 0	3.29. 8. 0	42.27. 0	0.612550	9.787141	0.279416	D	Méchain.
	....	Oct. 18. 8. 8. 0	3.21.48. 0	2.27.23. 0	32.36. 0	0.519220	9.715351	0.387101	D	Olbers.
19	1533	Juin. 18.19.40. 0	3.14.12. 0	4. 5.44. 0	35.49. 0	0.202800	9.307068	0.999526	R	Douwes.
	....	Juin. 14.21.20.52	7. 7.40. 0	9.29.19. 0	28.14. 0	0.326860	9.514362	0.688585	D	Olbers.
9	1556	Avr. 21.20.13. 0	9. 8.50. 0	5.25.42. 0	32. 6.30	0.463900	9.666424	0.460492	D	Halley.
20	1577	Oct. 26.18.55. 0	4. 9.22. 0	0.25.52. 0	74.32.45	0.183420	9.263447	1.064958	R	*Idem.*
21	1580	Nov. 28.15.10. 0	3.19. 5.50	0.18.57.20	64.40. 0	0.596280	9.775450	0.296953	D	*Idem.*
	....	Nov. 28.13.54. 0	3.19.11.55	0.19. 7.37	64.51.50	0.595530	9.774903	0.297774	D	Pingré.
22	1582	Mai. 6.16. 9. 0	8. 5.23.10	7.21. 7.20	61.27.50	0.225695	9.353522	0.929845	R	*Idem.*
	....	Mai. 7. 8.30 V.S.	9.11.26.45	8. 4.42.35	59.29. 5	0.040066	8.602754	2.055977	R	*Idem.*
23	1585	Oct. 7.19.30 N.S.	0. 8.51. 0	1. 7.42.30	6. 4. 0	1.093580	0.038850	9.901853	D	Halley.
24	1590	Févr. 8. 3.55. 0	7. 6.54.30	5.15.30.40	29.40.40	0.576610	9.760882	0.318805	R	*Idem.*
25	1593	Juill. 18.13.48. 0	5.26.19. 0	5.14.15. 0	87.58. 0	0.089110	8.949940	1.535218	D	La Caille.
26	1596	Août. 10.20. 5. 0	7.18.16. 0	10.12.12.30	55.12	0.512930	9.710058	0.395041	R	Halley.
	....	Août. 8.15.43. 0	7.28.30.50	10.15.36.50	52. 9.45	0.549124	9.739908	0.350266	R	Pingré.
16	1607	Oct. 26. 4. 0. 0	10. 2.16. 0	1.20.21. 0	17. 2. 0	0.586800	9.768490	0.307393	R	Halley.
	1607	Oct. 26.17.20.19	10. 1.38.10	1.18.40.28	17.12.17	0.587974	9.769358	0.306091	R	Bessel.
27	1618	Août. 17. 3.12. 0	10.18.20. 0	9.23.25. 0	21.28	0.512980	9.710100	0.394978	D	Pingré.
28	1618	Nov. 8.12.33. 0	0. 2.14. 0	2.16. 1. 0	37.34	0.379750	9.579408	0.590881	D	Halley.
	....	Nov. 8. 8.34.15	0. 3. 5.21	2.15.44.10	37.11.31	0.389544	9.590556	0.574294	D	Bessel.
29	1652	Nov. 12.15.50 0	0.28.18.40	2.28.10. 0	79.28. 0	0.847500	9.928140	0.067918	D	Halley.
18	1661	Janv. 26.23.50. 0	3.25.58.40	2.22.30.30	32.35.50	0.4485100	9.651772	0.484570	D	*Idem.*
	....	Janv. 26.21.18. 0	3.25.16. 8	2.21.54. 0	33. 0.55	0.4427220	9.646131	0.400932	D	Méchain.
30	1664	Déc. 4.12. 2. 0	4.10.41.25	2.21.13.55	21.18.40	1.0257550	0.011044	9.943562	R	Halley.
31	1665	Avr. 24. 5.25.10	2.11.54.30	7.18. 2. 0	76. 5. 0	0.1064900	9.027309	1.419165	R	*Idem.*
32	1672	Mars. 1. 8.47. 0	1.16.59.30	9.27.30.30	83.22.10	0.6973900	9.843476	0.194914	D	*Idem.*
33	1677	Mai. 6. 0.47.10	4.17.37. 5	7.26.49.10	79. 3.15	0.2805900	9.448172	0.788020	R	*Idem.*
34	1678	Août. 26.14.13. 0	10.27.46. 0	5.11.40. 0	3. 4.20	1.2380200	0.092727	9.821037	D	Douwes.
25	1680	Déc. 18. 0.15. 0	8.22.39.30	9. 2. 2. 0	60.56. 0	0.0061250	7.787106	3.279469	D	Halley.
	Ellipse.	Déc. 17.23.19. 0	8.22.44.25	9. 2. 2. 0	61. 6.48	0.0061700	7.790285	3.274701	D	*Idem.*
	Ellipse.	Déc. 17.20.48. 0	8.23.26.48	9. 2.59. 9	58.39.50	0.0065645	7.817202	3.234325	D	Euler.

SUITE DE LA TABLE Ire.

N°.	Années.	PASSAGE au périhélie. Tems moyen à Paris.	Longitude du périhélie.	Longitude du nœud ascend.	Inclinaison.	Distance périhélie.	Log. dist. pér. = h.	Log. moy. mouvem.	Sens du mouvement.	CALCULAT.
35	Ellipse.	Déc. 18j 0h 4' 0"	8s 23°43' 0"	9s 1°53' 0"	61°20' 20"	0.0059200	7.7723	3.301678	D	Newton.
		Déc. 18. 0.10.22	8.22.40.10	9. 1.57.13	61.22.55	0.0060297	7.780295	3.289686	D	Pingré.
16	1682	Sept. 14. 7.49. 0	10. 2.52.45	1.21.16.30	16.56. 0	0.583280	9.765877	0.311312	R	Halley.
	Ellipse.	Sept. 14.21.31. 0	10. 1.36. 0	1.20.48. 0	17.42. 0	0.582500	9.765296	0.312184	R	*Idem.*
36	1683	Juill. 13. 2.59. 0	2.25.29.30	5.23.23. 0	83.11. 0	0.560200	9.748343	0.337614	R	*Idem.*
37	1684	Juin. 8.10.26. 0	7.28.52. 0	8.28.15. 0	65.48.40	0.9601500	9.982339	9.986620	D	*Idem.*
38	1686	Sept. 16.14.43. 0	2.17. 0.30	11.20.34.40	31.21.40	0.3250000	9.511883	0.692304	D	*Idem.*
39	1689	Déc. 1.15. 5. 0	8.23.44.45	10.23.45.20	69.17. 0	0.0168890	8.227604	2.618722	R	Pingré.
40	1695	Nov. 17..........	{11.21.58.47 / 2. 6. 0. 0}	7. 6. 0. 0	22. 0. 0	0.843480	9.9261	....	D	Burckhardt.
41	1698	Oct. 18.17. 7. 0	9. 0.51.15	8.27.44.15	11.46. 0	0.691290	9.839660	0.200638	R	Halley.
42	1699	Janv. 13. 8.32. 0	7. 2.31. 6	10.21.45.35	69.20. 0	0.744000	9.871570	0.152773	R	La Caille.
43	1701	Oct. 17.22. 0. 0	4.13.41. 0	0. 9.28.41	41.39. 0	0.592630	9.772784	0.300953	R	Burckhardt.
44	1702	Mars. 13.14.22. 0	4.18.41. 3	6. 9.25.15	4.30. 0	0.645900	9.810165	0.244881	D	La Caille.
		Mars. 13.14.42.43	4.18.46.34	6. 8.59.10	4.24.44	0.646830	9.81079	0.243943	D	Burckhardt.
45	1706	Janv. 30. 4.32. 0	2.12.29.10	0.13.11.40	55.14.10	0.425810	9.629218	0.516301	D	La Caille.
		Janv. 30. 5. 6. 0	2.12.36.25	0.13.11.23	55.14. 5	0.426865	9.630291	0.514692	D	Struick.
46	1707	Déc. 11.23.39. 0	2.19.54.56	1.22.46.35	88.36. 0	0.85974	9.934368	0.058576	D	La Caille.
		Déc. 11.23.52.47	2.19.58. 9	1.22.50.29	88.37.40	0.85904	9.934013	0.0591[illegible]	D	Struick.
		....	2.17. 4. 0	1.22. 8. 0	88.50. 0	0.86350	9.936262	0.05573[illegible]	D	Houttuin.
47	1718	Janv. 14.23.48. 0	4. 1.30. 0	4. 8.[illegible]. 0	30.20. 0	1.02655	0.011380	9.943[illegible]	R	La Caille.
		Janv. 15. 1.24.36	4. 1.26.36	4. 7.55.[illegible]	31.12.[illegible]	1.02565	0.010990	9.943[illegible]	R	Douwes.
		Janv. 15. 7.48. 0	4. 1. 3.40	4. 8.21. 0	30.48.30	1.02743	0.011753	9.942499	R	Whiston.
48	1723	Sept. 27.16.20. 0	1.12.52.20	0.14.16. 0	49.59. 0	0.99865	9.[illegible]414	9.961007	R	Bradley.
		Sept. 27.16.10. 0	1.12.15.20	0.14.14.16	49.59. 0	0.96980	9.[illegible]682	9.980105	R	Struick.
49	1729	Juin. 23. 6.45.22	10.22.16.54	10.10.35.15	77. 1.58	4.06980	0.[illegible]	9.045769	D	Douwes.
		25.11.16. 0	10.22.40. 0	10.10.32.37	76.58. 4	4.26140	0.[illegible]	9.015800	D	La Caille.
		22.23.54.29	10.27.21.38	10.10.16.46	76.42.45	4.16927	0.620060	9.030038	D	Maraldi.
		22.10.52.14	10.16.26.48	10.10 51.43	77.18.54	[illegible]	0.596517	9.065353	D	Kiez.
		25. 9.21. 0	10.22.37. 3	10.10.32.55	77.[illegible]. 0	4.08165	0.610835	9.043876	D	Delisle.
50	1737	Janv. 30. 8.30. 0	10.25.55. 0	7.16.22. 0	18.20.[illegible]	0.22282	9.347960	0.9381[illegible]	D	Bradley.
51	1737	Juin. 8. 7.48. 0	8.22.36.39	4. 3.53.43	[illegible].14. 5	0.86700	9.93802	0.05313	D	Daussy.
52	1739	Juin. 17.11. 7. 0	3.12.34. 0	6.27.18. 0	[illegible].53. 0	0.67160	9.827111	0.219462	R	Zanotti.
		20. 9.24. 0	3. 5.11. 0	6.25.18. 0	53.25. 0	0.69614	9.842607	0.196083	R	*Idem.*
		17.10. 9. 0	3.12.38.40	6.27.25.14	55.42.44	0.67358	9.8[illegible]	0.21[illegible]	R	La Caille.
53	1742	Févr. 8. 4.18. 0	7. 7.32. 7	6. 5.32.57	....	0.76550	9.883945	0.1[illegible]011	R	Le Monnier.
		8. 4.30.30	7. 7.33.44	6. 5.34.45	67. 4.11	0.765555	9.883976	0.134164	R	Struick.
		8. 4.48. 0	7. 7.35.13	6. 5.38.29	66.59.14	0.765860	9.884148	0.134058	R	La Caille.
		8. 7.40. 0	7. 7.39.10	6. 5.42.41	[illegible].52. 4	0.765300	9.883832	0.134380	R	Zanotti.
		1.22. 2. 0	7.16.41.50	6.16. 8.55	56.35. 7	0.737664	9.867858	0.158341	R	Euler.
		7. 4.24. 0	7.10.49.23	6. 9.32. 7	[illegible].43.[illegible]	0.752100	9.876276	0.145714	R	*Idem.*
		7.10.49. 0	7.10.49.23	6. 9.32. 7	[illegible].43.44	0.752100	9.[illegible]	0.145792	R	*Idem.*
		7.22. 0. 0	7. 7.33.28	6. 5.47.22	[illegible].14. 0	0.768900	9.885870	0.131323	R	Wright.
		8. 5.28. 0	7. 7.26.23	6. 5.29.28	67.11. 9	0.766200	9.884342	0.133615	R	Klinkenberg.
		8. 7.32. 0	7. 7.37.50	6. 5.41.32	66.51. 0	0.765450	9.[illegible]	0.1[illegible]53	R	Houttuin.
		Févr. 8.15. 1. 0	7. 6.39.20	6. 5. 9.30	67.31.40	0.7[illegible]	9.886523	0.130344	R	Barker.
54	1743	Janv. 10.21.24.57	3. 2.58. 4	2. 8.10.48	2.15.50	0.838115	9.923303	0.075172	D	Struick.
		10.20.25.35	3. 2.41.45	2. 8.21.15	2.19.33	0.835010	9.921691	0.077593	D	La Caille.
55	1743	Sept. 20.21.26. 0	8. 6.33.52	0. 5.16.25	45.48.21	0.521570	9.717310	0.384159	R	Klinkenberg.
56	1744	Mars. 1. 8.26.20	6.17.12.55	1.15.45.20	47. 8.36	0.222060	9.346472	0.940420	D	Betts.
		1. 8.24. 0	6.17. 5.49	1.15.46.52	47. 3.35	0.223220	9.348733	0.937029	D	Maraldi.
		1. 8.13. 0	6.17.10. 0	1.15.46.11	47. 5.18	0.222500	9.347325	0.939141	D	La Caille.
		1. 8. 8. 0	6.17.17.30	1.15.51. 0	47.18. 0	0.221560	9.345491	0.941892	D	Zanotti.
		1. 9. 8. 0	6.17.19.26	1.16. 5.24	47.49.53	0.221920	9.346166	0.940834	D	Chéseaux.
		1. 8. 2. 0	6.17.11.58	1.15.46. 6	47.10.53	0.222220	9.346783	0.939054	D	Euler.
		1. 0.14. 0	6.17.20. 0	1.17.41. 0	50.11. 0	0.224240	9.350713	0.934058	D	*Idem.*

SUITE DE LA TABLE Ire.

No.	Années.	Passage au périhélie. Tems moyen à Paris.	Longitude du périhélie.	Longitude du nœud ascend.	Inclinaison.	Distance périhélie.	Log. dist. pér. = h.	Log. moy. mouvem.	Sens du mouvement.	CALCULAT.
56	1744	Mars. 1j 8h 3' 3"	6s17°13' 4"	1s15°47'53"	47° 8'29"	0.222229	9.346801	0.939927	D	Pingré.
		1. 7.51.30	6.17.14.36	1.15.49.27	47.17.38	0.222000	9.346353	0.940597	D	Klinkenberg.
		1. 9. 6.40	6.17.16.16	1.15.49.30	47.14.10	0.221756	9.345875	0.941316	D	Hiorter.
		1. 8. 0. 0	6.17.29. 0	1.16. 3. 0	47.50. 0	0.220400	9.343212	0.945310	D	Cassini.
57	1747	Févr. 28.11.54.19	9.10. 5.41	4.26.58.27	77.56.55	2.293880	0.360572	9.419272	R	Chéseaux.
		Mars. 3.10. 7.40	9. 7. 2. 5	4.27.18.42	79. 6.45	2.198590	0.342144	9.446912	R	Maraldi.
		3. 7.20. 0	9. 7. 2. 0	4.27.18.50	79. 6.20	2.198510	0.342140	9.446936	R	La Caille.
58	1748	Avr. 28.19.34.45	7. 5. 0.50	7.22.52.16	85.26.57	0.840665	9.924622	0.073194	R	Maraldi.
		29. 0.34.24	7. 4.38.40	7.22.45.46	85.35.17	0.841500	9.925054	0.082557	R	Le Monnier.
		28.18.53.30	7. 5.23.49	7.22.51.50	85.28.23	0.840400	9.924486	0.073339	R	Klinkenberg.
	1748	Avr. 22	....	9.24	76. 0	0.5	....	....	R	Burckhardt.
59	1748	Juin. 18. 1.33. 0	9. 6. 9.24	1. 4.39.43	56.59. 3	0.655255	9.816407	0.235513	D	Struick.
		18.21.27.21	9. 8.47.10	1. 3. 8.29	67. 3.28	0.625357	9.796128	0.265936	D	Bessel.
60	1757	Oct. 21. 8. 4. 0	4. 2.58. 0	7. 4.12.50	12.50.20	0.337542	9.528328	0.667636	D	Bradley.
		21. 9.42. 0	4. 2.39. 0	7. 4. 5.50	12.39. 6	0.339070	9.530288	0.664696	D	La Caille.
		21. 9.56. 0	4. 2.49. 0	7. 4. 4. 0	12.48. 0	0.337970	9.528875	0.666816	D	Pingré.
		21. 9.23. 0	4. 2.36.29	7. 4. 7.11	12.41. 7	0.339320	9.530610	0.664213	D	De Ratte.
61	1758	Juin. 11. 3.27. 0	8.27.38. 0	7.20.50. 0	68.19. 0	0.215350	9.333148	0.960406	D	Pingré.
16	1759	Mars. 12.13.33. 0	10. 3.14. 0	1.23.48. 0	17.38. 0	0.583553	9.766080	0.311008	R	Messier.
		12.13.59.24	10. 3. 8.10	1.23.45.35	17.40.14	0.584900	9.767085	0.309501	R	Lalande.
		12.12.57.36	10. 3.16.20	1.23.49.21	17.35.20	0.583600	9.766115	0.310956	R	Maraldi.
		12.13.30. 0	10. 3.15.30	1.23.49. 0	17.38. 0	0.583800	9.766264	0.310732	R	La Caille.
		12.13.41. 0	10. 3.16. 0	1.23.49. 0	17.39. 0	0.583400	9.766039	0.311070	R	*Idem.*
		12.13. 7.35	10. 3.19.18	1.23.45.35	17.40. 5	0.582973	9.765650	0.311653	R	Klinkenberg.
		13.10.11.31	10. 1. 0.24	1.24. 7.20	17.28.55	0.597075	9.776029	0.296085	R	*Idem.*
		12.13.22. 0	10. 3.23. 0	1.23.44.55	17.41.20	0.582340	9.765176	0.312364	R	Bailli.
62	1759	Nov. 27. 0.11.57	1.23.34.19	4.19.39.41	79. 6.38	0.801390	9.903844	0.104362	D	Pingré.
		27. 2.28.20	1.23.24.20	4.19.39.24	78.59.22	0.798510	9.902280	0.106708	D	La Caille.
		27. 0.43.19	1.23.38. 4	4.19.40.15	79. 3.19	0.802100	9.904218	0.103801	D	Chappe.
63	1759	Déc. 16.21.13. 0	4.18.24.35	2.19.50.45	4.51.32	0.965900	9.984972	9.982670	R	La Caille.
		16.12.58.12	4.19. 3.52	2.19.20.24	4.42.10	0.961800	9.983064	9.991532	R	Chappe.
64	1762	Mai. 29. 0.27.48	3.15.22.23	11.18.55.31	85.22.21	1.014150	0.006102	9.950975	D	Maraldi.
		28.15.27. 0	3.15.15. 0	11.19.20. 0	84.45. 0	1.012400	0.005380	9.952058	D	Lalande.
		29. 1.57. 0	3.15.24. 0	11.18.57.44	85.12.20	1.010660	0.004600	9.953228	D	Bailli.
		28. 2. 1.53	3.13.42.38	11.18.35.24	85.40.10	1.006860	0.002969	9.955675	D	Klinkenberg.
		28. 7. 0.49	3.14.29.46	11.19. 2.22	85. 3. 2	1.009856	0.004259	9.953739	D	Struick.
		28. 8.11. 3	3.14. 2. 0	11.18.38. 5	80.38.13	1.009048	0.003913	9.954259	D	Burckhardt.
65	1763	Nov. 1.19.52.58	2.24.51.54	11.26.23.26	74.40.40	0.498767	9.697895	0.413286	D	Pingré.
		1.20.50.19	2.25. 0.48	11.26.29.29	72.39.29	0.498422	9.697597	0.413733	D	*Idem.*
		1.21. 7.38	2.25. 1. 6	11.26.27. 0	72.28. 0	0.498190	9.697391	0.498185	D	Burckhardt.
	Ellipse	1.20.49.47	2.24.58.58	11.26.24. 4	72.31.52	0.498290	9.697478	0.413911	D	*Idem.*
66	1764	Févr. 12.13.51.36	0.15.14.52	4. 0. 4.33	52.53.31	0.555216	9.744462	0.343435	R	Pingré.
		12.10.29. 0	0.16.11.48	3.29.20. 6	53.54.19	0.564176	9.751415	0.333006	R	*Idem.*
		12.13.39.57	0.15.26. 3	4. 0. 7.33	52.46.39	0.556700	9.745621	0.341697	R	*Idem.*
67	1766	Févr. 17. 8.50. 0	4.23.15.25	8. 4.10.50	40.50.20	0.505330	9.703570	0.404773	R	*Idem.*
68	1766	Avr. 22.20.55.40	8. 2.17.53	2.14.22.50	11. 8. 4	0.332745	9.522112	0.676960	D	*Idem.*
		17. 0.26.13	6.26. 5.13	1.17.22.19	8.18.45	0.636825	9.804020	0.254098	D	*Idem.*
		16.17.30. 0	6.25.15. 0	1.17. 5. 0	8.20. 0	0.6386	9.805230	0.252283	D	*Idem.*
69	1769	Oct. 7.12.30. 0	4.24. 5.54	5.25. 0.43	40.37.33	0.123760	9.092584	1.331258	D	Lalande.
		7.12.26.17	4.24.14.22	5.25. 2.25	40.42.38	0.122080	9.086434	1.325977	D	Wallot.
		7.13.13. 8	4.24.11. 8	5.25. 3.18	40.46.32	0.122580	9.088420	1.327498	D	Cassini.
		7.13.58.36	4.24.11. 7	5.25. 6.33	40.48.49	0.122720	9.088915	1.326756	D	Prosperin.
		7.13.58.23	4.24. 9.24	5.25. 3.27	40.41.13	0.122690	9.089516	1.325854	D	Audiffredi.
		7.12.12.41	4.24.32.54	5.25.11.13	41. 1. 6	0.121000	9.082785	1.335951	D	Slop.
		16. 9.45.18	4.13.15.16	5.19.41.11	29.40.49	0.158800	9.200850	1.158853	D	Zanotti.

SUITE DE LA TABLE Ire.

Nos.	Années.	PASSAGE au périhélie. Temps moyen à Paris.	Longitude du Périhélie.	Longitude du nœud ascend.	Inclinaison.	Distance périhélie.	Log. dist. pér. = h.	Log. moy. mouvem.	Sens du mouvement.	CALCULAT.
69	1769	Oct. 7j 14h 0' 14"	4s 24° 7' 0"	5s 25° 4' 47"	40° 40' 48"	0.123070	9.090187	1.324848	D	Asclepi.
		7.11.17. 0	4.25.46. 0	5.24.42. 0	41.28. 0	0.116400	9.065953	1.361199	D	Lambert.
		7.17.46. 0	4.24.22. 0	3.25.13.40	40.42.30	0.122800	9.089198	1.326331	D	Widder.
		7.15. 6. 0	4.24.16. 0	5.25. 3. 0	40.50. 0	0.122640	9.088632	1.327180	D	Euler.
		7.15.37.37	4.24.10.51	5.25. 4.41	40.49.33	0.122690	9.088809	1.326915	D	Lexell.
		7.15.51.23	4.24.15.53	5.25. 6. 4	40.46.42	0.122744	9.089002	1.321625	D	Pingré.
		7.12.17.13	4.24.38.57	5.25. 9.33	40.59.50	0.120397	9.080617	1.329202	D	*Idem.*
		7.12.34. 9	4.24.11. 8	5.25. 2.24	40.48.29	0.123285	9.090911	1.323662	D	*Idem.*
		7.15. 2.42	4.24.11.29	5.25. 3.59	40.45.50	0.122755	9.089039	1.326569	D	Bessel.
		7.12.44.38	4.24.11.32	5.25. 3.40	40.47.56	0.123270	9.090847	1.323857	D	Legendre.
70	1770	Août. 9. 0.16.54	11.25.27.16	4.19.39. 5	1.44.30	0.636878	9.804056	0.254044	D	Pingré.
		9. 0.19.17	11.26. 7.16	4.16.39. 5	1.41.29	0.629587	9.799056	0.271541	D	*Idem.*
		10.21.45.24	11.25. 4.36	4.13.38.44	1.40.48	0.657995	9.818222	0.232795	D	*Idem.*
		9. 0. 3.46	11.26. 6.40	4.15.28.43	1.46.31	0.629550	9.799030	0.261573	D	Prospério.
		8. 9. 9.16	11.22.51.22	4.15. 3.42	1.44.35	0.644560	9.809263	0.246229	D	*Idem.*
		25. 2. 8.53	0. 7.13.46	4.14.30. 0	1.23. 0	0.717170	9.855622	0.176695	D	*Idem.*
		12.20.50. 0	11.29.45. 0	4.12.56. 0	1.46. 0	0.649460	9.812552	0.241300	D	Widder.
		13.13. 5. 0	11.26.16.26	4.12. 0. 0	1.33.40	0.674381	9.828906	0.216769	D	Lexell.
		14. 0.13.24	11.26.26.13	4.12.17. 3	1.34.30	0.676893	9.830520	0.214348	D	Pingré.
		9. 0.32.48	11.26.12.50	4.16.14. 0	1.45.20	0.628720	9.798457	0.262443	D	Slop.
		9. 3.38. 0	11.25.57. 0	4.12. 0. 0	1.55. 0	0.631000	9.800029	0.260085	D	Lambert.
		8.19.26. 0	11.26.19.28	4.14.21.45	1.49. 5	0.627575	9.797666	0.263629	D	Rittenhouse.
		13.12.37.35	11.26.15.11	4.11.54.54	1.34.31	0.674360	9.828889	0.216704	D	Burckhardt.
		13.12.39.43	11.26.16.38	4.11.52.46	1.33.50	0.674300	9.828853	0.216849	D	*Idem.*
71	1770	Nov. 22. 5.48. 0	6.28.22.44	3.18.42.10	31.25.55	0.528240	9.722833	0.375879	R	Pingré.
72	1771	Avr. 18.22.14.27	3.13.28.13	0.27.51. 0	11.15.29	0.905760	9.957013	0.024609	D	*Idem.*
		19. 0.39.31	3.13.48.21	0.27.49.37	11.16.44	0.901878	9.955148	0.028606	D	Prospério.
		(Hyp.) 19. 5.10.42	3.14. 2.54	0.27.50.27	11.16. 0	0.903370	9.955864	0.026332	D	Burckhardt.
73	1772	Fév. 13.20.50.35	3.18. 6.22	8.12.43. 5	18.59.40	1.018140	0.007807	9.948418	D	Lalande.
		23.10.48. 0	3.25. 6.25	8.11.11.56	18.21.24	1.045640	0.019382	9.932055	D	Burckhardt.
	Ellipse.	20. 3. 3. 0	3.20. 6. 0	8.12.25.54	18.51. 6	1.028120	0.012042	9.942066	D	Bessel.
	Ellipse.	19. 2.19.25	3.20.14.54	8.14. 0. 1	18.17.38	1.013590	0.005865	9.951330	D	*Idem.*
		9. 5. 0. 0	3. 0.17. 0	8.21. 9. 0	20.28. 0	0.891800	9.950270	0.034730	D	Gauss.
		8. 1. 0. 0	3. 7.21. 0	8.23.24. 0	17.39. 0	0.911800	9.959900	0.020280	D	*Idem.*
74	1773	Sept. 5.11.18.45	2.15.35.45	4. 1.15.37	61.25.21	1.018140	0.054576	9.878264	D	Pingré.
		5.17. 9. 2	2.16.10.26	4. 1.20. 0	61.30. 0	1.1339	0.056465	9.874681	D	*Idem.*
		2.12. 0. 0	2.21.40. 0	4. 3.15. 0	62.33. 0	1.14016	0.092721	9.821047	D	Lambert.
		2.19. 0. 0	2.20.43. 0	4. 3.35. 0	62.36. 0	1.238	0.084755	9.832996	D	Schulze.
		5. 5. 5.43	2.15. 9.17	4. 1.10.26	61.19. 7	1.2155	0.051100	9.883478	D	Lexell.
		5. 5.55. 0	2.15.15.50	4. 1.12.11	61.20.57	1.124865	0.053115	9.884456	D	*Idem.*
		5.11.29.54	2.15.28.17	4. 1.13. 4	61.18.22	1.130095	0.054318	9.878651	D	*Idem.*
		5.14.11.11	2.15.17. 0	4. 1. 8.20	61.15.11	1.133231	0.052961	9.880687	D	*Idem.*
		5.14.12. 1	2.14.57.41	4. 1. 4.49	61.13.19	1.129694	0.051272	9.883220	D	Pingré.
		5. 9.43. 9	2.15.10.58	4. 1. 5.30	61.14.17	1.12689	0.051881	9.883308	D	Burckhardt.
75	1774	Août. 14. 4.20. 0	10.16.27.57	6. 0.57.26	82.47.40	1.42528	0.153900	9.720278	D	Saron.
		14.17.56. 0	10.16.48.24	6. 0.50.13	82.48.38	1.42528	0.153900	9.720278	D	*Idem.*
		15. 5.17. 0	10.17.26. 0	6. 1.22. 0	82.21. 0	1.426005	0.154121	9.728917	D	Boscowich.
		15.10.55.35	10.17.22. 4	6. 0.49.48	83. 0.25	1.429	0.154906	9.727769	D	Mechain.
		14.12. 0. 0	10.16.38. 0	6. 0.54. 0	82.48. 0	1.425	0.153815	9.729146	D	Du Séjour.
		17.13. 0. 0	11.13.19. 0	6. 3.32. 0	83.30. 0	1.457	0.163466	9.714938	D	Bode.
		....	....	6. 1.54.22	77.49.41	....	....	....	D	Schulze.
76	1779	Janv. 4. 2.20.30	2.27.14. 0	0.25. 3. 1	32.26.14	0.713218	9.853222	0.178965	D	Saron.
		4. 2.12. 0	2.27.13.11	0.25. 5.57	32.24. 0	0.713127	9.853165	0.180378	D	Mechain.
		4. 2.24.30	2.27.13.40	0.25. 3.57	32.25.30	0.713187	9.853203	0.180324	D	D'Angos.
		4. 2.54.20	2.27.12.55	0.25. 4.19	32.24.44	0.712941	9.853057	0.180548	D	Reggio.

SUITE DE LA TABLE Ire.

N°.	Années.	PASSAGE au périhélie. Tems moyen à Paris.	Longitude du périhélie.	Longitude du nœud ascend.	Inclinaison.	Distance périhélie.	Log. dist. pér. = h.	Log. moy. 1000vem.	Sens du mouvement.	CALCULAT.
76	1779	Janv. 4^j 2^h29′ 0″	2^s27°16′ 0″	0^s25° 5′ 0″	32°24′ 0″	0.7137	9.853516	0.179854	D	Oriani.
		3.18.18.30	2.26.52.29	0.25. 2.55	32.41.32	0.710904	9.852811	0.180912	D	*Idem.*
		4. 2.29. 1	2.27.14.19	0.25. 7. 9	32.18.24	0.713218	9.853220	0.178292	D	Prospérin.
		…………………	2.27.18.22	0.25. 9.20	32.15. 6	0.713688	9.853508	0.179866	D	*Idem.*
		4. 4.21.23	2.27.18.44	0.25. 8.23	32.16.56	0.713623	9.853469	0.179925	D	*Idem.*
		4. 2.13.41	2.27.14.27	0.25. 4.10	32.30.57	0.713158	9.853186	0.180349	D	Zach.
		6.16.16. 0	2.26.55. 0	0.16.51. 0	45.20. 0	0.709	9.85065	0.18415	D	Bode.
		4. 3.24. 0	2.26.33. 0	0.23.40. 0	32.43	0.7130	9.85309	0.180493	D	Olbers.
		17. 9.48. 0	2.15. 9.42	0.18.21.25	33.56.58	0.277362	9.443031	0.795582	D	Pacassi.
		4. 2.40. 0	2.27. 9.40	0.24.57.18	32.31. 7	0.713115	9.853160	0.180388	D	*Idem.*
		…………………	…………………	0.22. 5. 9	41. 6.35	…………	…………	…………	…	Schulze.
77	1780	Sept. 30.20.16.22	8. 6.30.14	4. 4. 0	53.50.28	0.097807	8.990371	1.474571	R	Lexell.
		30.16. 8.24	8. 6.19.21	4. 4.30	53.15.20	0.100468	9.002026	1.457069	R	*Idem.*
		30. 7.29.51	8. 5.54.55	4. 5.30	51.56.33	0.106127	9.925826	1.421389	R	*Idem.*
		30.18.12.50	8. 6.21.18	4. 4. 9.19	53.48.15	0.099256	8.996755	1.464906	R	Mechain.
78	1780	Nov. 23.19. 0. 0	2. 5. 7. 0	5. 1.48	84.15. 0	0.336	9.526	0.671	D	Boscovich.
79	1781	Nov. 28.20.26. 0	8. 6.52. 0	4.21. 1	72. 3.30	0.51528	9.712041	0.392067	R	Olbers.
80	1781	Nov. 29.12.42.46	0.16. 3.28	2.17.22.52	27.13. 8	0.961013	9.982729	9.986034	R	Méchain.
		29.12.42.46	0.16. 3. 7	2.17.22.55	27.12. 4	0.960995	9.982721	9.986046	R	*Idem.*
		29.12.42.46	0.16. 3. 7	2.17.22.55	27.12. 4	0.960995	9.982723	9.986043	R	Legendre.
81	1783	Nov. 15. 5.53.23	1.15.24.46	1.24.13.50	53. 9. 9	1.56530	0.194598	9.66823	D	Mechain.
		15. 5.53.30	1.15.25. 0	1.24.14. 0	53. 9. 0	1.565330	0.194600	9.668220	D	*Idem.*
		13. 6.13. 0	1.13.58.47	1.24.10.10	54. 9.53	1.56738	0.195175	9.667366	D	Mechain
		20. 9.26	1.19. 4.30	1.24.10.45	52.19.57	1.57718	0.197881	9.663307	D	et
		Oct. 23	0.27.44.56	1.24.26.51	56.46.28	1.47189	0.167876	9.708314	D	Saron.
82	1784	Janv. 21. 4.56.47	2.20.44.24	1.26.49.21	51. 9.12	0.707858	9.849946	0.185209	R	Mechain.
		21. 4.48. 0	2.20.39.22	1.26.44. 2	51.15. 1	0.708160	9.850131	0.184931	R	*Idem.*
83	1784	Mars. 11. [illegible]. 0. 0	5. 0. 0. 0	1.25. 0	26. 0	0.6821	9.83385	0.20946	D	Burckhardt.
		9. 7. 0. 0	4.15. 0	1.12. 0	64. 0	0.5857	9.76768	0.30762	D	*Idem.*
		Avril. 9.21.16.46	10.28.54.57	2.26.52. 9	47.55.10	0.650531	9.813268	0.240226	R	D'Angos.
84	1785	Janv. 27. 7.58. [illegible]	3.19.51.56	8.24.12.15	70.14.12	1.14[illegible]	0.058198	9.872832	D	Mechain.
85	1785	Avril. 8.11.29. 0	9.27.34.40	2. 4.44.40	87. 7. 0	0.427[illegible]	9.631024	0.513592	R	Saron.
86	1786	Juill. 7.22. 0.12	5. 9.25.36	6.14.22.40	50.54.28	0.41010	9.612880	0.540795	D	Mechain.
		8.13.44.22	5. 8.38.30	6.15.23.32	50.58.33	0.39424	9.595763	0.566184	D	Reggio.
87	1787	Mai. 10.19.58. 0	0. 7.44. 9	3.16.51.35	48.15.51	0.34891	9.542714	0.646057	R	Saron.
88	1788	Nov. 10. 7.35. 0	3. 9. 8.27	5. 7.10.38	12.28.20	1.063012	0.026538	9.920321	R	Mechain.
		10. 7.34.47	3. 9. 8. 7	5. 6.56.43	12.27.40	1.063012	0.026538	9.920321	R	*Idem.*
89	1788	Nov. 20. 9.13.45	0.23.12.22	11.21.42.15	64.52.32	0.766911	9.885988	0.131146	D	*Idem.*
		20. 7.25. 0	0.22.49.54	11.22.24.26	64.30.24	0.757313	9.879276	0.141215	D	*Idem.*
90	1790	Janv. 15. 5.15. 0	2. 0.14.32	5.26.11.46	31.54.15	0.753097	9.879725	0.140541	R	Saron.
91	1790	Janv. 28. 7.45.30	3.21.44.37	8.27. 8.37	56.58.13	1.063286	0.026650	9.920153	D	Mechain.
92	1790	Mai. 21. 5.56.15	9. 3.33.27	1. 3.11. 2	63.52.27	0.797960	9.901981	0.107156	R	*Idem.*
		20.11.30. 0	9. 4.57.20	1. 5.14. 0	63.35. 0	0.791005	9.898179	0.112850	R	Englefield.
93	1792	Janv. 13.13.44.13	1. 6.29.42	6.10.46.15	39.46.55	1.293023	0.111602	9.792719	R	Mechain.
		13.12.59.56	1. 6.20.32	6.10.42. 9	39.45.47	1.057105	0.111456	9.792844	R	Zach.
		14	1. 4.56	6.11.28	41.38	1.308	0.1166	9.7852	R	Bode.
		13. 3.44. 5	1. 6.30.20	6.10.46.53	39.46.55	1.293023	0.112164	9.791883	R	Mechain.
		15. 6. 9. 0	1. 4.43. 0	6.11.55. 0	41. 5. 0	1.2918	0.111195	9.793345	R	Englefield.
94	1792	Déc. 27. 4.55. 0	4.16. 5.33	9.13.17.36	49. 0.24	0.965812	9.984893	9.982789	R	Mechain.
		27. 7.56.27	4.15.52.35	9.13.14.44	49. 7.13	0.966829	9.985350	9.982103	R	Piazzi.
		27. 6.14.41	4.15.59.24	9.13.15.17	49. 1.45	0.966287	9.985106	9.982469	R	Prosperin.
		27. 6.45	4.15.57. 0	9.13.16. 0	42. 2	0.9663	9.985112	9.982460	R	Saron.
95	1793	Nov. 4.20.21. 0	7.18.42. 0	3.18.29. 0	60.21. 0	0.4034	9.605736	0.551524	R	*Idem.*
96	1793	Nov. 18.15.38	2.11. 0. 0	0. 2.20	51.56. 0	1.5045	0.177392	0.694041	D	*Idem.*
97	1795	Déc. 15. 8.29.50	5.10.29. 0	11.23.14	22.10	0.24379	9.387016	0.879624	D	Olbers.

SUITE DE LA TABLE Ire.

Nº.	Années.	Passage au périhélie. Tems moyen à Paris.		Longitude du périhélie.	Longitude du nœud ascend.	Inclinaison.	Distance périhélie.	Log. dist. pér. = h.	Log. moy. mouvem.	Sens du mouvement.	CALCULAT.
97	1795	Déc.	15j 15h 30' 0"	5s 7° 37' 0"	11s 13° 23' 0"	10° 3' 0"	0.258	9.411620	0.842609		Bouvard.
			15. 0.15.33	5.13.36.40	11.29.11.45	24.16.45	0.22662	9.355218	0.927181	D	Zach.
			14.19. 9.50	5.15.34.24	0. 1. 8.50	24.42.27	0.215058	9.332557	0.961293	D	Prospérin.
			15. 4	5.21. 0. 0	....	....	0.21205	9.326438	1.020471	D	Bode.
			15. 9.52.26	5.10.21.47	11.21.15.56	21.45.11	0.24521	9.389538	0.875822	D	Olbers.
			15. 9. 2. 2	5. 9.53.26	11.21.58.47	21.56. 2	0.24401	9.387408	0.879017	D	*Idem.*
98	1796	Avr.	2.19.55. 6	6.12.44.13	0.17. 2.16	64.54.33	1.57816	0.198151	9.662902	R	*Idem.*
99	1797	Juill.	9. 2.40.31	1.19.27. 8	10.29.15.37	50.40.34	0.52661	9.721489	0.378946	R	*Idem.*
			10. 9.16. 0	1.26. 7. 0	11. 1.40. 0	43.12. 0	0.463	9.665558	0.46176	R	Bode.
			9. 2.53.52	1.19.34.42	10.29.16.30	50.35.50	0.52545	9.720531	0.379332	R	Bouvard.
100	1798	Avr.	4.11.15.51	3.14.59. 0	4. 2. 9. 0	43.52.16	0.48458	9.685527	0.431838	D	Olbers.
			4.12. 7.37	3.15. 6.57	4. 2.12.21	43.44.42	0.484586	9.685352	0.432070	D	Burckhardt.
101	1798	Déc.	31.22. 8.15	1. 3.35. 5	8. 9.30. 2	42.14.51	0.77479	9.889186	0.126349	R	Olbers.
			31.13. 8.15	1. 4.29.48	8. 9.30.44	42.23.25	0.77948	9.891917	0.122253	R	Burckhardt.
			31.13.26.24	1. 4.27.27	3. 9.30.30	42.26. 4	0.77952	9.891829	0.122385	R	*Idem.*
102	1799	Sept.	7. 6.56.49	0. 3.40.25	3. 9.15.21	51.10. 7	0.841156	9.925031	0.072582	R	*Idem.*
			7. 4.34.20	0. 3.36. 4	3. 9.33.38	50.52.27	0.83868	9.923596	0.074734	R	Méchain.
			7. 5. 6.30	0. 3.41.15	3. 9.30.37	50.57. 6	0.840003	9.924281	0.073707	R	*Idem.*
			7. 5.43.25	0. 3.39.10	3. 9.27.19	50.57.30	0.840178	9.924372	0.073571	R	Zach.
			7. 5.35.10	0. 3.38. 9	3. 9.21.11	51. 1.29	0.84037	9.924472	0.073420	R	Olbers.
			9. 1.32. 0	0. 4.21. 0	3. 7.15. 0	53.36. 0	0.87700	9.943445	0.044961	R	Bode.
			6.10.28.16	0. 4.32. 8	3.10.51.53	49.51. 8	0.785818	9.895323	0.117144	R	Littrow.
			7. 5.59.57	0. 3.38.16	3. 9.23. 3	51. 2.27	0.840305	9.924434	0.073477	R	Wahl.
103	1799	Déc.	25.19. 3.50	6.10.14.51	10.26.27.18	77. 0.47	0.62445	9.795498	0.266884	R	Olbers.
			25.18.13. 7	6.10.22.46	10.26.30.18	77. 5. 4	0.624426	9.795482	0.266904	R	Wahl.
			25.21.40.10	6.10.20.12	10.26.49.11	77. 1.38	0.62580	9.796436	0.265474	R	Méchain.
104	1801	Août.	8.13. 0	6. 1. 1	1.12. 8	20.20	0.2490	9.396200	0.865828	R	*Idem.*
			8.13.32. 0	6. 3.49	1.14.28	21.20	0.2617	9.417804	0.833430	R	Burckhardt.
105	1802	Sept.	9.20.43.14	11. 2. 7.45	10.10.16.46	57. 0.20	1.09420	0.039095	9.901186	D	Méchain.
			9.21.32.29	11. 2. 9. 4	10.10.15.39	57. 0.47	1.09417	0.039061	9.901537	D	Olbers.
106	1804	Fevr.	13.14.16.16	4.28.44.51	5.26.47.58	56.28.40	1.07117	0.029858	9.915341	D	Gauss.
			13.15.40. 0	4.28.53.52	5.26.59.47	56.44.20	1.072277	0.030308	9.914666	D	Bouvard.
			13.14.25.45	4.29. 4.25	5.26.53.29	56.56. 2	1.07501	0.031412	9.913010	D	Wahl.
107	1805	Nov.	18. 3.18.27	4.27.51.28	11.14.37.19	15.36.36	0.37862	9.578201	0.592826	D	Bessel.
			17.19.20.39	4.27.17. 0	11.10.11. 0	17.34. 0	0.34649	9.53969	0.65059	D	Gauss.
			18. 0.25. 0	4.29. 0.28	11.15. 6.56	15.58.12	0.37568	9.574708	0.597931	D	Legendre.
			18. 1. 8. 6	4.28.44.57	11.15. 5.58	15.52.38	0.376236	9.575461	0.596937	D	Bouvard.
108	1805	Déc.	31. 8.47. 4	3.19.23.40	8.10.33.14	16.33.33	0.89176	9.950248	0.032758	D	Gauss.
	1806	Janv.	2.10.35.10	3.19.30. 2	8.11.28.23	12.43.10	0.911786	9.950893	0.020289	D	*Idem.*
	1805	Déc.	31. 6.19.27	3.19.21.55	8.10.34.42	16.30.35	0.89203	9.950370	0.034560	D	Bessel.
			31.18.39.36	3.19.23.13	8.10.48. 5	15.36.10	0.89682	9.952702	0.031074	D	*Idem.*
			31. 6.51. 8	3.19.23.39	8.10.33.34	16.31.10	0.89181	9.950270	0.034723	D	Legendre.
			31. 6.20.59	3.17.21.50	8.10.33.35	16.30.32	0.89193	9.950330	0.034633	D	Gauss.
			31 8.41.18	3.19.28.54	8.10.31.34	16.35. 0	0.891347	9.950057	0.034057	D	Bouvard.
109	1808	Déc.	28.22. 2.20	3. 4. 4.30	10.22.18.38	35. 4. 5	1.08193	0.034198	9.90883	R	Bessel.
	1806	Déc.	28.22.30.43	3. 7. 2. 3	10.22.19.15	35. 2.50	1.081571	0.034055	9.909066	D	Burckhardt.
110	1807	Sept.	18.18.56. 0	9. 0.56.53	8.26.39.40	63.14. 1	0.647401	9.811234	0.243078	D	Bouvard.
			18.19. 6. 0	9. 1. 0.13	8.26.38.31	63.12.36	0.64788	9.811493	0.242889	D	Gauss.
			18. 5.31.12	9. 2.24. 0	8.26.44. 0	62.57. 0	0.65320	9.8150	0.23763	D	Beck Calkoen
			18.19.49	9. 0.53.38	8.26.29.25	63.16.15	0.647617	9.811316	0.243155	D	Brojelmann.
			18.20. 7. 5	9. 1. 6. 8	8.26.40.52	63.13. 7	0.64846	9.811850	0.242298	D	Oriani.
			18.15.15.51	9. 0.51. 5	8.26.42.12	63.12.51	0.646267	9.810412	0.244510	D	Ferrari.
			18.17.38.50	9. 0.45. 1	8.26.39. 9	63.12.30	0.646213	9.810376	0.244564	D	Lemaur.
			18.11.44.26	9. 0 5.55	8.26.40.26	63.27.14	0.646212	9.810375	0.244565	D	Triesnecker.
			18.15.52.50	9. 0.39.22	8.26.36.57	63.17.56	0.648123	9.811657	0.242643	D	Santini.

FIN DE LA TABLE Ière.

N°.	Années.	Passage au périhélie. Tems moyen à Paris.	Longitude du périhélie.	Longitude du nœud ascend.	Inclinaison.	Distance périhélie.	Log. dist. pér. = h.	Log. moy. mouvem.	Sens du mouvement.	Calculat.
110	1807	Sept. 18^j 19^h 27′ 55″	9^s 0° 59′ 55″	8^s 26° 25′ 3″	63° 9′ 57″	0.6496020	9.812659	0.241140	D	Bowditch.
		18.20.56.32	9. 1. 6.53	8.26.33. 4	63.11.18	0.6487669	9.812097	0.241983	D	De Monfort.
		18.19.49. 0	9. 0.53.38	8.26.29.25	63 16.15	0.6476617	9.811316	0.243155	D	Brojelmann.
		18.19. 3. 0	9. 0.58.22	8.26.40.46	63.13. 2	0.64746	0.811216	0.243305	D	Cacciatore.
		18.19.51. 7	9. 1. 6. 8	8.26.36.52	63.14.28	0.64896	9.812317	0.241803	D	Bessel.
		18.17.41.43	9. 1.53.51	8.26.48. 9	63.10.11	0.64587	9.810147	0.244908	D	*Idem.*
111	1808	Juill. 12. 4.10.49	8.12.38.50	0.24.11.15	39.18.59	0.60786	9.783870	0.284323	D	*Idem.*
112	1810	Oct. 5.19.54.11	2. 3. 9.10	10. 8.53. 4	62.46.17	0.96914	9.986385	9.980551	D	*Idem.*
113	1811	Sept. 21.18.30	3. 8.34	4.13.12	65. 9	1.7677	0.247416	9.689055	R	Burckhardt.
		15.10	3.18.12.30	4.19. 0	71.50	1.2337	0.05450	9.675378	R	*Idem.*
		12. 9.54.21	2.14.48.14	4.20.20.25	73. 9.40	1.035679	0.015225	9.937290	R	Bessel.
		12. 5.21.15	2.15.17.34	4.20.24.13	75.17.34	1.04006	0.017060	9.934539	R	Gauss.
		12. 4.51. 3	2.15.17.34	4.20.24.13	73. 7.16	1.040014	0.017060		R	*Idem.*
		12. 3.18. 9	2.13.40.45	4.20.10.13	72.59.55	1.01045	0.004514	9.953358	R	Olbers
	Ellipse.	10. 0.21. 9	2.13.14.35	4.21. 5.59	73.48. 2	0.98069	9.99153	9.972833	R	Gauss 1re.
	Ellipse.	12. 6.57.30	2.14.29.40	4.20.16.56	72.59.10	1.02716	0.011638	9.942672	R	Flaugergues.
	Ellipse.	12. 5.32.19	2.15. 1. 9	4.20.24.30	73. 2.36	1.03541	0.0151120	9.93460	R	Bessel.
		12. 7.40.13	2.14.56. 0	4.20.19.50	72. 3. 3	1.03483	0.0152885	9.937197	R	Bouvard.
		12. 6. 0.23	2.15. 1.44	4.20.21.58	73. 4.31	1.03539	0.0151048	9.934711	R	Nicolai.
		12. 9.19. 1	2.14.51.58	4.20.23.18	73. 3.44	1.03618	0.0154347	9.936764	R	Piazzi.
114	1811	Sept. 12. 9.15.18	2.14.54.24	4.20.23.46	73. 3.23	1.0362	0.0154432	9.936639	D	Calandrelli.
	1811	Nov. 9. 5.52.47	1.16.10.50	3. 2.57. 1	31.29.28	1.58533	0.2001197	9.6599492	D	Werner.
		11. 4.46. 1	1.17.32.10	3. 2.53. 9	31.32.53	1.58892	0.2011007	9.6584772	D	*Idem.*
		11.13. 9.14	1.17.47. 0	3. 2.55. 1	31.31.52	1.58963	0.2012968	9.6581831	D	*Idem.*
		11. 2.45. 9	1.17.29.30	3. 2.56.13	31.29.14	1.58791	0.2008271	9.6588876	D	Zach.
115	1812	Sept. 14.14.17.16	3. 2.40.29	8.13.36.25	74. 1.32	0.78212	9.8932745	0.1202165	D	Werner.
		14.20.35.55	3. 1.54.45	8.13.43.25	73.53.51	0.78830	9.8966909	0.1150919	D	*Idem.*
		15. 0. 0. 0	3. 2.54.38	8.13.18.50	74.20.30	0.77835	9.8911749	0.1233660	D	Nicollet.
	1812	Sept. 15.15.53.14	3. 2.39.53	8.13.40.46	73.57. 3	0.782167	9.8932993	0.1201795	D	*Idem.*
116	1813	Mars. 5.16.46. 0	2. 6.52.30	2.17.27.30	27.33.30	0.67451	9.8289916	0.2166409	R	Werner.
117	1813	Mai. 19.17.14.47	6.17.59. 0	1.12.41.49	81.23.21	1.21710	0.0854348	9.8319765	R	Daussy.
		10. 0.22.33	6.17.37. 6	1.12.40.21	81. 1. 0	1.21532	0.0846919	9.8330909	R	*Idem.*
		19.14. 9 34	6.17.28.26	1.12.57.30	80.44.20	1.21433	0.0843362	9.8336240	R	Werner.

Pour la seconde comète de 1811, M. Nicolai vient de publier deux orbites dont voici les élémens :

	Ellipse.	*Parabole.*
Passage	Nov. 10^j 23^h 26′ 57″	Nov. 11^j 4^h 30′ 17″
Longit. périhélie	1^s 17° 26′ 59″	1^s 17° 32′ 0
Nœud	3. 3. 2.37	3. 2.54.34
Inclinaison	31.15.47	31.30.57
Log. distance périhélie	0.1991050	0.20009477
Excentricité	0.9812045	

(*Monatliche Correspondenz*, Mai 1813.)

TABLE II.

CATALOGUE DES COMÈTES

Suivant l'ordre des distances périhélie.

Années.	Dist. pér.	Long. pér.	Sens du mouv.	Années.	Dist. pér.	Long. pér.	Sens du mouv.	Années.	Dist. pér.	Long. pér.	Sens du mouv.
1680	0.00630	8s 23° 3'	D	1797	0.52661	1s 19' 27"	R	1759. 2	0.80139	1s 23' 34"	D
1689	0.01689	8.23.45	R	1770. 2	0.52824	6.28.23	R	565	0.832	2.20. 0	R
1582	0.04007	9.11.27	R	1472	0.54273	1.15.33	R	1743	0.83501	3. 2.42	D
1593	0.08911	5.26.19	D	1596	0.51942	7.28.31	R	1799	0.84018	0. 3.39	R
1780	0.09926	8. 6.21	R	1683	0.56020	2 25.30	R	1748	0.84040	7. 5.24	R
1665	0.10649	2.11.54	R	1764	0.56418	0.16 12	R	1652	0.84750	0.28.19	D
1769	0.12276	4.24.11	D	1531	0.567	10. 1.39	R	1707	0.85904	2.19.58	D
1577	0.18342	4. 9.22	R	989	0.568	8.24. 0	R	1737. 2	0.86700	8.22 37	D
1758	0.21535	8.27.38	D	1590	0.57666	7. 6.55	R	1771	0.90137	3.14. 3	D
1744	0.22222	6.17.12	D	837	0.58	9 19. 3	R	1805. 2	0.91179	3.19.30	D
1737	0.22282	10.25.55	D	1682	0.58328	10. 2.53	R	1231	0.94776	4.14.48	D
1795	0.24521	5.10.22	D	1759	0.5838	10. 3.15	R	1684	0.96015	7.28.52	D
1801	0.2553	6. 2.25	R	1456	0.5855	10. 1. 0	R	1781. 2	0.96099	0.16. 3	R
1677	0.28059	4.17.37	R	1784. 2	0.5857	4.15. 0	D	1792	0.96581	4.16. 6	R
1299	0.31793	0. 3.20	R	1607	0.58797	10. 1.38	R	1759. 3	0.96599	4.18 25	R
1686	0.32500	2.17. 0	D	1701	0.59263	4.13.41	R	1810	0.96914	3. 3. 9	D
1533	0.32686	7. 7.40	D	1580	0.59553	3.19.12	D	1723	0.99865	1.12.52	R
1301	0 33	6. 0. 0	D	1808	0.60786	8.12.39	R	1351	1.00000	2. 9. 2	D
1757	0.33754	4. 2.58	D	1799. 2	0.62445	6.10 15	R	1762	1.00905	3.14. 2	D
1666	0.34	4. 0	R	1748. 2	0.62536	9. 8.47	D	1664	1.02575	4.10.41	R
539	0.3412	10.13.30	D	1766	0.63683	6.26. 5	D	1718	1.02655	4. 1.30	R
1787	0.34891	0. 7.44	R	1337	0.64452	0.20. 0	R	1772	1.02812	3.20. 6	D
1805	0.37255	4.27.34	D	1807	0.64612	9. 0.55	D	1811	1.03567	2.14.48	R
240	0 371	9. 1. 0	D	1702	0.64685	4.18.47	D	1788	1.06301	3. 9. 8	R
1618. 2	0.38954	0. 3. 5	D	1784. 2	0.65053	10.28.55	R	1790. 2	1.06329	3.21.45	D
1793	0.40340	7.18.42	R	1739	0.67358	3.12.39	R	1804	1.07117	4.28.45	D
1786	0.41010	5. 9.26	D	1770	0.67430	11.26.17	R	1806	1.08193	3. 4. 4	R
1706	0.42581	2.12.29	D	1698	0.69129	9. 0.51	R	1585	1.09358	0. 8.51	D
1785	0.42759	9.27.35	R	1762	0.69739	1.17. 0	D	1802	1.09417	11. 2. 9	D
1264	0.4300	9. 2.30	D	1784	0.70786	2.20.44	R	1773	1.12689	2.15.11	D
1661	0.44272	3.25.16	D	1779	0.71313	2.27.13	D	1785	1.14340	3.19.51	D
1362	0.46290	7.13. 0	R	1097	0.7385	11. 2.30	D	1678	1.23802	10.27.46	D
1556	0.46390	9. 8.50	D	1699	0.74400	7. 2.31	R	1792	1.29302	1. 6.30	R
1798	0.48476	3 14.59	D	1742	0.75210	7.10.49	R	1774	1.42528	10.16.48	D
1763	0.49819	2.25. 1	D	1790	0 75310	2. 0.15	R	1793. 2	1.5045	2.11	R
1766	0.50533	4.23.15	R	1788. 2	0.75731	0.22.50	D	1783	1.56533	1.15.25	D
1618	0.51298	10.18.20	D	1798. 2	0.77679	1. 3.35	R	1796	1.57816	6.12.44	R
1780	0.51528	8. 6.52	R	1781	0.77586	7.29.11	D	1811. 2	1.5862	1.17.39	D
1532	0.51922	3.21.48	D	1812	0.77835	3. 2.59	D	1747	2.29388	9.10. 6	R
1743. 2	0.52157	8. 6.34	R	1790. 3	0.79796	9. 3.43	R	1729	4.0698	10.22.17	D

Ainsi sur 116 comètes, il n'y en a qu'une
dont la distance périhélie soit........ 4
Il n'y en a que deux qui passent... 2
6 qui passent........................ 1.5
23 qui passent........................ 1
31 qui passent........................ 0.9
39 qui passent........................ 0.8
49 qui passent........................ 0.7
61 qui passent........................ 0.6
83 qui passent........................ 0.5
93 qui passent........................ 0.4
104 qui passent........................ 0.3
110 qui passent........................ 0.2
113 qui passent........................ 0.1

TABLE III.

CATALOGUE DES COMÈTES

Suivant l'ordre des inclinaisons.

Années.	Inclin.	Nœud.	Nœud — périh.	Années	Inclin.	Nœud.	Nœud — périh.	Années.	Inclin.	Nœud.	Nœud — périh.
1770	1°33′50″	4ˢ11°53′	5ˢ15°30′	1773	61°14′17″	4ˢ 1° 5′	1ˢ15°55′	1582	120°30′55″	7ˢ 4°43′	2ˢ 6°49′
1743	2.19.33	2. 8.21	0.24.21	1810	62.46.17	10. 8.53	3.24.16	565	121. 0. 0	5. 9.30	2.19.30
1678	3. 4.20	5.11.40	5.16. 6	1807	63.10.28	8.26.47	0. 4. 8	1739	124.17.16	6 27.25	3.14.47
1702	4.24.44	6. 8.59	1.20.13	1783. 2	64. 0. 0	1.12. 0	3. 3. 0	1763	126. 5.41	3.29.20	3.13. 8
1585	6. 4. 0	1. 7.42	0.28.51	1788	64.30.24	11.22.24	3.16.44	1780	126.11.45	4. 4. 9	4. 2.12
1231	6. 5. 0	0.13.30	4. 1.18	1580	64.51.50	0.19. 8	3. 0. 4	1596	127.50.15	10.15.37	2.17. 6
1766. 2	8.18.45	1.17.22	5. 8.43	1684	65.48.40	8.28.15	0.29.23	1784	128.50.48	1.26.49	0.23.55
539	10. 0. 0	1.28. 0	3.14.30	1748. 2	67. 3.28	1. 3. 8	3.24.21	1799	129. 2.30	3. 9.27	3. 5.48
1771	11.16. 0	0.27.50	2.16.12	1758	68.19. 0	7.20.50	1. 6.48	1797	129.19.26	10.29.16	2.20.12
1805. 2	12.43.10	8.11.28	4.21.58	1785	70.14.12	8.24.12	5. 4.20	1723	130. 1	0.14.16	0.28.36
1757	12.50.20	7. 4.13	3. 1.15	1763	72.28. 0	11.26.27	2.28.34	1792. 2	130.59.36	9.13.18	4.27.12
1805	16.35.18	11.12.24	5.15.10	1097	73.30	6.27.30	4. 5. 0	1787	131.41. 9	3.16.52	3. 9. 7
1737	18.20.45	7.16.22	2.29. 3	1729	77. 1.58	10.10.35	0.11 42	1784. 3	132. 4.50	2.26. 8	3.27.13
1772	18.51. 6	8.12.26	4.22.20	1759. 2	79. 6.38	4,19.40	2.26. 5	1743. 2	134.11.39	0. 5.16	3.28.43
1618	21.28. 0	9.23.25	0.24.55	1652	79.28. 0	2.28.10	1.29.51	1798. 2	137.45. 8	8. 9.30	4.24. 5
1795	21.45.11	11.21.16	5.19. 6	1762	80.38.13	11.18.33	3.25.[illegible]	1701	138.21. 0	0. 9.29	4. 4.12
1784. 2	26. 0	1.25. 0	2.28. 5	1781	81.43.26	2.23. 1	5. 6.11	1766	139. 9.40	8. 4.11	3.10.55
1533	28.14. 0	9.29.19	2.21.39	1774	82.47.40	6. 0.57	4.15.51	1792	140.13. 5	6.10.46	5. 4.17
1718	30.20. 0	4. 8.43	0. 7.13	1672	83.22.10	9.27.30	3.19.29	1808	140.41. 1	0.24.11	4.11.32
1264	30.25. 0	5.25.30	3. 7. 0	1593	87.58. 0	5.14.15	0.12. 4	1806	144.55.55	10.22.19	4.11.46
1686	31.21.40	11.20.35	2.26.26	1707	88.37.40	1.22.50	0.27. 8	1337	147.49. 0	2. 6.22	1.16.22
1556	32. 6.30	5.25.42	2.13. 8	1785. 2	92.53. 0	2. 4.45	4. 7.10	1790	148. 5 45	5.26.12	3.25.57
1779	32.24. 0	0.25. 6	2. 2. 7	1748	94.31.37	7.22.52	0.17.28	1811. 2	148.28	3. 2.55	1.15. 8
1532	32.36. 0	2.27.23	0.24.25	1683	97.49	5.23.23	2.27.54	1770. 2	148.34. 5	3.18.42	3. 9.41
1661	33. 0.55	2.21.54	1. 3.22	1677	100.56.45	7.26.49	3. 9.12	1718	149.40	4. 8.43	0. 7.10
1618	37.11.31	2.15.44	2.12.39	1747	102. 3. 5	4.26.58	4.13. 7	1813. 2	152.26.30	2.17.27	0.10.35
1737. 2	39.14. 5	4. 3.54	4.18.43	1799. 2	102.59.13	10.26.27	4.16.12	1781	152.47.56	2.17.23	2. 1.20
1769	40.45.50	5.25. 4	1. 0.52	1665	103.55. 0	7.18. 2	5. 6. 7	1762	153.30. 0	8. 3. 0	4.18 58
1786	40.50.20	8. 4.11	3.10.55	1577	105.27.15	0.25.52	3.13.30	1664	158.41.20	2.21.14	1 19 27
1798	43.52.16	4. 2. 9	0.17.10	1811	107. 0. 5	4.20.10	2. 6.29	1682	162. 4	1.21.16	3.18.24
240	44. 0	6. 9. 0	2.22. 0	1780. 2	107.56.30	4.21. 1	1.15.55	1531	162. 4	1.19.25	3.17.46
1744	47.10.53	1.15.46	5. 1.26	1066	100—110	7.20	3.20. 0	1456	162. 4	1.18.30	3.17.30
1786	50.54.28	6.14.23	1. 4.57	1301	110	0.15	5.15. 0	1759	162.22	1.23.49	3.20.33
1793. 2	51.56. 0	0. 2.20	2. 8.40	1699	110.40	10.21.46	3.19.14	1607	162.47.43	1.18.40	3.17. 2
1783	53. 9. 0	1.24.14	0. 8.49	1689	110.43. 0	10.23.45	2. 0. 1	989	163. 0	2.24. 0	6. 0. 0
1706	55.14.10	0.13.12	1.29.17	1299	111. 3. 0	3.[illegible]7. 8	3.13.48	1788	167.31.40	5. 7.11	1.28. 2
1804	56.28.40	5.26.48	0.28. 3	1796	115. 5.27	0.17. 2	5.25.42	1698	168.14. 0	8.27.44	0. 3. 7
1790. 2	56.58.13	8.27. 9	5. 5.24	1790. 3	116. 7.33	1. 3.11	3.29.27	1801	169.10	1.13.18	4.19. 7
1802	57. 0.47	10.10.16	0.21.53	1742	118.10.16	6. 9.32	1. 1.16	837	168—170	6.26.33	2.22.30
1680	60. 1.22	9. 2.28	0. 9.25	1793	119.39. 0	3.18.29	4. 0.13	1472	174.40	9.11.46	4, 3.47
								1759. 3	175. 8.28	2.19.51	1.32.34

Remarque sur le Catalogue des Comètes.

Ce catalogue a été commencé par Halley, qui le donna dans sa Cométographie; il ne contenait alors que 24 comètes, en commençant par celle de 1337, et finissant par celle de 1698. Il a été successivement reproduit avec des augmentations considérables, par La Caille, Lalande, Lambert, Pingré, Olbers, Zach et Lindenau; nous y avons encore ajouté quelques orbites qui ont été calculées depuis.

Comète de l'an 240. Elle a été déterminée d'après les observations chinoises, qui sont un peu vagues. Le but de M. Burckhardt, en calculant des observations aussi grossières, a été seulement de voir si quelques-unes de ces anciennes comètes n'auraient pas quelque ressemblance avec les comètes mieux observées par les modernes.

539. D'après les observations chinoises qui ne donnent pas de latitude; ainsi l'inclinaison et le nœud ne sauraient être bien déterminés.

565. Calculée d'après deux observations chinoises. Le nœud et l'inclinaison offrent peu de certitude; les élémens ont quelque ressemblance avec ceux des comètes de 1683 et de 1739; mais les orbites de ces deux comètes ne peuvent s'accorder avec les observations de 565.

En 568, il parut deux comètes. M. Burckhardt en a cherché les élémens, mais il ne les a pas trouvés assez sûrs pour les donner. Voyez *Monathl. Correspondenz*, X[e] Partie, p. 164.

837. Observations chinoises. Cométographie de *Pingré*, tome I, p. 340.

989. Observations chinoises. Orbite peu sûre.

1066. Voyez Pingré, I, 373.

1097. Observations chinoises, 6, 16 et 17 octobre. *Savans étrangers*, I, 290.

1231. Observations chinoises. Pingré, I, 401. On voit que l'orbite est peu sûre.

1264. Orbite peu sûre. Voyez Pingré, I, 406. On croit que c'est la même que celle de 1556.

1299. Calculée sur deux observations d'Europe et une de la Chine. *Pingré*, I, 418.

1301. Très-incertaine. Pingré, I, 420. M. Flaugergues avait cru que ce pouvait être la belle comète de 1811.

1337. La théorie de Halley ne représente qu'à 20′ près les obser-

vations chinoises : celle de Pingré doit être beaucoup meilleure. *Pingré*, I, 432.

1351. Quatre observations chinoises, mais point de latitude. *Pingré*, I, 437. *Mém. des Savans étrangers*, I, 290.

1362. Trois observations, mais la troisième ne donne pas de latitude. Les deux systèmes d'élémens sont des espèces de limites.

1456. C'est la célèbre comète de Halley, dont la période est d'environ 76 ans. A cette apparition, elle avait une queue de 60°; la tête était ronde et de la grandeur d'un œil de bœuf, au commencement de juin. Trois jours avant le périhélie, le noyau était aussi éclatant qu'une étoile fixe; c'est ce qu'on a remarqué de même en 1682, la couleur de la queue imitait celle de l'or. *Pingré*, I, p. 459 et suiv.

1472. Calculée d'après des observations de Régiomontan, rétablies par Pingré, I, 475.

1531. Comète de Halley, calculée sur les observations d'Apian. *Pingré*, I, 488.

1532. Calculée sur les observations d'Apian. On soupçonnait qu'elle pouvait être la même que celle de 1661, et alors elle aurait dû revenir en 1789. Mais avant cette époque, Méchain ayant de nouveau réduit les observations, avait à peu près démontré qu'elle était différente, et qu'il ne fallait pas l'attendre; en effet elle ne revint pas. M. Olbers ayant examiné la question en 1787, a trouvé l'orbite peu différente de celle de Halley, cependant il ne croit pas à l'identité des deux comètes.

1533. Calculée sur les observations d'Apian. On voit par la différence des deux orbites que les observations étaient bien grossières.

1556. On a cru que c'était la même qu'en 1264, mais rien n'est moins certain. *Pingré*, I, 502.

1577. Observée par Tycho. *Pingré*, I, 511.

1580. Calculée par Halley sur les observations de Mœstlin, et par Pingré sur celles de Tycho. Les élémens de Pingré ont encore des erreurs de 10 à 12'. Qu'on juge par là ce qu'on peut attendre des orbites de comètes plus anciennes.

1582. Suivant quatre observations de Tycho. La première orbite paraît la plus probable. *Pingré*, I, 550.

1585. D'après Tycho et Rothman. *Pingré*, I, 550.

1590. D'après Tycho, *Pingré* I, 554.

1593. Calculée sur des observations assez grossières de Jean Ripensis, élève de Tycho. *Pingré*, I, 557.

1596. Calculée par Halley d'après Mœstlin, et par Pingré d'après Tycho. La théorie de Halley s'écartait de 2° des observations de Tycho.

1607. Troisième apparition de la comète de Halley. Pour la première orbite, voyez *Pingré*, II, 3; et pour la seconde, qui a été calculée sur des observations d'Harriot, voyez *le premier supplément aux Éphémérides de Berlin*. L'ellipse de Bessel suppose un demi-axe = 17,86543.

1618. Calculée sur les observations de Képler par Pingré, qui doute lui-même de la précision de ses élémens.

1618. Deuxième, calculée par Halley sur les observations faites ou recueillies par Képler. Pingré ne les croit pas fort précises, mais leur nombre a dû donner une orbite assez exacte. M. Bessel a calculé la seconde orbite sur les observations d'Harriot, qui ne sont peut-être pas meilleures.

1652. Calculée sur les observations d'Hévélius. *Machina cœlestis*, tome II.

1661. Calculée par Halley sur les observations d'Hévélius. Voy. *Éphém. de Berlin*, 1788, et les *Mémoires présentés*, tome X.

1664. Voyez *Pingré*, qui a publié des observations d'un anonyme espagnol, qui serviraient peut-être à améliorer la théorie de cette comète, dans le cas où elle viendrait à reparaître.

1665. Calculée sur les observations d'Hévélius.

1672. Même remarque. Voyez *Pingré*.

1677. Même remarque.

1678. Calculée sur des observations très-grossières de La Hire. Orbite incertaine.

1680. De toutes les comètes, c'est celle qui s'est le plus approchée du soleil. La première orbite est parabolique; la seconde est elliptique, et suppose une révolution de 575 ans : celle d'Euler suppose 170 $\frac{1}{2}$ ans; celle de Pingré 15864 ans. Ces deux révolutions sont déduites des observations, au lieu que Halley supposait la révolution donnée. On voit par cet exemple ce qu'on doit penser des ellipses calculées sur un petit arc. Voyez *Pingré*.

1682. Comète de Halley. Les calculs ont été faits sur les observations de Flamstéed.

1683. Calculée sur les observations de Flamstéed.

1684. Calculée sur les observations de Bianchini à Rome, du premier au 17 juillet.

1686. Orbite un peu douteuse, calculée sur un arc de 10°. *Pingré*, II, 29

1689. Autre orbite qui n'est pas plus sûre. *Pingré*, II, 33.

1695. Calculée sur des observations que M. Burckhardt a trouvées dans les manuscrits que Delille avait laissés au Dépôt de la Marine, et qui sont maintenant à l'Observatoire impérial.

1698. Sur des observations assez grossières de Cassini et La Hire. Voyez *Pingré*.

1699. Sur des observations de Cassini et Maraldi. Voyez *Pingré*.

1701. M. Burckhardt a calculé cette orbite sur des observations de Pallu que l'on croyait perdues : elles consistaient en alignemens que M. Burckhardt a réduits par une méthode qui lui est particulière. Il soupçonne une incertitude de 20′ dans l'inclinaison.

1702. M. Burckhardt avait calculé la seconde orbite pour voir si cette comète ne pourrait pas être celle de 1770, mais la conjecture n'était pas fondée. *Mém. de l'Institut*, tome II.

1706. Calculée par La Caille sur des observations de Cassini et Maraldi. La seconde orbite est de Struick, qui la calcula sur d'autres observations qui lui avaient été transmises par La Caille. Voy. *Pingré*.

1707. Sur des observations de Cassini, Maraldi, Stancari, Manfredi.

1718. Sur des observations de Kirch. On a des doutes sur les réductions. Voyez *Pingré*.

1723. Sur des observations d'Halley, Bradley, Pound et Graham. Sur la seconde orbite, voyez *Pingré*.

1729. Pingré dit que la théorie de Struick s'écarte rarement de 2′ de l'observation, que les erreurs de La Caille vont jusqu'à 31′ en longitude, et 1° 15′ et plus en latitude; et cependant les deux orbites diffèrent à peine de 2′ sur l'inclinaison, de 2′ ½ sur le nœud, et de 13′ sur le lieu du périhélie. La grande différence des erreurs tient sans doute à la distance périhélie.

1737. Calculée par Bradley sur ses propres observations. Voy. *Pingré*.

1737. Cette orbite n'a été calculée qu'en 1812, les observations étaient inconnues. Voyez *Monatl, Corresp.* Partie XX, p. 316; *Connaiss. des Tems*, 1812, p. 411.

1739. La seconde orbite de Zanotti paraît n'être qu'une première approximation. *Pingré*.

1742. La théorie de Struick est fondée sur les observations de Cassini, qu'elle représente très-bien; celle de La Caille en est peu différente :

celle de Zanotti ne s'accorde qu'à 30′ près avec ses propres observations. La première d'Euler est fondée sur trois observations de Delisle, 11, 14 et 17 mars; les suivantes sont calculées sur des observations moins voisines. Voyez *Pingré*.

1743. Les élémens de Struick et La Caille sont fondés sur les observations de Zanotti.

1743. Seconde. N'a été vue que par Klinkenberg, qui ne répond pas, à 10′ près, de ses observations. Son orbite ne paraît qu'une approximation grossière qui ne s'accorde qu'à 1 degré près avec les observations d'où elle est conclue.

1744. Cette comète doit être une des mieux connues, tant par le nombre des calculateurs, que par l'accord de leurs diverses théories.

1747. Chéseaux a calculé son orbite sur ses propres observations; Maraldi, sur ses observations et six observations de Chéseaux. L'orbite de Maraldi semble la meillenre; celle de La Caille n'en diffère presque pas.

1748. Maraldi s'est servi de ses propres observations.

1748. Seconde. Struick a calculé trois observations fort voisines et assez grossières. Par une nouvelle réduction, M. Bessel a obtenn des élémens qui représentent fort bien les observations; ce qui ne prouve peut-être pas beaucoup pour la bonté de l'orbite.

1757. Bradley a calculé son orbite sur 16 observations faites par lui; elle doit inspirer plus de confiance, mais les trois autres en diffèrent peu.

1758. Calculée sur les observations de Messier.

1759. Retour prédit par Halley. Ce doit être la plus sûre de toutes les orbites cométaires.

1759. Pingré donne la préférence à son orbite sur toutes les autres.

1759. La Caille s'est servi de trois d'entre ses observations; Chappe de trois autres.

1762. M. Burckhardt a trouvé que les réductions n'avaient pas été faites assez exactement, parce qu'on avait négligé les effets de la réfraction. De là viennent les grandes différences entre son orbite et les précédentes.

1763. Cette comète a fort exercé Pingré, qui n'a pu représenter les observations. M. Burckhardt y fait servir des observations jusqu'alors inconnues de St.-Jacques Silvabelle. Sa seconde orbite est une ellipse de 7334 ans. Avec une telle révolution, la parabole doit suffire; l'excentricité serait................. 0.99868
le log du paramètre.......... 9.9982216.

1764. La première des trois orbites de Pingré est la meilleure ; elle a été calculée après les deux autres.

1766. Orbite peu sûre, à cause de la lenteur du mouvement.

1766. Seconde. N'a été observée que cinq jours. Orbite un peu incertaine. Voyez *Pingré*.

1769. Comète remarquable à plusieurs égards. Pingré, en mer, vit ou crut voir des ondulations sensibles dans la queue. Il vit deux arcs courbés en sens contraires ; il s'appuie du témoignage de la Nux : la queue a été de 90° et même de 97°. Les orbites d'Euler et de Lexell sont elliptiques. Ce dernier trouve sa révolution entre 449 et 519 ans. La dernière de Pingré est aussi elliptique, et la revolution 1231 $\frac{1}{3}$ ans. Pingré n'ose en conclure que cette comète soit celle de 539. Asclepi a calculé une orbite dont voici les élémens : passage 1769, 7 octobre, $15^h\ 41'\ 16''$; périhélie $4^s\ 24°\ 12'\ 58''$; ☊ $= 5^s\ 25°\ 3'\ 55''$; inclinaison $40°\ 46'\ 7''$; distance 0.1227508 ; révolut. 928,9 ; $\frac{1}{2}$ grand axe $=$ 95,2.

Les élémens de Bessel sont elliptiques, la révol. 2089,8 ans, mais 5″ d'erreur dans les observations pourraient faire trouver 2673 ou 1692. Si la parabole ne suffisait pas pour des ellipses si alongées, elle ne suffirait jamais.

1770. C'est la seule jusqu'aujourd'hui qu'on n'ait pu calculer dans une parabole. Lexell trouva une ellipse de 5^{ans},58513 et un demi-axe de 3.1478606. M. Burckhardt, dans sa pièce qui a remporté le prix de l'Académie, a confirmé ce résultat, à de très-légères modifications près ; il a recherché toutes les causes qui ont pu empêcher la comète de se remontrer jusqu'aujourd'hui. M. Laplace a donné des formules analytiques, d'après lesquelles M. Burckhardt a calculé les effets des perturbations de Jupiter sur cette comète. Le grand axe a sensiblement augmenté, et la comète sera toujours trop loin de la terre pour être jamais visible, à moins qu'elle ne subisse des perturbations d'un effet contraire. Les deux orbites de M. Burckhardt sont elliptiques : dans la première, l'excentricité est 0.7854736 ; le demi-grand axe 3.14346 ; la révolution 5^{ans}578296. Dans la seconde, l'excentricité est 0.78554, le demi-grand axe 3.14429, la révolution 5.577406. *Mém. de l'Institut*, 1806.

Cette comète est de plus celle qui s'est le plus approchée de la terre.

1770. Seconde, calculée sur quatre observations de Messier, mais la comète avait parcouru 40° en ascension droite, et 21 en déclinaison.

1771. Pingré croit son orbite assez bonne, et celle de Prospérin un peu meilleure; les erreurs n'allaient guères qu'à trois minutes. M. Burckhardt croit que cette comète est hyperbolique, et qu'il faudrait daus l'observation des erreurs invraisemblables pour qu'elle fût elliptique; il croit l'excentricité 1.01944. *Connaiss. des Tems*, an XIII, p. 344.

1772. Cette comète, observée quatre fois par M. Messier, n'avait parcouru que 11°. Pingré ne regardait l'orbite qne comme une première approximation. A l'occasion de celle de 1805 avec laqnelle elle paraissait avoir quelqne ressemblance, MM. Burckhardt, Bessel et Gauss calculèrent de nonveau les observations de Messier et celles de Montagne. L'orbite de M. Burckhardt est parabolique, et diffère essentiellement de celle de 1805. C'est aussi l'avis de M. Bessel; mais en supposant l'identité qui donne un demi-grand axe 10.46544, et une excentricité de 0.90305, il reste encore des argumens assez forts contre l'identité. M. Gauss, en supposant l'identité, et donnant à la comète les élémens qu'il a déterminés pour 1805, c'est-à-dire un demi-grand axe 4.7326, tronve encore des différences sensibles qui n'empêcheraient pas que la comète fût la même; mais il faudrait que quelques fortes perturbations en eussent altéré les élémens. Voycz *Connaissance des Tems de* 1811, p. 486, et *Monathl. Corr.* XIV, p. 73 et 84.

1773. Observée pendant six mois par M. Messier. La troisième orbite de Pingré est celle qu'il préfère. Lexell a fait de vains efforts pour déterminer l'ellipse; il trouva successivement pour l'excentricité 0.9930757, 0.9951225, 1.0037085, 1.0024901; ainsi les deux dernières orbites sont hyperboliques. La dernière de Pingré est elliptique, le grand axe 173,11673, et la révolution 2269 ans. On n'a donc rien de certain sur le retour de cette comète; mais si elle reparaît, on en sait assez pour la reconnaître sûrement. M. Burckhardt s'est servi des observations de Messier et de St.-Jacqnes Silvabelle.

1774. Voyez *Pingré*.

1779. Voyez *Pingré*, qui paraît donner la préférence à l'orbite de Dangos.

1780. Voyez *Pingré*, qui paraît préférer l'orbite de Méchain.

1780. Seconde. On n'a que des observations qui ont paru insuffisantes. M. Olbers les a représentées à 12′ près.

1781. Pingré dit qne les élémens de Méchain n'ont pas d'erreur qui aille à 1′ ½; il en avait fait 12 observations.

1783.

1783. Il paraît qu'il y a de l'incertitude dans les observations. Voyez les *Mémoires de l'Académie pour* 1783, les *Éphémérides de Berlin* 1787, *Philosoph. Transactions*, vol. 74; *Connaiss. des Tems de* 1788.

1784. *Mém. de Paris* 1784, *Connaiss. des Tems* 1788, p. 335.

1784. M. Dangos n'a observé la comète que deux fois. M. Burckhardt a supposé d'abord que la distance à la terre était la même dans les deux observations, et ensuite que la distance avait diminué d'un cinquième. *Mém. de l'Institut* 1806. On voit que tout est incertain; on a cru voir quelque ressemblance avec la comète de 1580.

1785. } 1785. } *Mém. de Paris* 1785; Bode, *Éphémér.* 1789; *Connaiss. des Tems* 1788.

1786. *Mém. de Paris* 1786, *Connaiss. des Tems* 1789, *Observations de Maskelyne* 1786, *Éphémér. de Milan* 1789.

1787. *Mém. de Paris* 1789, *Connaiss. des Tems* 1791.

1788. *Phil. Transact.* vol. 77, *Mém. de Paris* 1789; Bode, *Éphém.* 1793, *Maskelyne* 1788.

1790. *Mém. de Paris* 1790, *Connaissance des Tems* 1792; Bode, *Éphémér.* 1794.

1790. *Mém. de Paris* 1790, *Connaissance des Tems.* 1792; Bode, *Éphémér.* 1794.

1791. *Philos. Transact.* vol. 79. *Connaiss. des Tems*, an V; Bode, *Éphémér.* 1794; *Englefield Détermination of Cometes.*

1792. Bode, *Éphém.* 1795 et 1796; *Connaissance des Tems* 1795; *Englefield.* L'orbite de Méchain est corrigée sur toutes les observations.

1792. Piazzi, *Specola Astron.* Bode, *Éphémér.* 1797 et 1799; *Conn. des Tems* 1795. L'orbite de Saron n'est qu'approchée.

1793. *Philos. Transact.* 1793; *Connaiss. des Tems* 1795, p. 287.

1793. *Connaiss. des Tems* 1795.

1795. Bode, *Éphémér.* 1799; *Connaiss. des Tems*, an VI. Le peu d'accord des orbites a engagé M. Olbers à de nouvelles recherches. Il préfère la première de ses deux nouvelles orbites.

1797. Découverte par M. Bouvard. M. Walker, à Londres, a vu deux étoiles à travers la nébulosité. M. Olbers estime que le diamètre était de 4500 milles géographiques; la plus courte distance à la terre a été de 0.088.

1798. Découverte par M. Messier: c'est la 21[e] qu'il a aperçue le

premier depuis 1758, et la 41ᵉ qu'il a observée. *Mem. Instit.* tom II; Bode, *Éphémér.* 1801; *Éphémér. géogr.* I, 690.

1798. Découverte par M. Bouvard, le 6 décembre, et le 8, par M. Olbers. Bode, *Éphémér.* 1802; *Connaiss. des Tems* 1804; *Éphém. géogr.* III, 115, 315, 317, 396. M. Zach remarque que le 7 décembre, 10″ d'erreur sur le lieu du soleil produiraient 2′ sur le lieu géocentrique.

C'est en 1798 que M. Dangos a cru voir passer une comète sur le soleil.

1799. Découverte par M. Méchain. Le noyau de 4″,32, suivant M. Schroëter. Une erreur de 8′ dans une observation en produisait une de 8′ dans l'inclinaison, suivant M. de Zach.

1799. Découverte par Méchain, qui croit qu'elle peut être la même que celle de 1669.

1801. Découverte presque en même tems par MM. Pons, Messier, Méchain et Bouvard.

1802. Découverte le 26 août, à Marseille, par Pons; le 28, à Paris, par Méchain, et le 20 septembre, à Bremen, par M. Olbers. Le noyau presque imperceptible ou nul. M. Olbers vit à travers une étoile de 10ᵉ grandeur, sans que sa lumière en fût affaiblie. Méchain explique cette apparence par une double réfraction. *Connaiss. des Tems*, an XIII. Bode, *Éphém.* 1805 et 1806; *Monat. Corresp.* VI, 376, 380, 506, 548.

1804. Découverte par Pons. Sans noyau et sans queue. *Connaiss. des Tems*, an XV et 1808; Bode, *Éphém.* 107. *Monat. Corr.* IX, 344, 433.

1805. Découverte le 20 octobre, par MM. Bouvard et Pons, et ensuite par M. Huth. *Mon. Corresp*, XIII, 79 et 194; XIV, 70. Bode, *Éphém.* 1809; *Connaiss. des Tems*, an XIV, 338.

1805. Découverte par Pons, le 10 novembre; Bouvard, le 16, et Huth, le 22. On a soupçonné que cette comète pouvait être celle de 1772. Les deux premières orbites de Gauss sont paraboliques; la troisième est elliptique; le grand axe 2.82217; la révolution 173.ʲ 17ʰ; excentricité, 0.6769242. Il pense que cette ellipse représente les élémens mieux qu'aucune parabole. Burckhardt et Bessel nient l'identité; mais en la supposant, Bessel trouve ½ grand axe = 10.46544, excentricité de 0.914307. Schroëter a trouvé le noyau de 30 milles géographiques. *Mon. Corresp.* XIII, 84 et 88; XIV, 72 et 74. Bode, *Éphém.* 1809; *Connaiss. des Tems*, an XIV.

Ellipse de M. Bessel.		De M. Ganss.	
1805 pass. déc...	31.7775	1806 passage, janv...	$2^j\,11^h\,8'\,45''$
périhélie.....	$3^s\,19^\circ\,23'\,13''$	périhélie ...	$3^s\,19^\circ\,30'\,2''3$
nœud.......	8.10.48. 5	nœud......	8.11.28.22,5
inclinaison...	15.36.10	inclinaison..	12.43.10
log. ½ grandaxe.	1.0197576	log ½ gr. axe.	0.4505887
log dist. périh.	9.9527025	log dist. pér.	9.9598931
		dist. aphélie.	4.732625
dist. périhél..	0.896814	dist. pér. .	0.911785
excentricité..	0.9143070	excentricité..	0.676124
		révolut...	$1731^j\,174$

1806. Découverte par Pons, le 10 novembre. Elle disparut vers la fin de décembre, parce qu'elle était trop australe. Elle fut revue le 17 janvier par Pons, et le 23 par Bessel; elle a dû passer, la nuit du premier janvier, par le pôle sud. *Monat. Corresp.* XIV, 86; XVI, 181. Bode, *Éphém.* 1810.

1807. Vue le 30 septembre, par Pons, Piazzi et Seth Pease, dans l'Amérique septentrionale. Depuis 1769, on n'avait vu aucune comète de cette grandeur et de cet éclat; elle a fait le sujet d'un beau Mémoire de M. Bessel. La seconde orbite qu'il a calculée est elliptique, ½ grand axe = 130.063, excentricité = 0.99503415, révolution 1483,3 ans : en tenant compte des perturbations, il trouve les élémens qui suivent :

Passage au périh. septembre	18.745366,	longit. ☊	$8^s\,26^\circ\,47'\,11''45$
inclinaison......	$63^\circ\,10'\,28'',1$,	dist. du périh. au ☊	4. 7.30,49
log. dist. périhél.	9.8103157	distance périhélie...	0.64612382
		excentricité........	0.99548781
		½ grand axe........	143.195
		révolution........	$1713^{ans}\,5$

mais en supposant des erreurs invraisemblables, les limites de la révolution seront 2157.4 et 1403.6 ans.

Les perturbations amèneront de grands changemens dans ces élémens, et principalement dans la durée de la révolution. Voyez la *Dissertation de M. Bessel.* Kœnigsberg, 1810.

Le vrai diamètre est de 538 milles anglais, suivant Herschel, le volume $\frac{1}{3162}$ de celui de la terre; suivant Schroëter, le noyau est de

997 milles géographiques, la nébulosité de 26037 à 43772 milles géographiques. Voyez *Mon. Corresp.* XVI, 488, 562; XVII, 80, 478, 554; XVIII, 88, 243; XIX, 521; *Phil. Transact.* 1808; Bode, *Éphém.* 1811, 1812, 1813, 1814; *Americ. Society*, VI, 1809; *Conn. des Tems*, 1810, 1811; *Triesnecker*, cinquième recueil; *Schroëter*, etc.

1808. Découverte par Pons, le 24 juin 1808. *Mon. Corresp.* XVIII, 245, 359; *Bode*, 1812.

1808. M. Pons découvrit cette année quatre comètes; l'une, le 6 février, il fut impossible de l'observer. La seconde, le 25 mars; elle fut aussi vue à Pétersbourg, par M. Wisniewsky; il fut encore impossible de l'observer. La troisième fut observée au méridien du 26 juin au 3 juillet; les déclinaisons sont très-douteuses. La quatrième fut aperçue le 3 juillet, et n'a été observée que deux fois.

1810. Découverte le 22 août 1810, par Pons. *Mon. Corresp.* XXIII, 302; XXIV, 71. *Bode*, 1814.

Pour de plus grands détails sur ces dernières comètes, voyez *Mon. Corresp.* octobre 1812.

1811. L'orbite de M. Burckhardt est une première approximation.

1811. Découverte le 25 mars, par M. Flaugergues. L'orbite de M. Burckhardt n'est qu'une première approximation. L'ellipse de M. Flaugergues suppose une révolution de 509.8665, un grand axe de 127.6442; celle de M. Bessel, une révolution de 3383 ans; une excentricité de 0.9954056. M. Flaugergues pense que cette comète est celle de 1301; M. Bessel est d'avis contraire. Cette comète était fort remarquable par sa queue et la durée de son apparition. Voy. *Monatl. Corresp.* 1811.

1811. Ellipse de M. Bessel.

Passage, septem.	12.25175	excentricité.......	0.9954056
périhélie....	2ˢ 13° 1′ 9″	log dist. périh.....	0.0151120
nœud.......	4. 20.24.30	log ½ paramètre....	0.1575710
inclinais.....	106.57.24	log moy. mouv....	9.9374598
		révolution	3383 ans.

Ellipse de M. Calandrelli.

Passage, septembre...	12j 6h 41′ 55″ tems moyen à Rome,
périhélie	2.15. 0. 0
nœud...............	4.20.24.26
inclinaison...........	73. 2.43
dist. périhélie........	1.0355879
log.................	0.0151869
révolution...........	3056,3 ans

excentricité............	0.9950827
log....................	9.9978592
½ grand axe............	210.6008741
log....................	2.3234602
½ petit axe.............	20.8589189
log....................	1.3192918
½ paramètre............	2.0649671
log....................	0.3151234
mouvement diurne......	1.1609575
log....................	0.0648163.

1811. Cette dernière comète fut découverte par Pons, le 16 novembre.

1812. Découverte par Pons, le 20 juillet. La seconde orbite de M. Nicollet a été déterminée sur l'ensemble des observations faites à l'Observatoire impérial.

1813. Derniers élémens, par M. Werner, *Monat. Corr.* Juin 1813.

Passage 1813, 4 mars.........	12h 45′ 4″
log. dist. périhélie.............	9.8445998
log. mouv. moy...............	0.1932286
nœud.......................	2s 0° 35′ 54″
périhélie....................	2.9.57.29
inclinaison..................	21. 9.49
rétrograde.	

TABLES GÉNÉRALES DU MOUVEMENT DES COMÈTES.

TABLE I. Conversion des heures, minutes et secondes en décimales de jour.

Heur.	Décimal.	Min.	Décimales.	Min.	Décimales.	Sec.	Décimales.	Sec.	Décimales.
1	0.0416 :	1	0.000694 :	31	0.021527 :	1	0.00001.15740...	31	0.00035.87962...
2	0.0833 :	2	0.001388 :	32	0.022222 :	2	0.00002.3148 ...	32	0.00037.0370 ...
3	0.1250 :	3	0.002083 :	33	0.022916 :	3	0.00003.4722 :	33	0.00038.194 :
4	0.1666 :	4	0.002777 :	34	0.023611 :	4	0.00004.629 ...	34	0.00039.3518 ...
5	0.2083 :	5	0.003472 :	35	0.024305 :	5	0.00005.78703...	35	0.00040.50925...
6	0.2500 :	6	0.004166 :	36	0.025000 :	6	0.00006.94 :	36	0.00041.66 :
7	0.2916 :	7	0.004861 :	37	0.025694 :	7	0.00008.10185...	37	0.00042.82407...
8	0.3333 :	8	0.005555 :	38	0.026388 :	8	0.00009.25 ...	38	0.00043.9814 ...
9	0.3750 :	9	0.006250 :	39	0.027083 :	9	0.00010.416 :	39	0.00045.1388 :
10	0.4166 :	10	0.006944 :	40	0.027777 :	10	0.00011.5740 ...	40	0.00046.296 ...
11	0.4583 :	11	0.007638 :	41	0.028472 :	11	0.00012.73148...	41	0.00047.45370...
12	0.5000 :	12	0.008333 :	42	0.029166 :	12	0.00013.88 :	42	0.00048.6111 :
13	0.5416 :	13	0.009027 :	43	0.029861 :	13	0.00015.04629...	43	0.00049.76851...
14	0.5833 :	14	0.009722 :	44	0.030555 :	14	0.00016.2037 ...	44	0.00050.925 ...
15	0.6250 :	15	0.010416 :	45	0.031250 :	15	0.00017.361 :	45	0.00052.083 :
16	0.6666 :	16	0.011111 :	46	0.031944 :	16	0.00018.5185 ...	46	0.00053.2407 ...
17	0.7083 :	17	0.011805 :	47	0.032638 :	17	0.00019.67592...	47	0.00054.39814...
18	0.7500 :	18	0.012500 :	48	0.033333 :	18	0.00020.83 :	48	0.00055.5555 ...
19	0.7916 :	19	0.013194 :	49	0.034027 :	19	0.00021.99074...	49	0.00056.71296...
20	0.8333 :	20	0.013888 :	50	0.034722 :	20	0.00023.148 ...	50	0.00057.8703 ...
21	0.8750 :	21	0.014583 :	51	0.035416 :	21	0.00024.305 :	51	0.00059.027 :
22	0.9166 :	22	0.015277 :	52	0..36111 :	22	0.00025.4629 ...	52	0.00060.185 ...
23	0.9583 :	23	0.015972 :	53	0.036805 :	23	0.00026.62037...	53	0.00061.34259...
24	1.0000 :	24	0.016666 :	54	0.037500 :	24	0.00027.77 :	54	0.00062.50 ...
		25	0.017361 :	55	0.038194 :	25	0.00028.93518...	55	0.00063.65740...
		26	0.018055 :	56	0.038888 :	26	0.00030.09259...	56	0.00064.81481...
		27	0.018750 :	57	0.039583 :	27	0.00031.250 :	57	0.00065.9722 :
		28	0.019444 :	58	0.040277 :	28	0.00032.407 ...	58	0.00067.12962...
		29	0.020138 :	59	0.040972 :	29	0.00033.56481...	59	0.00068.28703...
		30	0.020833 :	60	0.041666 :	30	0.00034.72 :	60	0.00069.444 :

Nota. Deux points signifient que le dernier chiffre se répète à l'infini; trois points, que les trois derniers chiffres forment une période qui se répète à l'infini.

TABLE II.

Conversion des décimales en heures, minutes et secondes.

D.	H. M. S.	D.	H. M. S.	D.	H. M. S.	D.	M. S.	D.	M. S.
0.01	0.14.24	0.36	8.38.24	0.71	17. 2.24	0.001	1.26.4	0.0001	0. 8.64
02	0.28.48	37	8.52.48	72	17.16.48	2	2.52.8	2	0.17.28
03	0.43.12	38	9. 7 12	73	17.31.12	3	4.19.2	3	0.25.92
04	0.57.36	39	9.21.36	74	17.45.36	4	5.45.6	4	0.34.56
05	1.12. 0	40	9.36. 0	75	18. 0. 0	5	7.12.0	5	0.43.20
0.06	1.26.24	0.41	9.50.24	0.76	18.14.24	0.006	8.38.4	0.0006	0.51.84
07	1.40.48	42	10. 4.48	77	18.28.48	7	10. 4 8	7	1. 0.48
08	1.55.12	43	10.19.12	78	18.43.12	8	11.31.2	8	1. 9.12
09	2. 9.36	44	10.33.36	79	18.57.36	9	12.57.6	9	1.17.76
10	2.24. 0	45	10.48. 0	80	19.12. 0	10	14.24.0	0.0010	1.26.40
0.11	2.38.24	0.46	11. 2.24	0.81	19.26.24	0.011	15.50.4		
12	2.52.48	47	11.16.48	82	19.40.48	12	17.16.8		
13	3. 7.12	48	11.31.12	83	19.55.12	13	18.43.2		
14	3.21.36	49	11.45.36	84	20. 9.36	14	20. 9.6		
15	3.36. 0	50	12. 0. 0	85	20.24. 0	15	21.36.0		
0.16	3.50.24	0.51	12.14.24	0.86	20.38.24	0.016	23. 2.4		
17	4. 4.48	52	12.28.48	87	20.52.48	17	24.28.8		
18	4.19.12	53	12.43.12	88	21. 7.12	18	25.55.2		
19	4.33.36	54	12.57.36	89	21.21.36	19	27.21.6		
20	4.48. 0	55	13.12. 0	90	21.36. 0	20	28.48.0		
0.21	5. 2.24	0.56	13.26.24	0.91	21.50.24	0.021	30.14.4		
22	5.16.48	57	13.40.48	92	22. 4.48	22	31.40.8		
23	5.31.12	58	13.55.12	93	22.19.12	23	33. 7.2		
24	5.45.36	59	14. 9.36	94	22.33.36	24	34.33.6		
25	6. 0. 0	60	14.24. 0	95	22.48. 0	25	36. 0.0		
0.26	6.14.24	0.61	14.38.24	0.96	23. 2.24	0,026	37.26.4		
27	6.28.48	62	14.52.48	97	23.16.48	27	38.52.8		
28	6.43.12	63	15. 7.12	98	23.31.12	28	40.19.2		
29	6.57.36	64	15.21.36	99	23.45.36	29	41.45.6		
30	7.12. 0	65	15.36. 0	1.00	24. 0. 0	30	43.12 0		
0.31	7.26.24	0.66	15.50.24			0.031	44.38 4		
32	7.40.48	67	16. 4.48			32	46. 4.8		
33	7.55.12	68	16 19.12			33	47.31.2		
34	8. 9.36	69	16.33.36			34	48 57.6		
35	8.24. 0	70	16.48. 0			35	50.24.0		

Toutes les valeurs données par la table n° II, sont rigoureusement exactes.

TABLE III. *Mouvement diurne des comètes en divers points de leur parabole.*

Argumens, v = rayon vecteur, h = distance périhélie.

v	h 0.1	h 0.2	h 0.3	h 0.4	h 0.5	h 0.6	h 0.7	h 0.8	h 0.9	h 1.0	h 1.1	h 1.2	h 1.3	h 1.4	h 1.5	h 1.6
0.1	2644′7															
0.2	661.2	935′0														
0.3	293.9	415.6	508′9													
0.4	165.3	233.8	286.9	330′6												
0.5	105.8	149.6	183.2	211.6	236′5											
0.6	73.5	103.9	127.2	146.9	164.3	180′0										
0.7	54.0	76.3	93.5	107.9	120.7	132.2	142′6									
0.8	41.3	58.4	71.6	82.6	92.4	101.2	109.2	116′9								
0.9	32.7	46.2	56.6	65.3	73.0	80.0	86.3	92.4	97′9							
1.0	26.4	37.4	45.8	52.9	59.1	64.8	69.9	74.8	79.3	83′6						
1.1	21.4	30.9	37.9	43.7	48.9	53.5	57.8	61.8	65.6	69.1	72′5					
1.2	18.4	26.0	31.8	36.7	41.1	45.0	48.5	52.0	55.1	58.1	60.9	63′6				
1.3	15.7	22.1	27.1	31.3	35.0	38.3	41.4	44.3	47.0	49.5	51.9	54.2	56′5			
1.4	13.5	19.1	23.4	27.0	30.2	33.0	35.7	38.2	40.5	42.7	44.7	46.7	48.6	50′5		
1.5	11.8	16.6	20.4	23.5	26.3	28.8	31.1	33.3	35.3	37.2	39.0	40.7	42.4	44.0	45′5	
1.6	10.3	14.6	17.9	20.7	23.1	25.3	27.3	29.2	31.0	32.7	34.3	35.8	37.3	38.7	[illegible]0.0	41′3
1.7	9.2	12.9	15.9	18.3	20.5	22.4	24.2	25.9	27.5	28.9	30.4	31.7	33.0	34.2	35.[illegible]	36.6
1.8	8.2	11.5	14.1	16.3	18.3	20.0	21.6	23.1	24.5	25.8	27.1	28.3	29.4	30.5	31.[illegible]	32.6
1.9	7.3	10.4	12.7	14.6	16.4	17.9	19.4	20.7	22.0	23.2	24.3	25.4	26.4	27.[illegible]	[illegible]8.4	29.3
2.0	6.6	9.3	11.5	13.2	14.8	16.2	17.5	18.7	19.8	20.9	21.9	22.9	23.8	24.7	25.6	[illegible]6.5
2.1	6.0	8.5	10.4	12.0	13.4	14.7	15.8	17.0	18.0	19.0	19.9	20.8	21.6	22.4	23.2	24.0
2.2		7.7	9.5	10.9	12.2	13.4	14.4	15.5	16.4	17.3	18.1	18.9	19.7	20.4	21.2	21.9
2.3			8.7	10.0	11.2	12.3	13.2	14.1	15.0	15.8	16.6	17.3	18.0	18.7	19.[illegible]	[illegible]0.0
2.4				9.2	10.3	11.3	12.1	13.0	13.8	14.5	15.2	15.9	16.6	17.2	17.8	18.4
2.5					9.5	10.4	11.2	12.0	12.7	13.4	14.0	14.7	15.3	15.8	16.4	16.9
2.6						9.6	10.3	11.1	11.7	12.4	13.0	13.6	14.1	14.6	15.2	15.6
2.7							9.6	10.3	10.9	11.5	12.0	12.6	13.1	13.6	14.1	14.5
2.8								9.5	10.1	10.7	11.2	11.7	12.2	12.6	13.1	13.5
2.9									9.4	9.9	10.4	10.9	11.3	11.8	12.2	12.6
3.0										9.3	9.7	10.2	10.6	11.0	11.4	11.7
3.1											9.1	9.5	9.9	10.3	10.7	11.0
3.2												9.0	9.3	9.7	10.0	10.3
3.3													8.8	9.1	9.4	9.7
3.4														8.6	8.9	9.1
3.5															8.4	8.6
3.6																8.2

SUITE

SUITE DE LA TABLE III.

v	h 1.7	h 1.8	h 1.9	h 2.0	h 2.2	h 2.4	h 2.6	h 2.8	h 3.0	h 3.2	h 3.4	h 3.6	h 3.8	h 4.0
1.7	37′6													
1.8	33.7	34′6												
1.9	30.2	31.1	31′9											
2.0	27.3	28.0	28.8	29′6										
2.1	24.7	25.4	26.1	26.8										
2.2	22.5	23.2	23.8	24.4	25′6									
2.3	20.6	21.2	21.8	22.4	23.4									
2.4	18.9	19.5	20.0	20.5	21.5	22′5								
2.5	17.4	18.0	18.4	18.9	19.8	20.7								
2.6	16.1	16.6	17.0	17.5	18.3	19.2	20′0							
2.7	15.0	15.4	15.8	16.2	17.0	17.8	18.5							
2.8	13.9	14.3	14.7	15.1	15.8	16.5	17.2	17′8						
2.9	13.0	13.3	13.7	14.1	14.7	15.4	16.0	16.6						
3.0	12.1	12.5	12.8	13.1	13.8	14.4	15.0	15.5	16′1					
3.1	11.3	11.7	12.0	12.3	12.9	13.5	14.0	14.6	15.1					
3.2	10.6	11.0	11.3	11.6	12.1	12.6	13.2	13.7	14.1	14′6				
3.3	10.0	10.3	10.6	10.9	11.4	11.9	12.4	12.9	13.3	13.7				
3.4	9.4	9.7	10.0	10.2	10.7	11.2	11.7	12.1	12.5	12.9	13′3			
3.5	8.9	9.2	9.4	9.6	10.1	10.6	11.0	11.4	11.8	12.2	12.6			
3.6	8.4	8.7	8.9	9.1	9.6	10.0	10.4	10.8	11.0	11.5	11.9	12′2		
3.7	8.0	8.2	8.4	8.6	9.1	9.5	9.8	10.2	10.6	10.9	11.3	11.6		
3.8		7.8	8.0	8.2	8.6	9.0	9.3	9.7	10.0	10.4	10.7	11.0	11.3	
3.9			7.6	7.8	8.2	8.5	8.9	9.2	9.5	9.8	10.1	10.4	10.7	
4.0				7.4	7.8	8.1	8.4	8.7	9.0	9.3	9.6	9.9	10.2	10′5
4.1					7.4	7.7	8.0	8.3	8.6	8.9	9.2	9.4	9.7	9.9
4.2					7.0	7.3	7.7	7.9	8.2	8.5	8.7	9.0	9.2	9.5
4.3						7.0	7.3	7.6	7.9	8.1	8.3	8.6	8.8	9.0
4.4						6.7	7.0	7.2	7.5	7.7	8.0	8.2	8.4	8.6
4.5							6.7	6.9	7.2	7.4	7.6	7.8	8.0	8.3
4.6								6.6	6.8	7.1	7.3	7.5	7.7	7.9

TABLE IV. Mouvement des Comètes dans la parabole.

Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.
0.00	0° 0′ 0″0	5018″0	11.00	15° 9′ 13″1	4841″2	22.00	29° 19′ 25″0	4389.2
0.25	0.20.54.5	5017.6	25	15.29.23.4	4833.6	25	29.37.42.3	4377.2
0.50	0.41.48.9	5017.2	50	15.49.31.8	4825.6	50	29.55.56.6	4364.8
0.75	1. 2.43.2	5016.8	75	16. 9.38.2	4817.2	75	30.14. 7.8	4352.0
1.00	1.23.37.4	5016.0	12.00	16.29.42.5	4809.6	23.00	30.32.15.8	4340.0
1.25	1.44.51.4	5015.2	25	16.49.44.9	4801.2	25	30.50.20.8	4327.2
1.50	2. 5.25.2	5014.0	50	17. 9.45.2	4792.8	50	31. 8.22.6	4314.4
1.75	2.26.18.7	5012.8	75	17.29.43.4	4784.0	75	31.26.21.2	4302.0
2.00	2.47.11.9	5011.2	13.00	17.49.39.4	4775.2	24.00	31.44.16.7	4289.2
2.25	3. 8. 4.7	5009.6	25	18. 9.33.2	4766.8	25	32. 2. 9.0	4276.4
2.50	3.28.57.1	5007.6	50	18.29.24.9	4757.6	50	32.19.58.1	4263.6
2.75	3.49.49.0	5005.6	75	18.49.14.3	4748.8	75	32.37.44.0	4250.8
3.00	4.10.43.4	5003.2	14.00	19. 9. 1.5	4739.6	25.00	32.55.26.7	4238.0
3.25	4.31.31.2	5001.2	25	19.28.46.4	4730.0	25	33.13. 6.2	4224.8
3.50	4.52.21.5	4998.4	50	19.48.28.9	4720.4	50	33.30.42.4	4212.0
3.75	5.13.11.1	4996.0	75	20. 8. 9.0	4711.2	75	33.48.15.4	4199.2
4.00	5.34. 0.1	4992.8	15.00	20.27.46.8	4701.6	26.00	34. 5.45.2	4185.6
4.25	5.54.48.3	4989.6	25	20.47.22.2	4691.6	25	34.23.11.6	4172.8
4.50	6.15.35.7	4986.4	50	21. 6.55.1	4681.6	50	34.40.34.8	4159.6
4.75	6.36.22.3	4982.8	75	21.26.25.5	4671.6	75	34.57.54.7	4146.8
5.00	6.57. 8.0	4979.2	16.00	21.45.53.4	4661.6	27.00	35.15.11.4	4133.2
5.25	7.17.52.8	4975.6	25	22. 5.18.8	4651.2	25	35.32.24.7	4120.0
5.50	7.38.36.7	4971.2	50	22.24.41.6	4640.8	50	35.49.34.7	4106.8
5.75	7.59.19.5	4967.2	75	22.44. 1.8	4630.4	75	36. 6.41.4	4093.6
6.00	8.20. 1.3	4962.8	17.00	23. 3.19.4	4619.6	28.00	36.23.44.8	4080.0
6.25	8.40.42.0	4958.4	25	23.22.34.3	4609.2	25	36.40.44.8	4066.8
6.50	9. 1.21.6	4953.6	50	23.41.46.6	4598.4	50	36.57.41.5	4053.6
6.75	9.22. 0.0	4948.8	75	24. 0.56.2	4587.6	75	37.14.34.9	4040.0
7.00	9.42.37.2	4943.6	18.00	24.20. 3.1	4576.4	29.00	37.31.24.9	4026.8
7.25	10. 3.13.1	4938.8	25	24.39. 7.2	4565.2	25	37.48.11.6	4013.2
7.50	10.23.47.8	4933.2	50	24.58. 8.5	4554.4	50	38. 4.54.9	4000.0
7.75	10.44.21.1	4927.6	75	25.17. 7.1	4543.2	75	38.21.34.9	3986.4
8.00	11. 4.53.0	4921.6	19.00	25.36. 2.9	4531.6	30.00	38.38.11.5	3972.8
8.25	11.25.23.4	4916.0	25	25.54.55.8	4520.0	25	38.54.44.7	3959.6
8.50	11.45.52.4	4910.0	50	26.13.45.8	4508.8	50	39.11.14.6	3946.0
8.75	12. 6.19.9	4904.0	75	26.32.33.0	4497.2	75	39.27.41.1	3932.4
9.00	12.26.45.9	4897.6	20.00	26.51.17.3	4485.6	31.00	39.44. 4.2	3918.8
9.25	12.47.10.3	4890.8	25	27. 9.58.7	4473.6	25	40. 0.23.9	3905.6
9.50	13. 7.33.0	4884.4	50	27.28.37.1	4462.0	50	40.16.40.3	3892.0
9.75	13.27.54.1	4877.2	75	27.47.12.6	4450.0	75	40.32.53.3	3878.4
10.00	13.48.13.4	4870.8	21.00	28. 5.45.1	4438.0	32.00	40.49. 2.9	3865.2
10.25	14. 8.31.1	4863.2	25	28.24.14.6	4426.0	25	41. 5. 9.2	3851.2
10.50	14.28.46.9	4856.0	50	28.42.41.1	4414.0	50	41.21.12.0	3838.0
10.75	14.49. 0.9	4848.8	75	29. 1. 4.6	4401.6	75	41.37.11.5	3824.4
11.00	15. 9.13.1		22.00	29.19.25.0		33.00	41.53. 7.6	

TABLE IV. Mouvement des Comètes dans la parabole.

Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.
33.00	41°57′ 7″6	3811″2	44.00	52°39′15″2	3231″6	55.00	61°44′29″9	2718.4
25	42. 9. 0.4	3797.2	25	52.52.43.1	3219.6	25	61.55.49.5	2707.2
50	42.24.49.7	3783.6	50	53. 6. 8.0	3206.8	50	62. 7. 6.3	2696.8
75	42.40.35.6	3770.4	75	53.19.29.7	3194.0	75	62.18.20.5	2686.4
34.00	42.56.18.2	3756.8	45.00	53.32.48.2	3182.0	56.00	62.29.32.1	2675.6
25	43.11.57.4	3743.6	25	53.46. 3.7	3169.6	25	62.40.41.0	2665.2
50	43.27.33.3	3729.6	50	53.59.16.1	3157.2	50	62.51.47.2	2654.4
75	43.43. 5.7	3716.4	75	54.12.25.4	3144.8	75	63. 2.50.9	2644.4
35.00	43.58.34.8	3702.8	46.00	54.25.31.6	3132.4	57.00	63.13.52.0	2633.6
25	44.14. 0.5	3689.6	25	54.38.34.7	3120.4	25	63.24.50.4	2623.6
50	44.29.22.9	3676.0	50	54.51.34.8	3108.0	50	63.35.45.3	2613.2
75	44.44.41.9	3662.4	75	55. 4.31.8	3096.0	75	63.46.39.6	2602.8
36.00	44.59.57.5	3649.2	47.00	55.17.25.8	3084.0	58.00	63.57.30.3	2592.4
25	45.15. 9.8	3636.0	25	55.30.16.8	3071.6	25	64. 8.18.4	2582.8
50	45.30.18.8	3622.4	50	55.43. 4.7	3059.6	50	64.19. 4.1	2572.4
75	45.45.24.4	3608.8	75	55.55.49.6	3047.6	75	64.29.47.2	2562.0
37.00	46. 0.26.6	3595.6	48.00	56. 8.31.5	3036.0	59.00	64.40.27.7	2552.4
25	46.15.25.5	3582.4	25	56.21.10.5	3023.6	25	64.51. 5.8	2542.0
50	46.30.21.1	3568.8	50	56.33.46.4	3012.0	50	65. 1.41.3	2532.4
75	46.45.13.3	3555.6	75	56.46.19.4	3000.0	75	65.12.14.4	2522.4
38.00	47. 0. 2.2	3542.4	49.00	56.58.41.4	2988.4	60.00	65.22.45.0	2512.4
25	47.14.47.8	3529.2	25	57.11.16.5	2976.4	25	65.33.13.1	2502.8
50	47.29.30.1	3516.0	50	57.23.40.6	2964.8	50	65.43.38.8	2492.8
75	47.44. 9.1	3502.8	75	57.36. 1.8	2953.2	75	65.54. 2.0	2483.2
39.00	47.58.44.8	3489.2	50.00	57.48.20.1	2941.6	61.00	66. 4.22.8	2473.6
25	48.13.17.1	3475.4	25	58. 0.35.5	2930.0	25	66.14.41.2	2464.0
50	48.27.46.2	3463.2	50	58.12.48.0	2918.4	50	66.24.57.2	2454.4
75	48.42.12.0	3450.0	75	58.24.57.6	2906.8	75	66.35.10.8	2444.8
40.00	48.56.34.5	3437.2	51.00	58.37. 4.3	2895.6	62.00	66.45.22.0	2435.2
25	49.10.53.8	3424.0	25	58.49. 8.2	2884.0	25	66.55.30.8	2425.6
50	49.25. 9.8	3410.8	50	59. 1. 9.2	2872.8	50	67. 5.37.2	2416.4
75	49.39.22.5	3398.0	75	59.13. 7.4	2861.2	75	67.15.41.3	2407.2
41.00	49.53.32.0	3385.2	52.00	59.25. 2.7	2850.0	63.00	67.25.43.1	2397.6
25	50. 7.38.3	3372.0	25	59.36.55.2	2838.8	25	67.35.42.5	2388.4
50	50.21.41.3	3359.2	50	59.48.44.9	2827.6	50	67.45.39.6	2379.2
75	50.35.41.1	3346.0	75	60. 0.31.8	2816.4	75	67.55.34.4	2370.0
42.00	50.49.37.6	3333.6	53.00	60.12.15.9	2805.6	64.00	68. 5.26.9	2360.8
25	51. 3.31.0	3320.4	25	60.23.57.3	2794.4	25	68.15.17.1	2351.6
50	51.17.21.1	3308.0	50	60.35.35.9	2783.2	50	68.25. 5.0	2342.4
75	51.31. 8.1	3294.8	75	60.47.11.7	2772.4	75	68.34.50.6	2333.6
43.00	51.44.51.8	3282.4	54.00	60.58.44.8	2761.6	65.00	68.44.34.0	2324.4
25	51.58.32.4	3269.6	25	61.10.15.2	2750.4	25	68.54.15.1	2315.6
50	52.12. 9.8	3257.2	50	61.21.42.8	2739.6	50	69. 3.54.0	2306.8
75	52.25.44.1	3244.4	75	61.33. 7.7	2728.8	75	69.13.30.7	2297.6
44.00	52.39.15.2		55.00	61.44.29.9		66.00	69.23. 5.1	

TABLE IV. Mouvement des Comètes dans la parabole.

Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.
66.00	69°23′ 5″1	2289″2	77.00	75°50′18″9	1940″0	88.00	81°19′48″1	1658″4
25	69.32.37.4	2280.0	25	75.58.23.9	1932.4	25	81.26.42.7	1652.8
50	69.42. 7.4	2271.6	50	76. 6.27.0	1925.6	50	81.33.35.9	1646.8
75	69.51.35.3	2262.8	75	76.14.28.4	1918.8	75	81.40.27.6	1641.2
67.00	70. 1. 1.0	2254.0	78.00	76.22.28.1	1911.6	89.00	81.47.17.9	1635.6
25	70.10.24.5	2245.2	25	76.30.26.0	1904.8	25	81 54. 6.8	1630.0
50	70.19.45.8	2236.8	50	76.38.22.2	1897.6	50	82. 0.54.3	1624.4
75	70.29. 5.0	2228.4	75	76.46.16.6	1890.8	75	82. 7.40.4	1619.2
68.00	70.38.22.1	2220.0	79.00	76.54. 9.3	1884.0	90.00	82.14.25.2	1613.2
25	70.47.37.1	2211.6	25	77. 2. 0.3	1877.2	25	82.21. 8.5	1608.0
50	70.56.50.0	2202.8	50	77. 9.49.6	1870.4	50	82.27.50.5	1602.0
85	71. 6. 0.7	2194.4	75	77.17.37.2	1863.6	75	82.34.31.0	1597.2
69.00	71.15. 9.3	2186.4	80.00	77.25.23.1	1857.2	91.00	82.41.10.3	1591.2
25	71.24.15.9	2178.0	25	77.33. 7.4	1850.0	25	82.47.48.1	1586.4
50	71.33.20.4	2170.6	50	77.40.49.9	1843.6	50	82.54.24.7	1580.8
75	71.42.22.8	2161.6	75	77.48.30.8	1837.2	75	83. 0.59.9	1575.2
70.00	71.51.23.2	2153.2	81.00	77.56.10.1	1830.4	92.00	83. 7.33.7	1570.4
25	72. 0.21.5	2145.2	25	78. 3.47.7	1823.6	25	83.14. 6.3	1564.8
50	72. 9.17.8	2137.2	50	78.11.23.6	1817.2	50	83.20.37.5	1559.6
75	72.18.12.1	2129.2	75	78.18.57.9	1810.8	75	83.27. 7.4	1554.0
71.00	72.27. 4.4	2120.8	82.00	78.26.30.6	1804.4	93.00	83.33.35.9	1549.2
25	72.35.54.6	2112.8	25	78.34. 1.7	1798.0	25	83.40. 3.2	1543.6
50	72.44.42.8	2105.2	50	78.41.31.2	1791.2	50	83.46.29.1	1538.8
75	72.53.29.1	2097.2	75	78.48.59.0	1785.2	75	83.52.53.8	1533.6
72.00	73. 2.13.4	2089.2	83.00	78.56.25.3	1778.8	94.00	83.59.17.2	1528.4
25	73.10.55.7	2081.6	25	79. 3.50.0	1772.4	25	84. 5.39.5	1523.2
50	73.19.36.1	2073.6	50	79.11.13.1	1766.4	50	84.12. 0.1	1518.4
75	73.28.14.5	2066.0	75	79.18.34.7	1759.6	75	84.18.19.7	1513.2
73.00	73.36.51.0	2058.4	84.00	79.25.54.6	1754.0	95.0	84.24.38.0	1508.4
25	73.45.25.6	2050.4	25	79.33.13.1	1747.6	25	84.30.55.1	1503.2
50	73.53.58.2	2043.2	50	79.40.30.0	1741.2	50	84.37.10.9	1498.4
75	74. 2.29.0	2035.2	75	79.47.45.3	1735.2	75	84.43.25.5	1493.2
74.00	74.10.57.8	2027.6	85.00	79.54.59.1	1729.2	96.00	84.49.38.7	1488.8
25	74.19.24.7	2020.4	25	80. 2.11.4	1722.8	25	84.55.50.9	1483.6
50	74.27.49.8	2012.8	50	80. 9.22.1	1717.2	50	85. 2. 1.8	1478.4
75	74.36.13.0	2005.2	75	80.16.31.4	1710.8	75	85. 8.11.4	1473.6
75.00	74.44.34.5	1998.0	86.00	80.23.39.1	1705.6	97.00	85.14.19.8	1469.2
25	74.52.53.8	1990.4	25	80.30.45.5	1699.2	25	85.20.27.1	1464.4
50	75. 1.11.4	1983.2	50	80.37.50.3	1693.2	50	85.26.33.2	1459.2
75	75. 9.27.2	1976.0	75	80.44.53.6	1687.2	75	85.32.38.0	1454.4
76.00	75.17.41.2	1968.4	87.00	80.51.55.4	1681.6	98.00	85.38.41.6	1450.0
25	75.25.53.3	1961.2	25	80.58.55.8	1675.6	25	85.44.44.1	1445.2
50	75.34. 3.6	1954.0	50	81. 5.54.7	1669.6	50	85.50.45.4	1440.4
75	75.42.12.1	1947.2	75	81.12.52.1	1664.0	75	85.56.45.5	1435.6
77.00	75.50.18.9		88.00	81.19.48.1		99.00	86. 2.44.4	

TABLE IV. Mouvement des Comètes dans la parabole.

Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.
99.00	86° 2′ 44″4	1431″2	110.00	90° 8′ 1″3	1246″8	121.00	93° 42′ 37″2	1095″6
25	86. 8.42.2	1426.8	21	90.13.13.0	1243.2	25	93.47.11.1	1092.8
50	86.14.38.9	1421.6	50	90.18.23.8	1239.2	50	93.51.44.3	1089.6
75	86.20 34.3	1417.6	75	90.23.33.6	1235.2	75	93.56.16.7	1086.8
100.00	86.26.28.7	1412.8	111.00	90.28.42.4	1232.[illegible]	122.00	94. 0.48.4	1083.2
25	86.32.21.9	1408.0	25	90.33.50.4	1228.0	25	94. 5.19.2	1080.4
50	86.38.13.9	1404.0	50	90.38.57.4	1224.4	50	94. 9.49.3	1077.6
75	86.44. 4.9	1399.2	75	90.44. 3.5	1220.8	75	94.14.18.7	1074.4
101.00	86.49.54.7	1394.8	112.00	90.49. 8.7	1216.8	123.00	94.18.47.3	1071.2
25	86.55.43.4	1390.0	25	90.54.12.9	1213.6	25	94.23.15.1	1068.4
50	87. 1.30.9	1386.0	50	90.59.16.3	1209.6	50	94.27.42.2	1065.6
75	87. 7.17.4	1381.6	75	91. 4.18.7	1206.4	75	94.32. 8.6	1062.4
102.00	87.13. 2.8	1376.8	113.00	91. 9.20.3	1202.4	124.00	94.36.34.2	1059.2
25	87.18.47.0	1372.8	25	91.14.20.9	1199.2	25	94.40.59.0	1056.4
50	87.24.30.2	1368.4	50	91.19.20.7	1195.6	50	94.45.23.1	1053.6
75	87.30.12.3	1364.0	75	91.24.19.6	1192.0	75	94.49.46.5	1050.8
103.00	87.35.53.3	1359.6	114.00	91.29.17.6	1188.4	125.00	94.54. 9.2	1048.0
25	87.41.33.2	1355.2	25	91.34.14.7	1184.8	25	94.58.31.2	1044.8
50	87.47.12.0	1351.2	50	91.39.10 9	1181.2	50	95. 2.52.4	1042.0
75	87.52.49.8	1346.8	75	91.44. 6.2	1178.0	75	95. 7.12.9	1039.2
104.00	87.58.26.5	1342.8	115.00	91.49. 0.7	1174.4	126.00	95.11.32.7	1036.0
25	88. 4. 2.2	1338.4	25	91.53.54.3	1170.8	25	95.15.51.7	1033.6
50	88. 9.36.8	1334.4	50	91.58.47.0	1168.0	50	95.20.10.1	1030.4
75	88.15.10.4	1330.0	75	92. 3.39.0	1164.0	75	95.24.27.7	1028.0
105.00	88.20.42.9	1326.0	116.00	92. 8.30.0	1160.4	127.00	95.28.44.7	1024.8
25	88.26.14.4	1321.6	25	92.13.20.1	1157.6	25	95.33. 0.9	1022.0
50	88.31.44.8	1317.6	50	92.18. 9.5	1154.0	50	95.37.16.4	1019.6
75	88.37.14.2	1313.6	75	92.22.58.0	1150.8	75	95.41.31.3	1016.4
106.00	88.42.42.6	1309.6	117.00	92.27.45.7	1147.2	128.00	95.45.45.4	1014.0
25	88.48.10.0	1305.2	25	92.32.32.5	1144.0	25	95.49.58.9	1011.2
50	88.53.36.3	1301.6	50	92.37.18.5	1140.8	50	95.54.11.7	1008.0
75	88.59. 1.7	1297.2	75	92.42. 3.7	1137.2	75	95.58.23.7	1006.0
107.00	89. 4.26.0	1293.2	118.00	92.46.48.0	1134.4	129.00	96. 2.35.2	1002.8
25	89. 9.49.3	1289.6	25	92.51.31.6	1130.8	25	96. 6.45.9	1000.0
50	89.15.11.7	1285.2	50	92.56.14.3	1127.6	50	96.10.55.9	997.6
75	89.20.33.0	1281.6	75	93. 0.56.2	1124.4	75	96.15. 5.3	994.8
108.00	89.25.53.4	1276.6	119.00	93. 5.37.3	1120.8	130.00	96.19.14.0	992.0
25	89.31.12.8	1273.6	25	93.10.17.5	1118.0	25	96.23.22.0	989.6
50	89.36.31.2	1269.6	50	93.14.57.0	1114.4	50	96.27.29.4	986.8
75	89.41.48.6	1266.0	75	93.19.35.6	1112.0	75	96.31.36.1	984.4
109.00	89.47. 5.1	1262.0	120.00	93.24.13.6	1108.4	131.00	96.35.42.2	981.2
25	89.52.20.6	1258.0	25	93.28.50.7	1105.2	23	96.39.47.5	979.2
50	89.57.35.1	1254.4	50	93.33.27.0	1102.0	50	96.43.52.3	976.4
75	90. 2.48.7	1250.4	65	93.38 2.5	1098.8	75	96.47.56.4	973.6
110.00	90. 8. 1.3		121.00	93.42.37.2		132.00	96.51.59.8	

TABLE IV. Mouvement des Comètes dans la parabole.

Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.
132.00	96°51′59″8	971″2	143.00	99°40′26″9	867″2	154.00	102°11′22″6	779″6
25	96.56. 2.6	968.4	25	99.44. 3.7	865.2	25	102.14 37.5	778.0
50	97. 0. 4.7	966.0	50	99.47.40.0	862.8	50	102.17.52.0	776.0
75	97. 4. 6.2	963.6	75	99.51.15.7	860.8	75	102.21. 6.0	774.4
133.00	97. 8. 7.1	960.8	144.00	99.54.50.9	858.8	155.00	102.24.19.6	772.4
25	97.12 7.3	958.4	25	99.58.25.6	856.4	25	102.27.32.7	770.8
50	97.16. 6.7	956.0	50	100. 1.59.7	854.4	50	102.30.45.4	768.8
75	97.20. 5.9	953.2	75	100. 5.33.3	852.4	75	102.33.57.6	767.2
134.00	97.24. 4.2	950.8	145.00	100. 9. 6.4	850.0	156.00	102.37. 9.4	765.2
25	97.28. 1.9	948.4	25	100.12.38.9	848.0	25	102.40.20.7	763.6
50	97.31.59.0	946.0	50	100.16.10.9	846.0	50	102.43.31.6	762.0
75	97.35.55.5	943.2	75	100.19.42.4	844.0	75	102.46.42.1	760.0
135.00	97.39.51.3	941.2	146.00	100.23.13.4	842.0	157.00	102.49.52.1	758.4
25	97.43.46.6	938.4	25	100.26.43.9	840.0	25	102.53. 1.7	756.4
50	97.47.41.2	936.0	50	100.30.13.9	837.6	50	102.56.10.8	754.8
75	97.51.35.2	933.6	75	100.33.43.3	835.6	75	102.59.19.5	753.2
136.00	97.55.28.6	931.2	147.00	100.37.12.2	833.6	158.00	103. 2.27.8	751.2
25	97.59.21.4	928.8	25	100.40.40.6	831.6	25	103. 5.35.6	749.6
50	98. 3.13.6	926.4	50	100.44. 8.5	829.6	50	103. 8.43.0	748.0
75	98. 7. 5.2	924.0	75	100.47.35.9	827.6	75	103.11.50.0	746.4
137.00	98.10.56.2	921.6	148.00	100.51. 2.8	825.6	159.00	103.14.56.6	744.4
25	98.14.46.6	919.2	25	100.54.29.2	823.6	25	103.18. 2.7	742.8
50	98.18.36.4	917.2	50	100.57.55.1	821.6	50	103.21. 8.4	741.2
75	98.22.25.7	914.4	75	101. 1.20.5	819.6	75	103.24.13.7	739.2
138.00	98.26.14.3	912.4	149.00	101. 4.45.4	818.0	160.00	103.27.18.5	738.0
25	98.30. 2.4	909.6	25	101. 8. 9.9	815.6	25	103.30.23.0	736.0
50	98.33.49.8	907.6	50	101.11.33.8	813.6	50	103.33.27.0	734.4
75	98.37.36.7	905.2	75	101.14.57.2	811.6	75	103.36 30.6	732.8
139.00	98.41.23.0	903.2	150.00	101.18.20.1	810.0	161.00	103.39.33.8	731.2
25	98.45. 8.8	900.4	25	101.21.42.6	808.0	25	103.42.36.6	729.2
50	98.48.53.9	898.4	50	101.25. 4.6	806.0	50	103.45.38.9	728.0
75	98.52.38.5	896.0	75	101.28.26.1	804.0	75	103.48.40.0	726.4
140.00	98.56.22.5	893.6	151.00	101.31.47.1	802.4	162.00	103.51.42.4	724.8
25	99. 0. 5.9	891.6	25	101.35. 7.7	800.4	25	103.54.43.6	722.8
50	99. 3.48.8	889.2	50	101.38.27.8	798.0	50	103.57.44.3	721.2
75	99. 7.31.1	887.2	75	101.41.47.3	796.8	75	104. 0.44.6	720.0
141.00	99.11.12.9	884.8	152.00	101.45. 6.5	794.4	163.00	104. 3.44.6	718.0
25	99.14.54.1	882.4	25	101.48.25.1	792.8	25	104. 6.44.1	716.4
50	99.18.34.7	880.4	50	101.51.43.3	790.8	50	104. 9.43.2	715.2
75	99.22.14.8	878.0	75	101.55. 1.0	788.8	75	104.12.42.0	713.2
142.00	99.25.54.3	876.0	153.00	101.58.18.2	787.2	164.00	104.15.40.3	711.6
25	99.29.33.3	873.6	25	102. 1.35.0	785.2	25	104.18.38.2	710.4
50	99.33.11.7	871.6	50	102. 4.51.3	783.6	50	104.21.35.8	708.4
75	99.36.49.6	869.2	75	102. 8. 7.2	781.6	75	104.24.32.9	707.2
143.00	99.40.26.9		154.00	102.11.22.6		165.00	104 27.29 7	

TABLE IV. Mouvement des Comètes dans la parabole.

Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.
165.00	104°27′29″7	705″2	176.00	106°30′59″4	642″0	187 00	108°23′38″8	587″2
25	104.30.26.0	704.0	25	106.33.39.9	640.8	25	108.26. 5.6	586.0
50	104.33.22.0	702.4	50	106.36.20.1	639.2	50	108.28.32.1	584.8
75	104.36 17.6	700.8	75	106.38.59.9	638.0	75	108.30.58.3	583.6
166.00	104.39.12.8	699.2	177.00	106.41.39.4	636.8	188.00	108.33.24.2	582.4
25	104.42. 7.6	698.0	25	106.44.18.6	635.2	25	108.35.49.8	581.2
50	104.45. 2.1	696.0	50	106.46.57.4	634.0	50	108.38.15.1	580.4
75	104.47.56.1	694.8	75	106.49.35.9	632.8	75	108.40.40.2	579.2
167.00	104.50.49.8	693.2	178.00	106.52.14.1	631.2	189.00	108.43. 5.0	578.0
25	104.53.43.1	691.6	25	106.54.51.9	630.0	25	108.45.29.5	576.8
50	104.56.36.0	690.4	50	106.57.29.4	628.8	50	108.47.53.7	575.6
75	104.59.28.6	688.4	75	107. 0. 6.6	627.6	75	108.50.17.6	574.8
168.00	105. 2.20.7	687.2	179.00	107. 2.43.5	626.0	190.00	108.52.41.3	573.2
25	105. 5.12.5	685.6	25	107. 5.20.0	624.8	25	108.55. 4.6	572.4
50	105. 8. 3.9	684.4	50	107. 7.56.2	623.6	50	108.57.27.7	571.2
75	105.10.55.0	682.4	75	107.10.32.1	622.4	75	108.59.50.5	570.4
169.00	105.13.45.6	681.2	180.00	107.13. 7.7	621.2	191.00	109. 2.13.1	568.8
25	105.16.35.9	680.0	25	107.15.43.0	620.0	25	109. 4.35.3	568.0
50	105.19.25.9	678.4	50	107.18.18.0	618.4	50	109. 6.57.3	566.8
75	105.22.15.5	676.8	75	107.20.52.6	617.2	75	109. 9.19.0	565.6
170.00	105.25. 4.7	675.2	181.00	107.23.26.9	616.0	192.00	109.11.40.4	564.8
25	105.27.53.5	674.0	25	107.26. 0.9	614.8	25	109.14. 1.6	563.6
50	105.30.42 0	672.4	50	107.28.54.6	613.6	50	109.16.22.5	562.4
75	105.33.30.1	671.2	75	107.31. 8.0	612.4	75	109.18.43.1	561.6
171.00	105.36.17.9	669.6	182.00	107.33.41.1	611.2	193.00	109.21. 3.5	560.0
25	105.39. 5.3	668.0	25	107.36.13.9	609.6	25	109 23.23.5	559.2
50	105.41.52.3	666.8	50	107.38.46.3	608.4	50	109.25.43.5	558.4
75	105.44.39.0	665.6	75	107.41.18.4	607.2	75	109.28. 2.9	557.2
172.00	105.47.25.4	664.0	183.00	107.43.50.2	606.4	194.00	109.30.22.2	556.0
25	105.50.11.4	662.4	25	107.46.21.8	604.8	25	109.32.41.2	554.8
50	105.52.57.0	661.2	50	107.48.53.0	604.0	50	109.34.59.9	554.0
75	105.55.42.3	659.6	75	107.51.24.0	602.4	75	109.37.18.4	553.2
173.00	105.58.27.2	658.4	184.00	107.53.54.6	601.2	195.00	109.39.36.7	551.6
25	106. 1.11.8	656.8	25	107.56.24.9	600.0	25	109.41.54.6	550.8
50	106. 3.56.0	655.6	50	107.58.54.9	599.2	50	109.44.12.3	550.0
75	106. 6.39.9	654.0	75	108. 1.24.7	597.6	75	109.46.29.8	548.4
174.00	106. 9.23.4	652.8	185 00	108. 3.54.1	596.4	196.00	109.48.46.9	548.0
25	106.12. 6.6	651.6	25	108. 6.23.2	595.2	25	109.51. 3.9	546.8
50	106.14.49.5	650.0	50	108. 8.52.0	594.0	50	109.53.20.6	545.2
75	106.17.32.0	648.8	75	108.11.20.5	592.8	75	109.55.36.9	544.8
175.00	106.20.14.2	647.2	186.00	108.13.48.8	591.6	197.00	109.57.53.1	543 6
25	106.22.56.0	646.0	25	108.16.16.7	590.8	25	110. 0. 9.0	542.4
50	106 25.37.5	644.4	50	108.18.44.4	589.2	50	110. 2.24.6	541.6
75	106.28.18.6	643.2	75	108.21.11.7	588.4	75	110. 4 40.0	540.4
176.00	106.30.59.4		187.00	108.23.38.8		198.00	110. 6.55.1	

TABLE IV. Mouvement des Comètes dans la parabole.

Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.
198.00	110° 6′ 55″1	539″6	218.0	112°54′ 26″3	467″2	240.0	115°34′ 5″1	404″8
25	110. 9.10.0	538.4	218.5	112.58.19.9	465.6	240.5	115.37.27 5	403.4
50	110.11.24.6	537.6	219.0	113. 2.12.7	464.0	241.0	115.40.49.2	402.2
75	110.13.39.0	536.4	219.5	113. 6. 4.7	462.4	241.5	115.44.10.3	400.8
199.00	110.15.53.1	535.6	220.0	113. 9.55.9	460.8	242.0	115.47.30.7	399.8
25	110.18. 7.0	534.4	220.5	113.13.46.3	459.4	242.5	115.50.50.6	398.4
50	110.20.20.6	533.6	221.0	113.17.36.0	457.6	243.0	115.54. 9.8	397.2
75	110.22.34.0	532.4	221.5	113.21.24.8	456.2	243.5	115.57.28.4	396.0
200.00	110.24.47.1	531.0	222.0	113.25.12.9	454.6	244.0	116. 0.46.4	394.8
200.5	110.29 12.6	529.0	222.5	113.29. 0.2	453.[illegible]	244.5	116. 4. 3.8	393.6
201.0	110.33.37.1	527.2	223.0	113.32.46.8	451.8	245.0	116. 7.20.6	392.4
201.5	110.38. 0.7	525.0	223.5	113.36.32.7	450.0	245.5	116.10.36.8	391.2
202.0	110.42.23.2	523.2	224.0	113.40.17.7	448.6	246 0	116.13.52.4	390.0
202.5	110.46.44.8	521.4	224.5	113.44. 2.0	447.0	246.5	116.17. 7.4	388.8
203.0	110.51. 5.5	519.4	225.0	113.47.45.5	445.6	247.0	116.20.21.8	387.6
203.5	110.55.25.2	517.4	225.5	113.51.28.3	444.2	247.5	116.23.35.6	386.6
204.0	110.59.43.9	515.6	226.0	113.55.10.4	442.8	248.0	116.26.48.9	385.2
204.5	111. 4. 1.7	513.8	226.5	113.58.51.8	441.2	248.5	116.30. 1.5	384.2
205.0	111. 8.18.6	512.0	227.0	114. 2.32.4	439.8	249.0	116.33.13.6	383.0
205.5	111.12.34.6	510.0	227.5	114. 6.12.3	438.4	249 5	116.36.25.1	381.8
206.0	111.16.49.6	508.2	228.0	114. 9 51.5	437.0	250.0	116.39.36.0	380.8
206.5	111.21. 3.7	506.4	228.5	114.13.30.0	435.4	250.5	116.42.46.4	379.6
207.0	111.25.16.9	504.6	229.0	114.17. 7.7	434.0	251 0	116.45.56.2	378.4
207.5	111.29.29 2	502.6	229.5	114.20.44.7	432.6	251.5	116.49. 5.4	377.2
208.0	111.33.40.5	501.0	230.0	114.24.21.0	431.4	252.0	116.52.14.0	376.2
208.5	111.37.51.0	499.2	230.5	114.27.56.7	429.8	252.5	116.55.22.1	375.2
209.0	111.42. 0.6	497.4	231.0	114.31.31.6	428.6	253.0	116.58.29.7	374.0
209.5	111.46. 9.3	495 6	231.5	114.35. 5.9	427.0	253.5	117. 1.36.7	372.8
210.0	111.50.17.1	494.0	232.0	114.38.39.4	425.8	254.0	117. 4.43.1	371.8
210.5	111.54 24.1	492.2	232.5	114.42.12.3	424.2	254.5	117. 7.49.0	370.6
211.0	111.58.30.2	490.4	233.0	114.45.44.4	423.0	255.0	117.10.54.3	369.6
211.5	112. 2.35.4	488.6	233.5	114.49.15.9	421.6	255.5	117.13.59.1	368.6
212.0	112. 6.39.7	487.0	234.0	114.52.46.7	420.4	256.0	117.17. 3.4	367.4
212.5	112.10.43.2	485.2	234.5	114.56.16.9	419.0	256.5	117.20. 7.1	366.4
213.0	112.14.45.8	483.6	235.0	114.59.46 4	417.6	257.0	117.23.10.3	365.2
213.5	112.18.47.6	481.8	235.5	115. 3.15.2	416,2	257.5	117.26.12.9	364.2
214.0	112.22.48.5	480.2	236.0	115. 6.43.3	415.2	258.0	117.29.15.0	363.2
214.5	112.26.48.6	478.6	236.5	115.10.10.8	413.8	258.5	117.32.16.6	362.2
215.0	112.30.47.9	477.0	237.0	115 13.37.7	412.4	259.0	117.35.17.7	361.1
215.5	112.34.46.4	475.2	237.5	115.17. 3.9	411.0	259 5	117.38.18.2	360.2
216.0	112.38.44.0	473.6	238.0	115.20.29.4	409.8	260.0	117.41.18.3	359.0
216.5	112.42.40.8	472.0	238.5	115.23.54.3	408.4	260.5	117.44.17.8	357.8
217.0	112.46.36.8	470.2	239.0	115.27.18.5	407.2	261.0	117.47.16.7	357.0
217.5	112.50.31.9	468.8	239.5	115.30.42.1	406.0	261.5	117.50.15.2	356.0
218.0	112.54.26.3		240.0	115.34. 5.1		262.0	117.53.13.2	

TABLE

TABLE IV. Mouvement des Comètes dans la parabole.

Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.
262.0	117°53′13″2	354″8	284.0	119°55′52″0	314″4	306.0	121°45′ 2″2	281″2
262.5	117.56.10.6	354.0	284.5	119.58.29.2	313.8	306.5	121.47.22.8	280.6
263.0	117.59. 7.6	352.8	285.0	120. 1. 6.1	312.8	307.0	121.49.43.1	280.0
263.5	118. 2. 4.0	352.0	285.5	120. 3.42.5	312.0	307.5	121.52. 3.1	279.2
264.0	118. 5. 0.0	350.8	286.0	120. 6.18.5	311.2	308.0	121.54.22.7	278.4
264.5	118. 7.55.4	350.0	286.5	120. 8.54.1	310.6	308.5	121.56.41.9	277.8
265.0	118.10.50.4	348.8	287.0	120.11.29.4	309.4	309.0	121.59. 0.8	277.2
265.5	118.13.44.8	348.0	287.5	120.14. 4.1	308.8	309.5	122. 1.19.4	276.6
266.0	118.16.38.8	347.0	288.0	120.16.38.5	308.0	310.0	122. 3.37.7	275.8
266.5	118.19.32.3	346.0	288.5	120.19.12.5	307.2	310.5	122. 5.55.6	275.0
267.0	118.22.25.3	345.0	289.0	120.21.46.1	306.4	311.0	122. 8.13.1	274.6
267.5	118.25.17.8	344.0	289.5	120.24.19.3	305.6	311.5	122.10.30.4	273.8
268.0	118.28. 9.8	343.0	290.0	120.26.52.1	304.8	312.0	122.12.47.3	273.2
268.5	118.31. 1.3	342.2	290.5	120.29.24.5	304.2	312.5	122.15. 3.9	272.6
269.0	118.33.52.4	341.0	291.0	120.31.56.6	303.2	313.0	122.17.20.2	271.8
269.5	118.36.42.9	340.2	291.5	120.34.28.2	302.4	313.5	122.19.36.1	271.2
270.0	118.39.33.0	339.4	292.0	120.36.59.4	301.8	314.0	122.21.51.7	270.6
270.5	118.42.22.7	338.2	292.5	120.39.30.3	300.8	314.5	122.24. 7.0	270.0
271.0	118.45.11.8	337.4	293.0	120.42. 0.7	300.2	315.0	122.26.22.0	269.2
271.5	118.48. 0.5	336.4	293.5	120.44.30.8	299.4	315.5	122.28.36.6	268.6
272.0	118.50.48.7	335.6	294.0	120.47. 0.5	298.6	316.0	122.30.50.9	268.0
272.5	118.53.36.5	334.6	294.5	120.49.29.8	297.8	316.5	122.33. 4.9	267.4
273.0	118.56.23.8	333.8	295.0	120.51.58.7	297.2	317.0	122.35.18.6	266.8
273.5	118.59.10.7	332.6	295.5	120.54.27.3	296.4	317.5	122.37.32.0	266.2
274.0	119. 1.57.0	332.0	296.0	120.56.55.5	295.6	318.0	122.39.45.1	265.4
274.5	119. 4.43.0	331.0	296.5	120.59.23.3	294.8	318.5	122.41.57.8	265.0
275.0	119. 7.28.5	330.0	297.0	121. 1.50.7	294.0	319.0	122.44.10.3	264.2
275.5	119.10.13.5	329.2	297.5	121. 4.17.7	293.4	319.5	122.46.22.4	263.8
276.0	119.12.58.1	328.2	298.0	121. 6.44.4	292.6	320.0	122.48.34.3	263.0
276.5	119.15.42.2	327.4	298.5	121. 9.10.7	292.0	320.5	122.50.45.8	262.4
277.0	119.18.25.9	326.4	299.0	121.11.36.7	291.2	321.0	122.52.57.0	261.8
277.5	119.21. 9.1	325.6	299.5	121.14. 2.3	290.4	321.5	122.55. 7.9	261.0
278.0	119.23.51.9	324.8	300.0	121.16.27.5	289.6	322.0	122.57.18.4	260.6
278.5	119.26.34.3	323.8	300.5	121.18.52.3	289.0	322.5	122.59.28.7	260.0
279.0	119.29.16.2	323.0	301.0	121.21.16.8	288.4	323.0	123. 1.38.7	259.4
279.5	119.31.57.7	322.2	301.5	121.23.41.0	287.4	323.5	123. 3.48.4	258.8
280.0	119.34.38.8	321.4	302.0	121.26. 4.7	287.0	324.0	123. 5.57.8	258.2
280.5	119.37.19.5	320.4	302.5	121.28.28.2	286.2	324.5	123. 8. 6.9	257.4
281.0	119.39.59.7	319.4	303.0	121.30.51.2	285.4	325.0	123.10.15.6	257.0
281.5	119.42.39.4	318.8	303.5	121.33.13.9	285.0	325.5	123.12.24.1	256.4
282.0	119.45.18.8	317.8	304.0	121.35.36.4	284.0	326.0	123.14.32.3	255.8
282.5	119.47.57.7	317.0	304.5	121.37.58.4	283.2	326.5	123.16.40.2	255.2
283.0	119.50.36.2	316.2	305.0	121.40.20.0	282.6	327.0	123.18.47.8	254.6
283.5	119.53.14.3	315.4	305.5	121.42.41.3	281.8	327.5	123.20.55.1	254.0
284.0	119.55.52.0		306.0	121.45. 2.2		328.0	123.23. 2.1	

TABLE IV. Mouvement des Comètes dans la parabole.

Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.
328.0	123°23′ 2″.1	253″.6	350.0	124°51′38″.9	230″.0	372.0	126°12′18″.0	210″.0
328.5	123.25. 8.9	252.8	350.5	124.53.33.9	229.6	372.5	126.14. 3.0	209.6
329.0	123.27.15.3	252.4	351.0	124.55.28.7	229.0	373.0	126.15.47.8	209.2
329.5	123.29.21.5	251.6	351.5	124.57.23.2	228.4	373.5	126.17.32.4	208.8
330.0	123.31.27.3	251.2	352.0	124.59.17.4	228.2	374.0	126.19.16.8	208.2
330.5	123.33.32.9	250.6	352.5	125. 1.11.5	227.6	374.5	126.21. 0.9	207.8
331.0	123.35.38.2	250.0	353.0	125. 3. 5.3	227.1	375.0	126.22.44.8	207.6
331.5	123.37.43.2	249.6	353.5	125. 4.58.8	226.6	375.5	126.24.28.6	207.0
332.0	123.39.48.0	248.8	354.0	125. 6.52.1	226.2	376.0	126.26.12.1	206.6
332.5	123.41.52.4	248.4	354.5	125. 8.45.2	225.6	376.5	126.27.55.4	206.2
333.0	123.43.56.6	247.8	355.0	125.10.38.0	225.2	377.0	126.29.38.5	206.0
333.5	123.46. 0.5	247.2	355.5	125.12.30.6	224.6	377.5	126.31.21.5	205.4
334.0	123.48. 4.1	246.6	356.0	125.14.22.9	224.2	378.0	126.33. 4.2	205.0
334.5	123.50. 7.4	246.2	356.5	125.16.15.0	223.8	378.5	126.34.46.7	204.6
335.0	123.52.10.5	245.6	357.0	125.18. 6.9	223.4	379.0	126.36.29.0	204.2
335.5	123.54.13.3	245.0	357.5	125.19.58.6	222.8	379.5	126.38.11.1	203.8
336.0	123.56.15.8	244.4	358.0	125.21.50.0	222.4	380.0	126.39.53.0	203.4
336.5	123.58.18.0	244.0	358.5	125.23.41.2	221.8	380.5	126.41.34.7	203.0
337.0	124. 0.20.0	243.4	359.0	125.25.32.1	221.4	381.0	126.43.16.2	202.6
337.5	124. 2.21.7	242.8	359.5	125.27.22.8	221.0	381.5	126.44.57.5	202.2
338.0	124. 4.23.1	242.[illegible]	360.0	125.29.13.3	220.6	382.0	126.46.38.6	201.8
338.5	124. 6.24.3	241.8	360.5	125.31. 3.6	220.0	382.5	126.48.19.5	201.4
339.0	124. 8.25.2	241.2	361.0	125.32.53.6	219.6	383.0	126.50. 0.2	201.0
339.5	124.10.25.8	240.6	361.5	125.34.43.4	219.2	383.5	126.51.40.7	200.8
340.0	124.12.26.1	240.2	362.0	125.36.33.0	218.6	384.0	126.53.21.1	200.2
340.5	124.14.26.2	239.6	362.5	125.38.22.3	218.2	384.5	126.55. 1.2	199.8
341.0	124.16.26.0	239.2	363.0	125.40.11.5	217.8	385.0	126.56.41.1	199.6
341.5	124.18.25.6	238.6	363.5	125.42. 0.4	217.2	385.5	126.58.20.9	199.0
342.0	124.20.24.9	238.0	364.0	125.43.49.0	217.0	386.0	127. 0. 0.4	198.8
342.5	124.22.23.9	237.6	364.5	125.45.37.5	216.4	386.5	127. 1.39.8	198.2
343.0	124.24.22.7	237.0	365.0	125.47.25.7	216.2	387.0	127. 3.18.9	198.0
343.5	124.26.21.2	236.6	365.5	125.49.13.8	215.6	387.5	127. 4.57.9	197.6
344.0	124.28.19.5	236.0	366.0	125.51. 1.6	215.0	388.0	127. 6.36.7	197.2
344.5	124.30.17.5	235.6	366.5	125.52.49.1	214.8	388.5	127. 8.15.3	196.8
345.0	124.32.15.3	234.8	367.0	125.54.36.5	214.2	389.0	127. 9.53.7	196.4
345.5	124.34.12.7	234.6	367.5	125.56.23.6	213.8	389.5	127.11.31.9	196.0
346.0	124.36.10.0	234.0	368.0	125.58.10.5	213.4	390.0	127.13. 9.9	195.6
346.5	124.38. 7.0	233.4	368.5	125.59.57.2	213.0	390.5	127.14.47.7	195.2
347.0	124.40. 3.7	233.0	369.0	126. 1.43.7	212.6	391.0	127.16.25.4	194.8
347.5	124.42. 0.2	232.4	369.5	126. 3.30.0	212.0	391.5	127.18. 2.8	194.6
348.0	124.43.56.4	232.0	370.0	126. 5.16.0	211.6	392.0	127.19.40.1	194.2
348.5	124.45.52.4	231.4	370.5	126. 7. 1.8	211.4	392.5	127.21.17.2	193.8
349.0	124.47.48.1	231.0	371.0	126. 8.47.5	210.8	393.0	127.22.54.1	193.4
349.5	124.49.43.6	230.2	371.5	126.10.32.9	210.4	393.5	127.24.30.8	193.2
350.0	124.51.38.9		372.0	126.12.18.0		394.0	127.26. 7.4	

TABLE IV. Mouvement des Comètes dans la parabole.

Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.
394.0	127°26′ 7″4	192″6	432	129°20′ 9″4	167″9	476	131°14′52″2	145″4
394.5	127.27.43.7	192.4	433	129.22.57.3	167.3	477	131.17.17.6	144.9
395.0	127.29.19.9	192.0	434	129.25.44.6	166.7	478	131.19.42.5	144.5
395.5	127.30.55.9	191.6	435	129.28.31.3	166.2	479	131.22. 7.0	144.0
396.0	127.32.31.7	191.0	436	129.31.17.5	165.6	480	131.24.31.4	143.6
396.5	127.34. 7.4	190.8	437	129.34. 3.1	165.0	481	131.26.54.6	143.2
397.0	127.35.42.8	190.6	438	129.36.48.1	164.5	482	131.29.17.8	142.7
397.5	127.37.18.1	190.2	439	129.39.32.6	163.9	483	131.31.40.5	142.2
398.0	127.38.53.2	189.8	440	129.42.16.5	163.4	484	131.34. 2.7	141.8
398.5	127.40.28.1	189.4	441	129.44.59.9	162.8	485	131.36.24.5	141.4
399.0	127.42. 2.8	189.2	442	129.47.42.7	162.3	486	131.38.45.9	141.0
399.5	127.43.37.4	188.8	443	129.50.25.0	161.7	487	131.41. 6.9	140.5
400	127.45.11.8	188.2	444	129.53. 6.7	161.2	488	131.43.27.4	140.1
401	127.48.20.0	187.6	445	129.55.47.9	160.6	489	131.45.47.5	139.7
402	127.51.27.6	186.8	446	129.58.28.5	160.1	490	131.48. 7.2	139.3
403	127.54.34.4	186.2	447	130. 1. 8.6	159.6	491	131.50.26.5	138.8
404	127.57.40.[illegible]	185.5	448	130. 3.48.2	159.1	492	131.52.45.3	138.5
405	128. 0.46.1	184.7	449	130. 6.27.3	158.5	493	131.55. 3.8	138.0
406	128. 3.50.8	184.2	450	130. 9. 5.8	158.0	494	131.57.21.8	137.5
407	128. 6.55.0	183.4	451	130.11.43.8	157.5	495	131.59.39.3	137.2
408	128. 9.58.4	182.8	452	130.14.21.3	157.[illegible]	496	132. 1.56.5	136.8
409	128.13. 1.2	182.1	453	130.16.58.3	156.4	497	132. 4.13.3	136.4
410	128.16. 3.3	181.4	454	130.19.34.7	156.0	498	132. 6.29.7	136.0
411	128.19. 4.7	180.8	455	130.22.10.7	155.4	499	132. 8.45.7	135.5
412	128.22. 5.5	180.2	456	130.24.46.1	155.0	500	132.11. 1.2	135.2
413	128.25. 5.7	179.5	457	130.27.21.1	154.4	501	132.13.16.4	134.7
414	128.28. 5.2	178.8	458	130.29.55.5	153.9	502	132.15.31.1	134.4
415	128.31. 4.0	178.2	459	130.32.29.4	153.5	503	132.17.45.5	134.0
416	128.34. 2.2	177.6	460	130.35. 2.9	152.9	504	132.19.59.5	133.6
417	128.36.59.8	176.9	461	130.37.35.8	152.5	505	132.22.13.1	133.2
418	128.39.56.7	176.3	462	130.40. 8.3	151.9	506	132.24.26.3	132.8
419	128.42.53.0	175.7	463	130.42.40.2	151.5	507	132.26.39.1	132.4
420	128.45.48.7	175.1	464	130.45.11.7	151.0	508	132.28.51.5	132.0
421	128.48.43.8	174.4	465	130.47.42.7	150.5	509	132.31. 3.5	131.7
422	128.51.38.2	173.8	466	130.50.13.2	150.0	510	132.33.15.2	131.2
423	128.54.32.0	173.3	467	130.52.43.2	149.6	511	132.35.26.4	130.9
424	128.57.25.3	172.6	468	130.55.12.8	149.0	512	132.37.37.3	130.5
425	129. 0.17.9	172.0	469	130.57.41.8	148.6	513	132.39.47.8	130.2
426	129. 3. 9.9	171.4	470	131. 0.10.4	148.1	514	132.41.58.0	129.7
427	129. 6. 1.3	170.8	471	131. 2.38.5	147.7	515	132.44. 7.7	129.4
428	129. 8.52.1	170.2	472	131. 5. 6.2	147.2	516	132.46.17.1	129.0
429	129.11.42.3	169.6	473	131. 7.33.4	146.7	517	132.48.26.1	128.7
430	129.14.31.9	169.0	474	131.10. 0.1	146.3	518	132.50.34.8	128.2
431	129.17.20.9	168.5	475	131.12.26.4	145.8	519	132.52.43.0	127.9
432	129.20. 9.4		476	131.14.52.2		520	132.54.50.9	

TABLE IV. Mouvement des Comètes dans la parabole.

Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.
520	132°54′50″9	127″6	564	134°23′ 2″9	113″2	608	135°41′39″4	101″4
521	132.56.58.5	127.2	565	134.24.56.1	112.9	609	135.43.20.8	101.1
522	132.59. 5.7	126.8	566	134.26.49.0	112.5	610	135.45. 1.9	100.8
523	133. 1.12.5	126.5	567	134.28.41.5	112.3	611	135.46.42.7	100.6
524	133. 3.19.0	126.1	568	134.30.33.8	112.[illegible]	612	135.48.23.3	100.3
525	133. 5.25.1	125.8	569	134.32.25.8	111.7	613	135.50. 3.6	100.1
526	133. 7.30.9	125.4	570	134.34.17.5	111.4	614	135.51.43.7	99.9
527	133. 9.36.3	125.0	571	134.36. 8.9	111.2	615	135.53.23.6	99.6
528	133.11.41.3	124.7	572	134.38. 0.1	110.8	616	135.55. 3.2	99.4
529	133.13.46.0	124.4	573	134.39.50.9	110.5	617	135.56.42.6	99.2
530	133.15.50.4	124.0	574	134.41.41.4	110.3	618	135.58.21.8	98.9
531	133.17.54.4	123.7	575	134.43.31.7	110.0	619	136. 0. 0.7	98.7
532	133.19.58.1	123.3	576	134.45.21.7	109.7	620	136. 1.39.4	98.5
533	133.22. 1.4	123.0	577	134.47.11.4	109.5	621	136. 3.17.9	98.2
534	133.24. 4.4	122.7	578	134.49. 0.9	109.1	622	136. 4.56.1	98.0
535	133.26. 7.1	122.3	579	134.50.50.0	108.8	623	136. 6.34.1	97.8
536	133.28. 9.4	121.9	580	134.52.38.8	108.6	624	136. 8.11.9	97.5
537	133.30.11.3	121.7	581	134.54.27.4	108.3	625	136. 9.49.4	97.3
538	133.32.13.0	121.3	582	134.56.15.7	108.1	626	136.11.26.7	97.1
539	133.34.14.3	121.0	583	134.58. 3.8	107.8	627	136.13. 3.8	96.9
540	133.36.15.3	120.6	584	134.59.51.6	107.5	628	136.14.40.7	96.6
541	133.38.15.9	120.3	585	135. 1.39.1	107.3	629	136.16.17.3	96.4
542	133.40.16.2	120.0	586	135. 3.26.4	107.0	630	136.17.53.7	96.2
543	133.42.16.2	119.7	587	135. 5.13.4	106.7	631	136.19.29.9	96.0
544	133.44.15.9	119.3	588	135. 7. 0.1	106.5	632	136.21. 5.9	95.7
545	133.46.15.2	119.0	589	135. 8.46.5	106.1	633	136.22.41.6	95.5
546	133.48.14.2	118.7	590	135.10.32.6	105.9	634	136.24.17.1	95.3
547	133.50.12.9	118.4	591	135.12.18.5	105.6	635	136.25.52.4	95.1
548	133.52.11.3	118.1	592	135.14. 4.1	105.4	636	136.27.27.5	94.8
549	133.54. 9.4	117.7	593	135.15.49.5	105.1	637	136.29. 2.3	94.6
550	133.56. 7.1	117.5	594	135.17.34.6	104.9	638	136.30.37.0	94.4
551	133.58. 4.6	117.1	595	135.19.19.5	104.6	639	136.32.11.4	94.2
552	134. 0. 1.7	116.8	596	135.21. 4.1	104.3	640	136.33.45.6	94.0
553	134. 1.58.5	116.4	597	135.22.48.4	104.1	641	136.35.19.6	93.8
554	134. 3.54.9	116.2	598	135.24.32.5	103.8	642	136.36.53.4	93.5
555	134. 5.51.1	115.9	599	135.26.16.3	103.6	643	36.38.26.9	93.4
556	134. 7.47.0	115.5	600	135.27.59.9	103.3	644	136.40. 0.3	93.1
557	134. 9.42.5	115.3	601	135.29.43.2	103.1	645	136.41.33.4	92.9
558	134.11.37.8	114.9	602	135.31.26.3	102.8	646	136.43. 6.3	92.7
559	134.13.32.7	114.7	603	135.33. 9.1	102.6	647	136.44.39.0	92.5
560	134.15.27.4	114.3	604	135.34.51.7	102.3	648	136.46.11.5	92.3
561	134.17.21.7	114.1	605	135.36.34.0	102.0	649	136.47.43.8	92.1
562	134.19.15.8	113.7	606	135.38.16.0	101.8	650	136.49.15.9	91.9
563	134.21. 9.5	113.4	607	135.39.57.8	101.6	651	136.50.47.8	91.7
564	134.23. 2.9		608	135.41.39.4		652	136.52.19.5	

TABLE IV. Mouvement des Comètes dans la parabole.

Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.
652	136°52′19″5	91″4	696	137°56′19″9	83″1	800.0	140° 6′34″7	67″76
653	136.53.50.9	91.3	697	137.57.43.0	83.0	802.5	140. 9.24.1	67.48
654	136.55.22.2	91.0	698	137.59. 6.0	82.8	805.0	140.12.12.8	67.20
655	136.56.53.2	90.9	699	138. 0.28.8	82.6	807.5	140.15. 0.8	66.88
656	136.58.24.1	90.6	700.0	138. 1.51.4	82.32	810.0	140.17.48.0	66.56
657	136.59.54.7	90.5	702.5	138. 5.17.2	81.88	812.5	140.20.34.4	66.28
658	137. 1.25.2	90.2	705.0	138. 8.41.9	81.48	815.0	140.23.20.1	66.00
659	137. 2.55.4	90.1	707.5	138.12. 5.6	81.04	817.5	140.26. 5.1	65.72
660	137. 4.25.5	89.8	710.0	138.15.28.2	80.64	820.0	140.28.49.4	65.40
661	137. 5.55.3	89.7	712.5	138.18.49.8	80.20	822.5	140.31.32.9	65.12
662	137. 7.25.0	89.4	715.0	138.22.10.3	79.80	825.0	140.34.15.7	64.84
663	137. 8.54.4	89.3	717.5	138.25.29 8	79.44	827.5	140.36.57.8	64.56
664	137.10.23.7	89.0	720.0	138.28.48.4	79.00	830.0	140.39.39.2	64.24
665	137.11.52.7	88.9	722.5	138.32. 5.9	78.60	832.5	140.42.19.8	64.00
666	137.13.21.6	88.6	725.0	138.35.22.4	78.20	835.0	140.44.59.8	63.72
667	137.14.50.2	88.5	727.5	138.38.37.9	77.84	837.5	140.47.39.1	63.44
668	137.16.18.7	88.3	730.0	138.41.52.5	77.44	840.0	140.50.17.7	63.16
669	137.17.47.0	88.1	732.5	138.45. 6.1	77.04	842.5	140.52.55.6	62.88
670	137.19.15.1	87.9	735.0	138.48.18.7	76.64	845 0	140.55.32.8	62.64
671	137.20.43.0	87.7	737.5	138.51.30.3	76.32	847.5	140.58. 9.4	62.36
672	137.22.10.7	87.5	740.0	138.54.41.1	75.92	850.0	141. 0.45.3	62.08
673	137.23.38.2	87.3	742.5	138.57.50.9	75.52	852.5	141. 3.20.5	61.84
674	137.25. 5.5	87.1	745.0	139. 0.59.7	75.20	855.0	141. 5.55.1	61.56
675	137.26.32.6	87.0	747.5	139. 4. 7.7	74.80	857.5	141. 8.29.0	61.32
676	137.27.59.6	86.7	750.0	139. 7.14.7	74.48	860.0	141.11. 2.3	61.04
677	137.29.26.3	86.6	752.5	139.10.20.9	74.08	862.5	141.13.34.9	60.80
678	157.30.52.9	86.4	755.0	139.13.26.1	73.72	865.0	141.16. 6.9	60.56
679	137.32.19.3	86.2	757.5	139.16.30.4	73.40	867.5	141.18.38.3	60.28
680	137.33.45.5	86.0	760.0	139.19.33.9	73.00	870.0	141.21. 9.0	60.04
681	137.35.11.5	85.8	762.5	139.22.36.4	72.68	872.5	141.23.39.1	59.80
682	137.36.37.3	85.6	765.0	139.25.38.1	72.36	875.0	141.26. 8.6	59.52
683	137.38. 2.9	85.5	767.5	139.28.39.0	72.00	877.5	141.28.37.4	59.32
684	137.39.28.4	85.3	770.0	139.31.39.0	71.64	880.0	141.31. 5.7	59.04
685	137.40.53.7	85.1	772.5	139.34.38.1	71.32	882.5	141.33.33.3	58.84
686	137.42.18.8	84.9	775.0	139.37.36.4	71.00	885.0	141.36. 0.4	58.56
687	137.43.43.7	84.7	777.5	139.40.33.9	70.64	887.5	141.38.26.8	58.36
688	137.45. 8.4	84.6	780.0	139.43.30.5	70.36	890.0	141.40.52.7	58.08
689	137.46.33.0	84.3	782.5	139.46.26.4	70. 0	892.5	141.43.17.9	57.88
690	137.47.57.3	84.2	785.0	139.49.21.4	69.68	895.0	141.45.42.6	57.60
691	137.49.21.5	84.1	787.5	139.52.15.6	69.36	897.5	141.48. 6.6	57.44
692	137.50.45.6	83.8	790.0	139.55. 9.0	69.04	900.0	141.50.30.2	57.16
693	137.52. 9.4	83.7	792.5	139.58. 1.6	68.72	902.5	141.52 53.1	56.92
694	137.53.33.1	83.5	795.0	140. 0.53.4	68.40	905.0	141.55.15.4	56.68
695	137.54.56.6	83.3	797.5	140. 3.44.4	68.12	907.5	141.57.37.1	56.52
696	137.56.19.9		800.0	140. 6.34.7		910.0	141.59.58.4	

TABLE IV. Mouvement des Comètes dans la parabole.

Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.
910.0	141°59′58″4	56″28	1020.0	143°35′ 7″6	47″76	1130.0	144°56′33″8	41″24
912.5	142. 2.19.1	56.04	1022.5	143.37. 7.0	47.56	1132.5	144.58.16.9	41.08
915.0	142. 4.39.2	55.80	1025.0	143.39. 5.9	47.40	1135.0	144.59.59.6	40.96
917.5	142. 6.58.7	55.60	1027.5	143.41. 4.4	47.24	1137.5	145. 1.42.0	40.84
920.0	142. 9.17.7	55.40	1030.0	143.43. 2.5	47.08	1140.0	145. 3.24.1	40.72
922.5	142.11.36.2	55.16	1032.5	143.45. 0.2	46.92	1142.5	145. 5. 5.9	40.56
925.0	142.13.54.1	54.96	1035.0	143.46.57.5	46.76	1145.0	145. 6.47.3	40.48
927.5	142.16.11.5	54.76	1037.5	143.48.54.4	46.60	1147.5	145. 8.28.5	40.32
930.0	142.18.28.4	54.52	1040.0	143.50.50.9	46.44	1150.0	145.10. 9.3	40.20
932.5	142.20.44.7	54.32	1042.5	143.52.47.0	46.24	1152.5	145.11.49.8	40.08
935.0	142.23. 0.5	54.12	1045.0	143.54.42.6	46.12	1155.0	145.13.30.0	39.92
937.5	142.25.15.8	53.92	1047.5	143.56.37.9	45.96	1157 5	145.15. 9.8	39.84
940.0	142.27.30.6	53.68	1050.0	143.58.32.8	45.80	1160.0	145.16.49.4	39.72
942.5	142.29.44.8	53.48	1052.5	144. 0.27.3	45.6	1162.5	145.18.28.7	39.60
945.0	142.31.58.5	53.28	1055.0	144. 2.21.4	45.48	1165.0	145.20. 7.7	39.44
947.5	142.34.11.7	53.08	1057.5	144. 4.15.1	45.36	1167.5	145.21.46.3	39.36
950.0	142.36.24.4	52.88	1060.0	144. 6. 8.5	45.16	1170.0	145.23.24.7	39.24
952.5	142.38.36.6	52.68	1062.5	144. 8. 1.4	45.04	1172.5	145.25. 2.8	39.08
955.0	142.40.48.3	52.52	1065.0	144. 9.54.0	44.88	1175.0	145.26 40.5	39.00
957.5	142.42.59.6	52.28	1067.5	144.11.46.2	44.72	1177.5	145.28.18 0	38.84
960.0	142.45.10.5	52.08	1070.0	144.13.38.0	44.56	1180.0	145.29.55.1	38.76
962.5	142.47.20.5	51.92	1072.5	144.15.29.4	44.44	1182.5	145.31.32.0	38.64
965.0	142.49.30.3	51.72	1075.0	144.17 20.5	44.28	1185.0	145.33. 8.6	38.52
967.5	142.51.39.6	51.48	1077.5	144.19.11.2	44.12	1187.5	145.34.44.9	38.40
970.0	142.53.48.3	51.32	1080.0	144.21. 1.5	44.00	1190.0	145.36.20.9	38.28
972.5	142.55.56.6	51.16	1082.5	144.22.51.5	43.80	1192.5	145.37.56.6	38.16
975.0	142.58. 4.5	50.92	1085.0	144.24.41.0	43.68	1195.0	145.39.32.0	38.08
977.5	143. 0.11.8	50.76	1087.5	144.26.30.2	43.56	1197.5	145.41. 7.2	37.96
980.0	143. 2.18.7	50.60	1090.0	144.28.19.1	43.40	1200.0	145.42.42.1	37.76
982.5	143. 4.25.2	50.36	1092.5	144.30. 7.6	43.28	1205.0	145.45.50.9	37.56
985.0	143. 6.31.1	50.20	1095.0	144.31.55.8	43.12	1210	145.48.58.7	37.32
987.5	143. 8.36.6	50.04	1097.5	144.33.43.6	42.96	1215	145.52 5.3	37.12
990.0	143.10.41.7	49.84	1100.0	144.35.31.0	42.84	1220	145.55.10.9	36.90
992.5	143.12.45.3	49.64	1102.5	144.37.18.1	42.72	1225	145.58.15.4	36.68
995.0	143.14.50.4	49.48	1105.0	144.39. 4.9	42.56	1230	146. 1.18.8	36.46
997.5	143.16.54.1	49.32	1107.5	144.40.51.3	42.44	1235	146. 4.21.1	36.26
10.0.0	143.18.57.4	49.12	1110.0	144.42.37.4	42.28	1240	146. 7.22.4	36.06
1002.5	143.21. 0.2	48.92	1112.5	144.44.23.1	42.16	1245	146.10.22.7	35.84
1005.0	143.23. 2.5	48.80	1115.0	144.46. 8.5	42.00	1250	146.13 21.9	35.64
1007.5	143.25. 4.5	48.60	1117.5	144.47.53.5	41.84	1255	146.16.20.1	35.44
1010.0	143.27 6.0	48.40	1120.0	144.49.38.1	41.80	1260	146.19.17.3	35.24
1012.5	143.29. 7.0	48.24	1122.5	144.51.22.6	41.64	1265	146.22.13.5	35.04
1015.0	143.31. 7.6	48.08	1125.0	144.53. 6.7	41.48	1270	146.25. 8.7	34.84
1017.5	143.33. 7.8	47.92	1127.5	144.54.50.4	41.36	1275	145.28. 2.9	34.64
1020.0	143.35. 7.6		1130.0	144.56.33.8		1280	146.30.56.1	

TABLE IV. Mouvement des Comètes dans la parabole.

Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.
1280	146°30′56″1	34″46	1500	148°24′ 0″8	27″52	1720	149°55′44″6	22″68
1285	146.33.48.4	34.28	1505	148.26.18.4	27.38	1725	149.57.38.0	22.58
1290	146.36.39.8	34.08	1510	148.28.35.3	27.26	1730	149.59.30.9	22.50
1295	146.39.30.2	33.88	1515	148.30.51.6	27.14	1735	150. 1.23.4	22.40
1300	146.42.19.6	33.70	1520	148.33. 7.3	27.00	1740	150. 3.15.4	22.32
1305	146.45. 8.1	33.52	1525	148.35.22.3	26.88	1745	150. 5. 7.0	22.22
1310	146.47.55.7	33.34	1530	148.37.36.7	26.76	1750	150. 6.58.1	22.12
1315	146.50.42.4	33.16	1535	148.39.50.5	26.62	1755	150. 8.48.7	22.04
1320	146.53.28.2	32.98	1540	148.42. 3.6	26.52	1760	150.10.38.9	21.96
1325	146.56.13.1	32.82	1545	148.44.16.2	26.38	1765	150.12.28.7	21.88
1330	146.58.57.2	32.62	1550	148.46.28.1	26.26	1770	150.14.18.1	21.78
1335	147. 1.40.3	32.46	1555	148.48.39.4	26.16	1775	150.16. 7.0	21.70
1340	147. 4.22.6	32.28	1560	148.50.50.2	26.02	1780	150.17.55.5	21.60
1345	147. 7. 4.0	32.12	1565	148.53. 0.3	25.92	1785	150.19.43.5	21.54
1350	147. 9.44.6	31.94	1570	148.55. 9.9	25.78	1790	150.21.31.2	21.44
1355	147.12.24.3	31.78	1575	148.57.18.8	25.70	1795	150.23.18.4	21.35
1360	147.15. 3.2	31.62	1580	148.59.27.3	25.56	1800	150.25. 5.2	21.23
1365	147.17.41.3	31.44	1585	149. 1.35.1	25.44	1810	150.28.37.5	21.06
1370	147.20.18.5	31.30	1590	149. 3.42.3	25.34	1820	150.32. 8.1	20.91
1375	147.22.55.0	31.12	1595	149. 5.49.0	25.24	1830	150.35.37.2	20.74
1380	147.25.30.6	30.96	1600	149. 7.55.2	25.10	1840	150.39. 4.6	20.59
1385	147.28. 5.4	30.82	1605	149.10. 0.7	25.00	1850	150.42.30.5	20.43
1390	147.30.39.5	30.64	1610	149.12. 5.7	24.90	1860	150.45.54.8	20.28
1395	147.33.12.7	30.50	1615	149.14.10.2	24.80	1870	150.49.17.6	20.12
1400	147.35.45.2	30.34	1620	149.16.14.2	24.68	1880	150.52.38.8	19.98
1405	147.38.16.9	30.18	1625	149.18.17.6	24.56	1890	150.55.58.6	19.82
1410	147.40.47.8	30.02	1630	149.20.20.4	24.46	1900	150.59.16.8	19.68
1415	147.43.17.9	29.90	1635	149.22.22.7	24.36	1910	151. 2.33.6	19.54
1420	147.45.47.4	29.72	1640	149.24.24.5	24.26	1920	151. 5.49.0	19.39
1425	147.48.16.0	29.60	1645	149.26.25.8	24.14	1930	151. 9. 2.9	19.25
1430	147.50.44.0	29.44	1650	149.28.26.5	24.06	1940	151.12.15.4	19.11
1435	147.53.11.2	29.30	1655	149.30.26.8	23.94	1950	151.15.26.5	18.98
1440	147.55.37.7	29.14	1660	149.32.26.5	23.84	1960	151.18.36.3	18.84
1445	147.58. 3.4	29.00	1665	149.34.25.7	23.74	1970	151.21.44.7	18.71
1450	148. 0.28.4	28.88	1670	149.36.24.4	23.64	1980	151.24.51.8	18.57
1455	148. 2.52.8	28.72	1675	149.38.22.6	23.54	1990	151.27.57.5	18.45
1460	148. 5.16.4	28.58	1680	149.40.20.3	23.46	2000	151.31. 2.0	18.31
1465	148. 7.39.3	28.46	1685	149.42.17.6	23.34	2010	151.34. 5.1	18.19
1470	148.10. 1.6	28.30	1690	149.44.14.3	23.24	2020	151.37. 7.0	18.06
1475	148.12.23.1	28.18	1695	149.46.10.5	23.16	2030	151.40. 7.6	17.93
1480	148.14.44.0	28.04	1700	149.48. 6.3	23.06	2040	151.43. 6.9	17.82
1485	148.17. 4.2	27.92	1705	149.50. 1.6	22.96	2050	151.46. 5.1	17.69
1490	148.19.23.8	27.76	1710	149.51.56.4	22.86	2060	151.49. 2.0	17.58
1495	148.21.42.6	27.64	1715	149.53.50.7	22.78	2070	151.51.57.8	17.45
1500	148.24. 0.8		1720	149.55.44.6		2080	151.54.52.3	

TABLE IV. Mouvement des Comètes dans la parabole.

Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.
2080	151°54′52″3	17″34	2520	153°46′15″3	13″26	2960	155°13′22″0	10″60
2090	151.57.45.7	17.22	2530	153.48.27.9	13.19	2970	155.15. 8.0	10.56
2100	152. 0.37.9	17.10	2540	153.50.39.8	13.12	2980	155.16.53.6	10.51
2110	152. 3.28.9	16.99	2550	153.52.51.0	13.04	2990	155.18.38.7	10.45
2120	152. 6.18.8	16.89	2560	153.55. 1.4	12.97	3000.0	155.20.23.2	10.41
2130	152. 9. 7.7	16.77	2570	153.57.11.1	12.91	3012.5	155.22.33.3	10.34
2140	152.11.55.4	16.66	2580	153.59.20.2	12.84	3025.0	155.24.42.6	10.29
2150	152.14.42.0	16.55	2590	154. 1.28.6	12.77	3037.5	155.26.51.2	10.22
2160	152.17.27.5	16.44	2600	154. 3.36.3	12.70	3050.0	155.28.59.0	10.17
2170	152.20.11.9	16.34	2610	154. 5.43.3	12.6	3062.5	155.31. 6.1	10.11
2180	152.22.55.3	16.24	2620	154. 7.49.6	12.56	3075.0	155.33.12.5	10.06
2190	152.25.37.7	16.13	2630	154. 9.55.2	12.50	3087.5	155.35.18.2	10.00
2200	152.28.19.0	16.03	2640	154.12. 0.2	12.43	3100.0	155.37.23.2	9.94
2210	152.30.59.3	15.92	2650	154.14. 4.5	12.37	3112.5	155.39.27.5	9.89
2220	152.33.38.5	15.83	2660	154.16. 8.2	12.30	3125.0	155.41.31.1	9.83
2230	152.36.16.8	15.73	2670	154.18.11.2	12.24	3137.5	155.43.34.0	9.78
2240	152.38.54.1	15.63	2680	154.20.13.6	12.17	3150.0	155.45.36.2	9.72
2250	152.41.30.4	15.53	2690	154.22.15.3	12.11	3162.5	155.47.37.7	9.67
2260	152.44. 5.7	15.44	2700	154.24.16.4	12.05	3175.0	155.49.38.6	9.62
2270	152.46.40.1	15.34	2710	154.26.16.9	11.99	3187.5	155.51.38.9	9.57
2280	152.49.13.5	15.25	2720	154.28.16.8	11.93	3200.0	155.53.38.5	9.51
2290	152.51.46.0	15.15	2730	154.30.16.1	11.86	3212.5	155.55.37.4	9.46
2300	152.54.17.5	15.06	2740	154.32.14.7	11.81	3225.0	155.57.35.7	9.42
2310	152.56.48.1	14.97	2750	154.34.12.8	11.75	3237.5	155.59.33.4	9.36
2320	152.59.17.8	14.89	2760	154.36.10.3	11.68	3250.0	156. 1.30.4	9.312
2330	153. 1.46.7	14.80	2770	154.38. 7.1	11.63	3262.5	156. 3.26.8	9.264
2340	153. 4.14.7	14.71	2780	154.40. 3.4	11.57	3275.0	156. 5.22.6	9.216
2350	153. 6.41.8	14.62	2790	154.41.59.1	11.51	3287.5	156. 7.17.8	9.168
2360	153. 9. 8.0	14.53	2800	154.43.54.2	11.46	3300.0	156. 9.12.4	9.120
2370	153.11.33.3	14.44	2810	154.45.48.8	11.40	3312.5	156.11. 6.4	9.064
2380	153.13.57.7	14.36	2820	154.47.42.8	11.34	3325.0	156.12.59.7	9.024
2390	153.16.21.3	14.28	2830	154.49.36.2	11.29	3337.5	156.14.52.5	8.976
2400	153.18.44.1	14.20	2840	154.51.29.1	11.23	3350.0	156.16.44.7	8.936
2410	153.21. 6.1	14.12	2850	154.53.21.4	11.18	3362.5	156.18.36.4	8.880
2420	153.23.27.3	14.03	2860	154.55.13.2	11.13	3375.0	156.20.27.4	8.840
2430	153.25.47.6	13.95	2870	154.57. 4.5	11.07	3387.5	156.22.17.9	8.800
2440	153.28. 7.1	13.87	2880	154.58.55.2	11.01	3400.0	156.24. 7.9	8.752
2450	153.30.25.8	13.79	2890	155. 0.45.3	10.97	3412.5	156.25.57.3	8.704
2460	153.32.43.7	13.72	2900	155. 2.35.0	10.91	3425.0	156.27.46.1	8.656
2470	153.35. 0.9	13.64	2910	155. 4.24.1	10.86	3437.5	156.29.34.3	8.616
2480	153.37.17.3	13.56	2920	155. 6.12.7	10.80	3450.0	156.31.22.0	8.576
2490	153.39.32.9	13.49	2930	155. 8. 0.7	10.76	3462.5	156.33. 9.2	8.536
2500	153.41.47.8	13.41	2940	155. 9.48.3	10.71	3475.0	156.34.55.9	8.488
2510	153.44. 1.9	13.34	2950	155.11.35.4	10.66	3487.5	156.36.42.0	8.448
2520	153.46.15.3		2960	155.13.22.0		3500.0	156.38.27.6	

TABLE

TABLE IV. Mouvement des Comètes dans la parabole.

Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.
3500.0	156°38′27″6	8″408	4100	157°53′56″3	6″744	5200	159°39′ 9″5	4″868
3512.5	156.40.12.7	8.368	4125	157.56.44.9	6.688	5225	159.41.11.2	4.836
3525.0	156.41.57.3	8.320	4150	157.59.32.1	6.632	5250	159.43.12.1	4.804
3537.5	156.43.41.3	8.288	4175	158. 2.17.9	6.580	5275	159.45.12.2	4.776
3550.0	156.45.24.9	8.240	4200	158. 5. 2.4	6.524	5300	159.47.11.6	4.744
3562.5	156.47. 7.9	8.200	4225	158. 7.45.5	6.472	5325	159.49.10.2	4.712
3575.0	156.48.50.4	8.168	4250	158.10.27.3	6.420	5350	159.51. 8.0	4.680
3587.5	156.50.32.5	8.120	4275	158.13. 7.8	6.368	5375	159.53. 5.0	4.652
3600.0	156.52.14.0	8.088	4300	158.15.47.0	6.316	5400	159.55. 1.3	4.624
3612.5	156.53.55.1	8.048	4325	158.18.24.9	6.268	5425	159.56.56.9	4.596
3625.0	156.55.35.7	8.008	4350	158.21. 1.6	6.220	5450	159.58.51.8	4.564
3637.5	156.57.15.8	7.968	4375	158.23.37.1	6.168	5475	160. 0.45.9	4.536
3650.0	156.58.55.4	7.936	4400	158.26.11.3	6.120	5500	160. 2.39.3	4.508
3662.5	157. 0.34.6	7.896	4425	158.28.44.3	6.076	5525	160. 4.32.0	4.480
3675.0	157. 2.13.3	7.856	4450	158.31.16.2	6.028	5550	160. 6.24.0	4.452
3687.5	157. 3.51.5	7.824	4475	158.33.46.9	5.980	5575	160. 8.15.3	4.428
3700.0	157. 5.29.3	7.784	4500	158.36.16.4	5.932	5600	160.10. 6.0	4.400
3712.5	157. 7. 6.6	7.752	4525	158.38.44.7	5.892	5625	160.11.56.0	4.372
3725.0	157. 8.43.5	7.712	4550	158.41.12.0	5.844	5650	160.13.45.3	4.344
3737.5	157.10.19.9	7.680	4575	158.43.38.1	5.804	5675	160.15.33.9	4.320
3750.0	157.11.55.9	7.648	4600	158.46. 3.2	5.760	5700	160.17.21.9	4.296
3762.5	157.13.31.5	7.608	4625	158.48.27.2	5.716	5725	160.19. 9.3	4.268
3775.0	157.15. 6.6	7.568	4650	158.50.50.1	5.672	5750	160.20.56.0	4.240
3787.5	157.16.41.2	7.536	4675	158 53.11.9	5.632	5775	160.22.42.0	4.220
3800.0	157.18.15.4	7.504	4700	158.55.32.7	5.592	5800	160.24.27.5	4.192
3812.5	157.19.49.2	7.472	4725	158.57.52.5	5.552	5825	160.26.12.3	4.168
3825.0	157.21.22.6	7.440	4750	159. 0.11.3	5.512	5850	160.27.56.5	4.144
3837.5	157.22.55.6	7.408	4775	159. 2.29.1	5.572	5875	160.29.40.1	4.120
3850.0	157.24.28.2	7.368	4800	159. 4.45.9	5.432	5900	160.31.23.1	4.096
3862.5	157.26. 0.3	7.336	4825	159. 7. 1.7	5.392	5925	160.33. 5.5	4.072
3875.0	157.27.32.0	7.304	4850	159. 9.16.5	5.356	5950	160.34.47.3	4.052
3887.5	157.29. 3.3	7.280	4875	159.11.30.4	5.320	5975	160.36.28.6	4.024
3900.0	157.30.34.3	7.240	4900	159.13.43.4	5.280	6000	160.38. 9.2	4.004
3912.5	157.32. 4.8	7.208	4925	159.15.55.4	5.244	6025	160.39.49.3	3.980
3925.0	157.33.34.9	7.176	4950	159.18. 6.5	5.208	6050	160.41.28.8	3.960
3937.5	157.35. 4.6	7.144	4975	159.20.16.7	5.172	6075	160.43. 7.8	3.936
3950.0	157.36.33.9	7.112	5000	159.22.26.0	5.136	6100	160.44.46.2	3.912
3962.5	157.38. 2.8	7.088	5025	159.24.34.4	5.104	6125	160.46.24.0	3.892
3975.0	157.39.31.4	7.048	5050	159.26.42.0	5.068	6150	160.48. 1.3	3.872
3987.5	157.40.59.5	7.024	5075	159.28.48.7	5.032	6175	160.49.38.1	3.848
4000	157.42.27.3	6.980	5100	159.30.54.5	5.000	6200	160.51.14.3	3.828
4025	157.45.21.8	6.916	5125	159.32.59.5	4.968	6225	160.52.50.0	3.808
4050	157.48.14.7	6.860	5150	159.35. 3.7	4.932	6250	160.54.25.2	3.784
4075	157.51. 6.2	6.804	5175	159.37. 7.0	4.900	6275	160.55 59.8	3.768
4100	157.53.56.3		5200	159.39. 9.5		6300	160.57.34.0	

TABLE IV. Mouvement des Comètes dans la parabole.

Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.
6300	160°57′34″0	3″744	7800	162°18′34″1	2″793	10000	163°45′13″4	1″993
6325	160.59. 7.6	3.724	7850	162.20.53.7	2.770	10050	163.46.53.0	1.980
6350	161. 0.40.7	3.704	7900	162.23.12.2	2.746	10100	163.48.32.0	1.968
6375	161. 2.13.3	3.688	7950	162.25.29.4	2.722	10150	163.50.10.4	1.954
6400	161. 3.45.5	3.664	8000	162.27.45.5	2.698	10200	163.51.48.1	1.940
6425	161. 5.17.1	3.648	8050	162.30. 0.4	2.676	10250	163.53.25.1	1.927
6450	161. 6.48.3	3.624	8100	162.32.14.2	2.654	10300	163.55. 1.5	1.914
6475	161. 8.18.9	3.608	8150	162.34.26.9	2.632	10350	163.56.37.2	1.902
6500	161. 9.49.1	3.588	8200	162.36.38.5	2.610	10400	163.58.12.4	1.890
6525	161.11.18.8	3.572	8250	162.38.49.0	2.588	10450	163.59.46.9	1.878
6550	161.12.48.1	3.552	8300	162.40.58.4	2.566	10500	164. 1.20.8	1.866
6575	161.14.16.9	3.532	8350	162.43. 6.7	2.545	10550	164. 2.54.1	1.854
6600	161.15.45.2	3.516	8400	162.45.14.0	2.524	10600	164. 4.26.8	1.842
6625	161.17.13.1	3.496	8450	162.47.20.5	2.503	10650	164. 5.58.9	1.830
6650	161.18.40.5	3.480	8500	162.49.25.6	2.484	10700	164. 7.30.4	1.819
6675	161.20. 7.5	3.460	8550	162.51.29.8	2.466	10750	164. 9. 1.4	1.808
6700	161.21.34.0	3.444	8600	162.53.33.1	2.446	10800	164.10.31.7	1.797
6725	161.23. 0.1	3.424	8650	162.55.35.4	2.428	10850	164.12. 1.5	1.786
6750	161.24.25.7	3.408	8700	162.57.36.8	2.408	10900	164.13.30.8	1.774
6775	161.25.50.9	3.392	8750	162.59.37.2	2.390	10950	164.14.59.5	1.762
6800	161.27.15.7	3.376	8800	163. 1.36.6	2.372	11000	164.16.27.6	1.752
6825	161.28.40.1	3.356	8850	163. 3.35.2	2.354	11050	164.17.55.2	1.741
6850	161.30. 4.0	3.344	8900	163. 5.32.8	2.334	11100	164.19.22.3	1.730
6875	161.31.27.6	3.324	8950	163. 7.29.6	2.518	11150	164.20.48.8	1.720
6900	161.32.50.7	3.308	9000	163. 9.25.4	2.300	11200	164.22.14.8	1.710
6925	161.34.13.4	3.292	9050	163.11.20.4	2.282	11250	164.23.40.5	1.700
6950	161.35.35.7	3.276	9100	163.13.14.5	2.266	11300	164.25. 5.3	1.690
6975	161.36.57.6	3.256	9150	163.15. 7.8	2.250	11350	164.26.29.7	1.680
7000	161.38.19.0	3.236	9200	163.17. 0.3	2.232	11400	164.27.53.7	1.670
7050	161.41. 0.8	3.206	9250	163.18.51.9	2.216	11450	164.29.17.2	1.660
7100	161.43.41.1	3.174	9300	163.20.42.7	2.200	11500	164.30.40.1	1.650
7150	161.46.19.8	3.142	9350	163.22.32.7	2.184	11550	164.32. 2.6	1.640
7200	161.48.56.9	3.114	9400	163.24.21.8	2.168	11600	164.33.24.6	1.630
7250	161.51.32.6	3.086	9450	163.26.10.2	2.154	11650	164.34.46.1	1.621
7300	161.54. 6.9	3.056	9500	163.27.57.9	2.137	11700	164.36. 7.2	1.612
7350	161.56.39.7	3.028	9550	163.29.44.7	2.122	11750	164.37.27.8	1.602
7400	161.59.11.1	3.000	9600	163.31.30.8	2.107	11800	164.38.47.9	1.592
7450	162. 1.41.1	2.974	9650	163.33.16.2	2.092	11850	164.40. 7.5	1.584
7500	162. 4. 9.8	2.946	9700	163.35. 0.8	2.076	11900	164.41.26.7	1.576
7550	162. 6.37.1	2.920	9750	163.36.44.6	2.060	11950	164.42.45.6	1.564
7600	162. 9. 3.0	2.894	9800	163.38.27.8	2.048	12000	164.44. 3.8	1.552
7650	162.11.27.7	2.868	9850	163.40.10.2	2.034	12100	164.46.39.1	1.536
7700	162.13.51.1	2.842	9900	163.41.52.0	2.020	12200	164.49.12.7	1.519
7750	162.16.13.2	2.817	9950	163.43.33.0	2.006	12300	164.51.44.6	1.502
7800	162.18.34.1		10000	163.45.13.4		12400	164.54.14.8	

TABLE IV. Mouvement des Comètes dans la parabole.

Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.
12400	164°54′ 14″[illegible]		16800	166°23′ 8″5		21200	167°25′ 5″3	
12500	164.56.43.4	1″486	16900	166.24.47.1	0″986	21300	167.26.17.4	0″721
12700	164.59.10.3	1.469	17000	166.26.25.0	0.979	21400	167.27.29.1	0.717
12600	165. 1.35.7	1.454	17100	166.28. 2.1	0.971	21500	167.28.40.3	0.712
12800	165. 3.59.6	1.439	17200	166.29.38.4	0.963	21600	167.29.51.1	0.708
12900	165. 6.21.9	1.423	17300	166.31.14.0	0.956	21700	167.31. 1.4	0.703
13000	165. 8.42.8	1.409	17400	166.32.48.8	0.948	21800	167.32.11.3	0.699
13100	165.11. 2.2	1.394	17500	166.34.22.9	0.941	21900	167.33.20.7	0.694
13200	165.13.20.2	1.380	17600	166.35.56.3	0.934	22000	167.34.29.7	0.690
13300	165.15.36.7	1.365	17700	166.37.29.0	0.927	22100	167.35.38.3	0.686
13400	165.17.51.9	1.352	17800	166.39. 0.9	0.919	22200	167.36.46.5	0.682
13500	165.20. 5.7	1.338	17900	166.40.32.2	0.913	22300	167.37.54.3	0.678
13600	165.22.18.[illegible]	1.325	18000	166.42. 2.8	0.906	22400	167.39. 1.7	0.674
13700	165.24.29.4	1.312	18100	166.43.32.6	0.898	22500	167.40. 8.6	0.670
13800	165.26.39.2	1.298	18200	166.45. 1.8	0.892	22600	167.41.15.2	0.666
13900	165.28.47.8	1.286	18300	166.46.30.4	0.886	22700	167.42.21.4	0.662
14000	165.30.55.2	1.274	18400	166.47.58.3	0.879	22800	167.43.27.1	0.657
14100	165.33. 1.3	1.261	18500	166.49.25.6	0.873	22900	167.44.32.5	0.654
14200	165.35. 6.3	1.250	18600	166.50.52.2	0.866	23000	167.45.37.5	0.650
14300	165.37.10.[illegible]	1.237	18700	166.52.18.2	0.860	23100	167.46.42.1	0.646
14400	165.39.12.6	1.226	18800	166.53.43.6	0.853	23200	167.47.46.4	0.643
14500	165.41.14.[illegible]	1.214	18900	166.55. 8.5	0.847	23300	167.48.50.5	0.639
14600	165.43.14.3	1.203	19000	166.56.32.5	0.842	23400	167.49.53.8	0.635
14700	165.45.13.5	1.192	19100	166.57.56.0	0.835	23500	167.50.56.9	0.631
14800	165.47.11.6	1.181	19200	166.59.19.0	0.830	23600	167.51.59.7	0.628
14900	165.49. 8.6	1.170	19300	167. 0.41.4	0.824	23700	167.53. 2.1	0.624
15000	165.51. 4.6	1.160	19400	167. 2. 3.2	0.818	23800	167.54. 4.2	0.621
15100	165.52.5[illegible].5	1.149	19500	167. 3.24.5	0.813	23900	167.55. 5.9	0.617
15200	165.54.5[illegible].4	1.139	19600	167. 4.45.2	0.807	24000	167.56. 7.[illegible]	0.61[illegible]
15300	165.56.46.3	1.129	19700	167. 6. 5.3	0.801	24200	167.58. 9.[illegible]	0.609
15400	165.58.38.[illegible]	1.119	19800	167. 7.24.9	0.796	24400	167. 0. 9.[illegible]	0.602
15500	166. 0.29.2	1.110	19900	167. 8.43.9	0.790	24600	168. 2. 8.4	0.595
15600	166. 2.19.1	1.099	20000	167.10. 2.4	0.785	24800	168. 4. 6.2	0.589
15700	166. 4. 8.1	1.090	20100	167.11.20.4	0.780	25000	168. 6. 2.7	0.583
15800	166. 5.56.2	1.081	20200	167.12.37.9	0.775	25200	168. 7.57.9	0.576
15900	166. 7.43.4	1.072	20300	167.13.54.9	0.770	25400	168. 9.51.9	0.570
16000	166. 9.29.6	1.062	20400	167.15.11.3	0.765	25600	168.11.44.7	0.564
16100	166.11.15.0	1.054	20500	167.16.27.3	0.760	25800	168.13.36.4	0.558
16200	166.12.59.5	1.045	20600	167.17.42.8	0.755	26000	168.15.26.9	0.552
16300	166.14.43.1	1.036	20700	167.18.57.7	0.749	26200	168.17.16.2	0.546
16400	166.16.25.8	1.027	20800	167.20.12.2	0.745	26400	168.19. 4.4	0.541
16500	166.18. 7.7	1.019	20900	167.21.26.2	0.740	26600	168.20.51.5	0.535
16600	166.19.48.8	1.011	21000	167.22.39.7	0.735	26800	168.22.37.5	0.530
16700	166.21.29.0	1.002	21100	167.23.52.7	0.730	27000	168.24.22.5	0.525
16800	166.23. 8.5	0.994	21200	167.25. 5.3	0.726	27200	168.26. 6.4	0.520

TABLE IV. Mouvement des Comètes dans la parabole.

Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.
27200	168°26′ 6″4	0″515	36000	169°28′43″5	0″353	46000	170°18′44″5	0″254
27400	168.27.49.4	0.510	36200	169.29.54.0	0.350	46250	170.19.48.0	0.252
27600	168.29.31.2	0.505	36400	169.31. 4.1	0.348	46500	170.20.51.0	0.250
27800	168.31.12.1	0.500	36600	169.32.13.8	0.345	46750	170.21.53.6	0.249
28000	168.32.52.1	0.495	36800	169.33.22.9	0.343	47000	170.22.55.8	0.247
28200	168.34.31.1	0.490	37000	169.34.31.5	0.340	47250	170.23.57.5	0.245
28400	168.36. 9.1	0.485	37200	169.35.39.6	0.338	47500	170.24.58.8	0.244
28600	168.37.46.2	0.481	37400	169.36.47.2	0.336	47750	170.25.59.7	0.242
28800	168.39.22.4	0.476	37600	169.37.54.3	0.333	48000	170.27.00.1	0.239
29000	168.40.57.7	0.472	37800	169.39. 1.0	0.331	48500	170.28.59.7	0.236
29200	168.42.32.1	0.467	38000	169.40. 7.2	0.328	49000	170.30.57.7	0.233
29400	168.44. 5.6	0.463	38200	169.41.12.9	0.326	49500	170.32.54.1	0.230
29600	168.45.38.3	0.460	38400	169.42.18.2	0.324	50000	170.34.48.9	0.227
29800	168.47.10.2	0.456	38600	169.43.23.0	0.321	50500	170.36.42.2	0.224
30000	168.48.41.3	0.451	38800	169.44.27.3	0.319	51000	170.38.34.0	0.221
30200	168.50.11.5	0.447	39000	169.45.31.2	0.317	51500	170.40.24.3	0.218
30400	168.51.40.9	0.443	39200	169.46.34.7	0.315	52000	170.42.13.2	0.215
30600	168.53. 9.5	0.439	39400	169.47.37.8	0.313	52500	170.44. 0.8	0.212
30800	168.54.37.3	0.435	39600	169.48.40.4	0.311	53000	170.45.46.9	0.210
31000	168.56. 4.4	0.432	39800	169.49.42.6	0.309	53500	170.47.31.7	0.207
31200	168.57.30.8	0.428	40000	169.50.44.3	0.306	54000	170.49.15.2	0.204
31400	168.58.56.4	0.425	40250	169.52. 0.9	0.304	54500	170.50.57.4	0.202
31600	169. 0.21.3	0.421	40500	169.53.16.9	0.302	55000	170.52.38.4	0.199
31800	169. 1.45.4	0.417	40750	169.54.32.3	0.299	55500	170.54.18.1	0.197
32000	169. 3. 8.9	0.413	41000	169.55.47.1	0.296	56000	170.55.56.7	0.195
32200	169. 4.31.6	0.410	41250	169.57. 1.2	0.294	56500	170.57.34.1	0.192
32400	169. 5.53.7	0.407	41500	169.58.14.8	0.292	57000	170.59.10.3	0.190
32600	169. 7.15.[illegible]	0.404	41750	169.59.27.7	0.290	57500	171. 0.45.4	0.188
32800	169. 8.35.7	0.401	42000	170. 0.40.1	0.287	58000	171. 2.19.4	0.186
33000	169. 9.55.8	0.397	42250	170. 1.51.9	0.285	58500	171. 3.52.3	0.184
33200	169.11.15.2	0.394	42500	170. 3. 3.1	0.283	59000	171. 5.24.2	0.182
33400	169.12.33.[illegible]	0.391	42750	170. 4.13.8	0.28[illegible]	59500	171. 6.55.0	0.180
33600	169.13.52.1	0.387	43000	170. 5.23.9	0.278	60000	171. 8.24.8	0.178
33800	169.15. 9.6	0.385	43250	170. 6.33.5	0.276	60500	171. 9.53.6	0.176
34000	169.16.26.5	0.381	43500	170. 7.42.5	0.274	61000	171.11.21.4	0.174
34200	169.17.42.7	0.378	43750	170. 8.51.0	0.272	61500	171.12.48.3	0.172
34400	169.18.58.4	0.375	44000	170. 9.58.9	0.270	62000	171.14.14.2	0.170
34600	169.10.13.5	0.372	44250	170.11. 6.3	0.268	62500	171.15.39.2	0.168
34800	169.21.28.0	0.370	44500	170.12.13.2	0.266	63000	171.17. 3.3	0.166
35000	169.22.42.0	0.367	44750	170.13.19.7	0.264	63500	171.18.26.5	0.165
35200	169.23.55.4	0.364	45000	170.14.25.6	0.262	64000	171.19.48.8	0.163
35400	169.25. 8.2	0.361	45250	170.15.31.1	0.260	64500	171.21.10.3	0.161
35600	169.26.20.5	0.358	45500	170.16.36.0	0.258	65000	171.22.30.9	0.160
35800	169.27.32.2	0.355	45750	170.17.40.5	0.256	65500	171.23.50.7	0.158
36000	169.28.43.3		46000	170.18.44.5		66000	171.25. 9.7	

TABLE IV. Mouvement des Comètes dans la parabole.

Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.
66000	171°25′ 9″7	0″156	88000	172°12′32″5	0″106	120000	172°58′41″8	0″070
66500	171.26.27.9	0.155	88500	172.13.25.7	0.106	121000	172.59.51.9	0.069
67000	171.27.45.3	0.153	89000	172.14.18.6	0.105	122000	173. 1. 1.3	0.069
67500	171.29. 1.9	0.152	89500	172.15.11.0	0.104	123000	173. 2.10.0	0.068
68000	171.30.17.8	0.150	90000	172.16. 3.1	0.103	124000	173. 3.17.9	0.067
68500	171.31.32.9	0.149	90500	172.16.54.7	0.103	125000	173. 4.25.1	0.066
69000	171.32.47.3	0.147	91000	172.17.46.0	0.102	126000	173. 5.31.5	0.066
69500	171.34. 1.0	0.146	91500	172.18.36.9	0.101	127000	173. 6.37.3	0.065
70000	171.35.14.0	0.145	92000	172.19.27.5	0.100	128000	173. 7.42.4	0.064
70500	171.36.26.3	0.143	92500	172.20.17.7	0.100	129000	173. 8.46.8	0.064
71000	171.37.37.9	0.142	93000	172.21. 7.5	0.099	130000	173. 9.50.5	0.063
71500	171.38.48.8	0.141	93500	172.21.56.9	0.098	131000	173.10.53.6	0.062
72000	171.39.59.1	0.139	94000	172.22.46.0	0.097	132000	173.11.56.0	0.062
72500	171.41. 8.7	0.138	94500	172.23.34.7	0.097	133000	173.12.57.8	0.061
73000	171.42.17.6	0.137	95000	172.24.23.1	0.096	134000	173.13.59.[illegible]	0.061
73500	171.43.25.9	0.136	95500	172.25.11.2	0.095	135000	173.14.59.6	0.060
74000	171.44.33.7	0.134	96000	172.25.58.9	0.095	136000	173.15.59.5	0.059
74500	171.45.40.8	0.133	96500	172.26.46.3	0.094	137000	173.16.58.9	0.059
75000	171.46.47.3	0.132	97000	172.27.33.4	0.094	138000	173.17.57.7	0.058
75500	171.47.53.2	0.131	97500	172.28.20.2	0.093	139000	173.18.56.0	0.058
76000	171.48.58.5	0.130	98000	172.29. 6.6	0.092	140000	173.19.53.7	0.057
76500	171.50. 3.3	0.128	98500	172.29.52.7	0.092	141000	173.20.50.8	0.057
77000	171.51. 7.5	0.127	99000	172.30.38.5	0.091	142000	173.21.47.4	0.056
77500	171.52.11.1	0.126	99500	172.31.24.0	0.090	143000	173.22.43.5	0.056
78000	171.53.14.2	0.125	100000	172.32. 9.2	0.089	144000	173.23.39.0	0.055
78500	171.54.16.7	0.124	101000	172.33.38.7	0.088	145000	173.24.34.0	0.055
79000	171.55.18.8	0.123	102000	172.35. 7.0	0.087	146000	173.25.28.6	0.054
79500	171.56.20.3	0.122	103000	172.36.34.1	0.086	147000	173.26.22.6	0.054
80000	171.57.21.3	0.121	104000	172.38. 0.1	0.085	148000	173.27.16.2	0.053
80500	171.58.21.7	0.120	105000	172.39.25.1	0.084	149000	173.28. 9.3	0.053
81000	171.59.21.7	0.119	106000	172.40.48.9	0.083	150000	173.29. 1.8	0.052
81500	172. 0.21.2	0.118	107000	172.42.11.7	0.082	151000	173.29.54.0	0.052
82000	172. 1.20.2	0.117	108000	172.43.33.5	0.081	152000	173.30.45.6	0.051
82500	172. 2.18.7	0.116	109000	172.44.54.2	0.080	153000	173.31.36.8	0.051
83000	172. 3.16.7	0.115	110000	172.46.14.0	0.079	154000	173.32.27.6	0.050
83500	172. 4.14.3	0.114	111000	172.47.32.8	0.078	155000	173.33.17.9	0.050
84000	172. 5.11.4	0.113	112000	172.48.50.7	0.077	156000	173.34. 7.8	0.049
84500	172. 6. 8.1	0.112	113000	172.50. 7.6	0.076	157000	173.34.57.5	0.049
85000	172. 7. 4.3	0.112	114000	172.51.23.6	0.075	158000	173.35.46.3	0.049
85500	172. 8. 0.1	0.111	115000	172.52.38.8	0.074	159000	173.36.34.9	0.048
86000	172. 8.55.4	0.110	116000	172.53.53.0	0.073	160000	173.37.23.2	0.048
86500	172. 9.50.3	0.109	117000	172.55. 6.4	0.073	161000	173.38.11.0	0.047
87000	172.10.44.8	0.108	118000	172.56.19.0	0.072	162000	173.38.58.4	0.047
87500	172.11.38.8	0.107	119000	172.57.30.8	0.071	163000	173.39.45.5	0.047
88000	172.12.32.5		120000	172.58.41.8		164000	173.40.32.1	

TABLE IV. Mouvement des Comètes dans la parabole.

Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurn.	Jours.	Anomalie vraie.	Mouv. diurne.
164000	173° 40′ 32″ 1	0″ 046	176000	173° 49′ 23″ 9	0″ 042	188000	173° 57′ 29″ 2	0″ 039
165000	173. 41. 18. 4	0. 046	177000	173. 50. 6. 0	0. 042	189000	173. 58. 7. 8	0. 038
166000	173. 42. 4. 3	0. 045	178000	173. 50. 47. 8	0. 041	190000	173. 58. 46. 1	0. 038
167000	173. 42. 49. 8	0. 045	179000	173. 51. 29. 3	0. 041	191000	173. 59. 24. 1	0. 038
168000	173. 43. 35. 0	0. 045	180000	173. 52. 10. 5	0. 041	192000	174. 0. 1. 9	0. 037
169000	173. 44. 19. 8	0. 044	181000	173. 52. 51. 4	0. 040	193000	174. 0. 39. 4	0. 037
170000	173. 45. 4. 3	0. 044	182000	173. 53. 31. 9	0. 040	194000	174. 1. 16. 7	0. 037
171000	173. 45. 48. 4	0. 044	183000	173. 54. 12. 2	0. 040	195000	174. 1. 53. 7	0. 037
172000	173. 46. 32. 2	0. 043	184000	173. 54. 52. 2	0. 040	196000	174. 2. 30. 4	0. 036
173000	173. 47. 15. 6	0. 043	185000	173. 55. 31. 9	0. 039	197000	174. 3. 6. 9	0. 036
174000	173. 47. 58. 7	0. 043	186000	173. 56. 11. 3	0. 039	198000	174. 3. 43. 1	0. 036
175000	173. 48. 41. 4	0. 042	187000	173. 56. 50. 4	0. 039	199000	174. 4. 19. 1	0. 036
176000	173. 49. 23. 9		188000	173. 57. 29. 2		200000	174. 4. 54. 8	

La Table IV a été calculée par les méthodes expliquées aux articles 18, 22 et 23; c'est la même que Lalande avait adoptée pour la troisième édition de son Astronomie. Je n'y ai fait qu'un changement, celui de substituer le mouvement diurne en secondes, aux différences en minutes et secondes des termes consécutifs de la Table. Par ce moyen, le calcul des parties proportionnelles est plus facile et peut toujours se faire par une simple multiplication. J'aurais desiré, dans les trois dernières pages, où le mouvement diurne est si lent, pouvoir le donner en dix-millièmes de secondes. Au reste, si cette précision pouvait jamais être nécessaire, on se la procurerait avec facilité; ainsi la seule inspection de la Table prouverait que la dernière différence est réellement 35″,7 pour mille jours, ou 0″,0357 pour un jour, au lieu de 0.036 que donne la colonne des différences.

La Table V a été calculée par les diverses formules démontrées aux articles 26 et suivans. Elle m'a toujours paru d'un usage plus incommode, et n'est pas toujours susceptible de la même exactitude, à beaucoup près. En effet, ajoutons le log de 1′.096154 aux logarithmes des mouvemens diurnes pour 173° 45′ et les anomalies suivantes, nous formerons le tableau que voici :

Anomalie.	Jours.	Δ′	Δ″	Δ‴	Δ^{IV}
173° 45′	169904				
		6954			
50	176858		385		
		7339		29	
55	184197		414		1
		7753		28	
174. 0	191950		442		
		8195			
5	200145				

On peut juger si de pareilles différences donneront avec précision le nombre des jours qui répondent aux anomalies dans cette partie de la table.

TABLE V. Seconde Table générale du mouv. parabol. des Comètes.

Anomal.	Mouvem. moyen.	Différ.	Anomal.	Mouvem. moyen.	Différ.	Anomal.	Mouvem. moyen.	Différ.
0° 0'	0.0000000	545416	3° 40'	2.4014670	546559	7° 20'	4.8127975	549955
5	0.0545416	545416	45	2.4561229	546611	25	4.8677930	550059
10	0.1090832	545419	50	2.5107840	546665	30	4.9227989	550164
15	0.1636251	545423	55	2.5654505	546718	35	4.9778153	550270
20	0.2181674	545428	4. 0	2.6201223	546774	40	5.0328423	550378
25	0.2727102	545433	5	2.6747997	546832	45	5.0878801	550487
30	0.3272535	545439	10	2.7294829	546889	50	5.1429288	550596
35	0.3817974	545448	15	2.7841718	546948	55	5.1979884	550707
40	0.4363422	545457	20	2.8388666	547008	8. 0	5.2530591	550819
45	0.4908879	545467	25	2.8935674	547069	5	5.3081410	550932
50	0.5454346	545479	30	2.9482743	547132	10	5.3632342	551046
55	0.5999825	545492	35	3.0029875	547196	15	5.4183388	551161
1. 0	0.6545317	545506	40	3.0577071	547261	20	5.4734549	551278
5	0.7090823	545521	45	3.1124332	547327	25	5.5285827	551397
10	0.7636344	545537	50	3.1671659	547394	30	5.5837224	551516
15	0.8181881	545554	55	3.2219053	547462	35	5.6388740	551636
20	0.8727435	545572	5. 0	3.2766515	547532	40	5.6940376	551758
25	0.9273007	545592	5	3.3314047	547603	45	5.7492134	551881
30	0.9818599	545613	10	3.3861650	547674	50	5.8044015	552005
35	1.0364212	545635	15	3.4409324	547747	55	5.8596020	552130
40	1.0909847	545658	20	3.4957071	547822	9. 0	5.9148150	552256
45	1.1455505	545682	25	3.5504893	547897	5	5.9700406	552384
50	1.2001187	545707	30	3.6052790	547973	10	6.0252790	552513
55	1.2546894	545734	35	3.6600763	548051	15	6.0805303	552643
2. 0	1.3092628	545762	40	3.7148814	548130	20	6.1357946	552774
5	1.3638390	545791	45	3.7696944	548211	25	6.1910720	552906
10	1.4184181	545821	50	3.8245155	548292	30	6.2463626	553040
15	1.4730002	545852	55	3.8793447	548374	35	6.3016666	553175
20	1.5275854	545884	6. 0	3.9341821	548457	40	6.3569841	553311
25	1.5821738	545918	5	3.9890278	548542	45	6.4123152	553448
30	1.6367656	545953	10	4.0438820	548628	50	6.4676600	553586
35	1.6913609	545988	15	4.0987448	548715	55	6.5230186	553726
40	1.7459597	546024	20	4.1536163	548804	10. 0	6.5783912	553868
45	1.8005621	546063	25	4.2084967	548893	5	6.6337780	554010
50	1.8551684	546103	30	4.2633860	548984	10	6.6891790	554153
55	1.9097787	546143	35	4.3182844	549076	15	6.7445943	554297
3. 0	1.9643930	546184	40	4.3731920	549169	20	6.8000240	554443
5	2.0190114	546227	45	4.4281089	549263	25	6.8554683	554591
10	2.0736341	546271	50	4.4830352	549358	30	6.9109274	554739
15	2.1282612	546317	55	4.5379710	549455	35	6.9664013	554889
20	2.1828929	546363	7. 0	4.5929165	549553	40	7.0218902	555039
25	2.2375292	546411	5	4.6478718	549652	45	7.0773941	555191
30	2.2921703	546459	10	4.7028370	549752	50	7.1329132	555344
35	2.3468162	546508	15	4.7578122	549853	55	7.1884476	555498
40	2.4014670		20	4.8127975		11. 0	7.2439974	

TABLE V. Seconde Table générale du mouv. parabol. des Comètes.

Anomal.	Mouvem. moyen.	Différ.	Anom.	Mouvem. moyen.	Différ.	Anom.	Mouvem. moyen.	Différ.
11° 0′	7.2439974	555654	14° 40′	9.7053608	563737	18° 20′	12.2076243	574325
5	7.2995628	555811	45	9.7617345	563950	25	12.2650568	574596
10	7.3551439	555969	50	9.8181295	564164	30	12.3225164	574868
15	7.4107408	556128	55	9.8745459	564378	35	12.3800032	575141
20	7.4663536	556982	15. 0	9.9309837	564594	40	12.4375173	575416
25	7.5219825	556450	5	9.9874431	564811	45	12.4950589	575693
30	7.5776275	556614	10	10.0439242	565030	50	12.5526282	575971
35	7.6332889	556778	15	10.1004272	565251	55	12.6102253	576250
40	7.6889667	556943	20	10.1569523	565473	19. 0	12.6678503	576531
45	7.7446610	557110	25	10.2134996	565695	5	12.7255034	576813
50	7.8003720	557278	30	10.2700691	565918	10	12.7831847	577096
55	7.8560998	557447	35	10.3266609	566143	15	12.8408943	577381
12. 0	7.9118445	557618	40	10.3832752	566370	20	12.8986324	577667
5	7.9676063	557790	45	10.4399122	566599	25	12.9563991	577954
10	8.0233853	557963	50	10.4965721	566828	30	13.0141945	578243
15	8.0791816	558136	55	10.5532549	567058	35	13.0720188	578534
20	8.1349952	558311	16. 0	10.6099607	567290	40	13.1298722	578826
25	8.1908263	558489	5	10.6666897	567523	45	13.1877548	579119
30	8.2466752	558667	10	10.7234420	567758	50	13.2456667	579414
35	8.3025419	558846	15	10.7802178	567994	55	13.3036081	579710
40	8.3584265	559026	20	10.8370172	568231	20. 0	13.3615791	580007
45	8.4143291	559208	25	10.8938403	568469	5	13.4195798	580306
50	8.4702499	559391	30	10.9506872	568709	10	13.4776104	580607
55	8.5261890	559575	35	11.0075581	568950	15	13.5356711	580908
13. 0	8.5821465	559760	40	11.0644531	569192	20	13.5937619	581210
5	8.6381225	559947	45	11.1213723	569436	25	13.6518829	581514
10	8.6941172	560136	50	11.1783159	569681	30	13.7100343	581820
15	8.7501308	560325	55	11.2352840	569928	35	13.7682163	583128
20	8.8061633	560516	17. 0	11.2922768	570177	40	13.8264291	582438
25	8.8622149	560708	5	11.3492945	570426	45	13.8846729	582748
30	8.9182857	560901	10	11.4063371	570676	50	13.9429477	583059
35	8.9743758	561094	15	11.4634047	570927	55	14.0012536	583372
40	9.0304852	561289	20	11.5204974	571180	21. 0	14.0595908	583687
45	9.0866141	561486	25	11.5776154	571435	5	14.1179595	584003
50	9.1427627	561685	30	11.6347589	571692	10	14.1763598	584321
55	9.1989312	561885	35	11.6919281	571949	15	14.2347919	584640
14. 0	9.2551197	562086	40	11.7491230	572207	20	14.2932559	584961
5	9.3113283	562288	45	11.8063437	572467	25	14.3517520	585282
10	9.3675571	562491	50	11.8635904	572728	30	14.4102802	585605
15	9.4238062	562695	55	11 9208632	572991	35	14.4688407	585930
20	9.4800737	562901	18. 0	11.9781623	573255	40	14.5274337	586256
25	9.5363658	563108	5	12.0354878	573521	45	14.5860593	586584
30	9.5926766	563316	10	12.0928399	573788	50	14.6447177	586913
35	9.6490082	563526	15	12.1502187	574056	55	14.7034090	587244
40	9.7053608		20	12.2076243		22. 0	14.7621334	

TABLE V. Seconde Table générale du mouv. parabol. des Comètes.

Anomal.	Mouvem. moyen.	Différ.	Anom.	Mouvem. moyen.	Différ.	Anom.	Mouvem. moyen.	Différ.
22° 0′	14.7621334	587576	25° 40′	17.3810277	603693	29° 20′	20.0774475	622933
5	14.8208910	587910	45	17.4413970	604095	25	20.1397408	623410
10	14.8796820	588245	50	17.5018065	604499	30	20.2020818	623888
15	14.9385065	588581	55	17.5622564	604904	35	20.2644706	624367
20	14.9973646	588919	26. 0	17.6227468	605311	40	20.3269073	624847
25	15.0562565	589258	5	17.6832779	605719	45	20.3893920	625329
30	15.1151823	589599	10	17.7438498	606128	50	20.4519249	625814
35	15.1741422	589942	15	17.8044626	606539	55	20.5145063	626301
40	15.2331364	590286	20	17.8651165	606951	30. 0	20.5771364	626790
45	15.2921650	590632	25	17.9258116	607365	5	20.6398154	627280
50	15.3512282	590980	30	17.9865481	607781	10	20.7025434	627772
55	15.4103262	591329	35	18.0473262	608199	15	20.7653206	628266
23. 0	15.4694591	591679	40	18.1081461	608619	20	20.8281472	628761
5	15.5286270	592030	45	18.1690080	609041	25	20.8910233	629258
10	15.5878300	592382	50	18.2299121	609464	30	20.9539491	629757
15	15.6470682	592736	55	18.2908585	609888	35	21.0169248	630258
20	15.7063418	593092	27. 0	18.3518473	610314	40	21.0799506	630761
25	15.7656510	593450	5	18.4128787	610742	45	21.1430267	631266
30	15.8249960	593810	10	18.4739529	611172	50	21.2061533	631773
35	15.8843770	594172	15	18.5350701	611602	55	21.2693306	632282
40	15.9437942	594534	20	18.5962303	612034	31. 0	21.3325588	632793
45	16.0032476	594897	25	18.6574337	612469	5	21.3958381	633305
50	16.0627373	595262	30	18.7186806	612905	10	21.4591686	633818
55	16.1222635	595629	35	18.7799711	613343	15	21.5225504	634333
24. 0	16.1818264	595997	40	18.8413054	613783	20	21.5859837	634850
5	16.2414261	596367	45	18.9026837	614224	25	21.6494687	635370
10	16.3010628	596738	50	18.9641061	614667	30	21.7130057	635892
15	16.3607366	597112	55	19.0255728	615111	35	21.7765949	636416
20	16.4204478	597487	28. 0	19.0870839	615557	40	21.8402365	636941
25	16.4801965	597863	5	19.1486396	616004	45	21.9039306	637468
30	16.5399828	598240	10	19.2102400	616454	50	21.9676774	637997
35	16.5998068	598619	15	19.2718854	616906	55	22.0314771	638528
40	16.6596687	599000	20	19.3335760	617359	32. 0	22.0953299	639061
45	16.7195687	599382	25	19.3953119	617815	5	22.1592360	639596
50	16.7795069	599766	30	19.4570934	618272	10	22.2231956	640133
55	16.8394835	600152	35	19.5189206	618730	15	22.2872089	640672
25. 0	16.8994987	600540	40	19.5807936	619190	20	22.3512761	641212
5	16.9595527	600929	45	19.6427126	619652	25	22.4153973	641754
10	17.0196456	601319	50	19.7046778	620116	30	22.4795727	642298
15	17.0797775	601711	55	19.7666894	620580	35	22.5438025	642844
20	17.1399486	602104	29. 0	19.8287474	621046	40	22.6080869	643392
25	17.2001590	602499	5	19.8908520	621514	45	22.6724261	643942
30	17.2604089	602895	10	19.9530034	621984	50	22.7368203	644494
35	17.3206984	603293	15	20.0152018	622457	55	22.8012697	645048
40	17.3810277		20	20.0774475		33. 0	22.8657745	

TABLE V. Seconde Table générale du mouv. parabol. des Comètes.

Anomal.	Mouvem. moyen.	Différ.	Anom.	Mouvem. moyen.	Différ.	Anom.	Mouvem. moyen.	Différ.
33° 0'	22.8657745	645604	36° 40'	25.7619042	672089	40° 20'	28.7835784	702853
5	22.9303349	646162	45	25.8291131	672740	25	28.8538637	703606
10	22.9949511	646723	50	25.8963871	673393	30	28.9242243	704360
15	23.0596234	647286	55	25.9637264	674048	35	28.9946603	705117
20	23.1243520	647850	37. 0	26.0311312	674705	40	29.0651720	705876
25	23.1891370	648416	5	26.0986017	675363	45	29.1357596	706640
30	23.2539786	648983	10	26.1661380	676022	50	29.2064236	707406
35	23.3188769	649552	15	26.2337402	676684	55	29.2771642	708176
40	23.3838321	650123	20	26.3014086	677350	41. 0	29.3479818	708948
45	23.4488444	650696	25	26.3691436	678017	5	29.4188766	709722
50	23.5139140	651272	30	26.4369453	678688	10	29.4898488	710497
55	23.5790412	651851	35	26.5048141	679361	15	29.5608985	711274
34. 0	23.6442263	652432	40	26.5727502	680036	20	29.6320259	712054
5	23.7094695	653015	45	26.6407538	680713	25	29.7032313	712837
10	23.7747710	653600	50	26.7088251	681392	30	29.7745150	713623
15	23.8401310	654187	55	26.7769643	682072	35	29.8458773	714412
20	23.9055497	654774	38. 0	26.8451715	682754	40	29.9173185	715204
25	23.9710271	655364	5	26.9134469	683439	45	29.9888389	715997
30	24.0365635	655955	10	26.9817908	684127	50	30.0604386	716793
35	24.1021590	656548	15	27.0502035	684819	55	30.1321179	717592
40	24.1678138	657144	20	27.1186854	685513	42. 0	30.2038771	718394
45	24.2335282	657743	25	27.1872367	686208	5	30.2757165	719199
50	24.2993025	658344	30	27.2558575	686905	10	30.3476364	720007
55	24.3651369	658947	35	27.3245480	687604	15	30.4196371	720817
35. 0	24.4310316	659552	40	27.3933084	688306	20	30.4917188	721629
5	24.4969868	660159	45	27.4621390	689011	25	30.5638817	722443
10	24.5630027	660768	50	27.5310401	689718	30	30.6361260	723260
15	24.6290795	661379	55	27.6000119	690427	35	30.7084520	724080
20	24.6952174	661992	39. 0	27.6690546	691138	40	30.7808600	724903
25	24.7614166	662606	5	27.7381684	691852	45	30.8533503	725729
30	24.8276772	663222	10	27.8073536	692568	50	30.9259232	726558
35	24.8939994	663841	15	27.8766104	693287	55	30.9985790	727389
40	24.9603835	664462	20	27.9459391	694009	43. 0	31.0713179	728223
45	25.0268297	665087	25	28.0153400	694733	5	31.1441402	729060
50	25.0933384	665714	30	28.0848133	695459	10	31.2170462	729901
55	25.1599098	666343	35	28.1543592	696187	15	31.2900363	730744
36. 0	25.2265441	666974	40	28.2239779	696917	20	31.3631107	731589
5	25.2932415	667606	45	28.2936696	697649	25	31.4362696	732436
10	25.3600021	668240	50	28.3634345	698384	30	31.5095132	733284
15	25.4268261	668876	55	28.4332729	699123	35	31.5828416	734136
20	25.4937137	669514	40. 0	28.5031852	699865	40	31.6562552	734992
25	25.5606651	670154	5	28.5731717	700609	45	31.7297544	735852
30	25.6276805	670796	10	28.6432326	701355	50	31.8033396	736715
35	25.6947601	671441	15	28.7133681	702103	55	31.8770111	737580
40	25.7619042		20	28.7835784		44. 0	31.9507691	

TABLE V. Seconde Table générale du mouv. parabol. des Comètes.

Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.
44° 0'	1.5044813	10026	47° 40'	1.5476043	9584	51° 20'	1.5890071	9243
5	1.5054839	10015	45	1.5485627	9575	25	1.5899314	9236
10	1.5064854	10003	50	1.5495202	9567	30	1.5908550	9230
15	1.5074857	9992	55	1.5504769	9558	35	1.5917780	9223
20	1.5084849	9981	48. 0	1.5514327	9549	40	1.5927003	9216
25	1.5094830	9970	5	1.5523876	9540	45	1.5936219	9210
30	1.5104800	9959	10	1.5533416	9532	50	1.5945429	9203
35	1.5114759	9948	15	1.5542948	9524	55	1.5954632	9197
40	1.5124707	9937	20	1.5552472	9515	52. 0	1.5963829	9191
45	1.5134644	9926	25	1.5561987	9506	5	1.5973020	9184
50	1.5144570	9915	30	1.5571493	9499	10	1.5982204	9178
55	1.5154485	9905	35	1.5580992	9490	15	1.5991382	9171
45. 0	1.5164390	9894	40	1.5590482	9481	20	1.6000553	9165
5	1.5174284	9884	45	1.5599963	9474	25	1.6009718	9159
10	1.5184168	9873	50	1.5609437	9465	30	1.6018877	9153
15	1.5194041	9863	55	1.5618902	9458	35	1.6028030	9147
20	1.5203904	9852	49. 0	1.5628360	9449	40	1.6037177	9140
25	1.5213756	9842	5	1.5637809	9441	45	1.6046317	9135
30	1.5223598	9831	10	1.5647250	9434	50	1.6055452	9129
35	1.5233429	9822	15	1.5656684	9425	55	1.6064581	9122
40	1.5243251	9811	20	1.5666109	9418	53. 0	1.6073703	9117
45	1.5253062	9801	25	1.5675527	9410	5	1.6082820	9110
50	1.5262863	9791	30	1.5684937	9402	10	1.6091930	9105
55	1.5272654	9781	35	1.5694339	9394	15	1.6101035	9099
46. 0	1.5282435	9771	40	1.5703733	9387	20	1.6110134	9094
5	1.5292206	9761	45	1.5713120	9379	25	1.6119228	9088
10	1.5301967	9752	50	1.5722499	9371	30	1.6128316	9082
15	1.5311719	9741	55	1.5731870	9364	35	1.6137398	9076
20	1.5321460	9732	50. 0	1.5741234	9356	40	1.6146474	9071
25	1.5331192	9722	5	1.5750590	9349	45	1.6155545	9065
30	1.5340914	9713	10	1.5759939	9342	50	1.6164610	9059
35	1.5350627	9703	15	1.5769281	9334	55	1.6173669	9054
40	1.5360330	9694	20	1.5778615	9327	54. 0	1.6182723	9049
45	1.5370024	9684	25	1.5787942	9320	5	1.6191772	9044
50	1.5379708	9675	30	1.5797262	9313	10	1.6200816	9037
55	1.5389383	9665	35	1.5806575	9305	15	1.6209853	9033
47. 0	1.5399048	9657	40	1.5815880	9298	20	1.6218886	9027
5	1.5408705	9647	45	1.5825178	9292	25	1.6227913	9022
10	1.5418352	9638	50	1.5834470	9284	30	1.6236935	9017
15	1.5427990	9628	55	1.5843754	9277	35	1.6245952	9012
20	1.5437618	9620	51. 0	1.5853031	9270	40	1.6254964	9006
25	1.5447238	9611	5	1.5862301	9264	45	1.6263970	9001
30	1.5456849	9601	10	1.5871565	9256	50	1.6272971	8997
35	1.5466450	9593	15	1.5880821	9250	55	1.6281968	8991
40	1.5476043		20	1.5890071		55. 0	1.6290959	

TABLE V. Seconde Table générale du mouv. parabol. des Comètes.

Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.
55° 0′	1.6290959	8986	58° 40′	1.6682144	8802	62° 20′	1.7066612	8682
5	1.6299945	8982	45	1.6690946	8798	25	1.7075294	8679
10	1.6308927	8976	50	1.6699744	8795	30	1.7083973	8677
15	1.6317903	8972	55	1.6708539	8792	35	1.7092650	8675
20	1.6326875	8966	59. 0	1.6717331	8788	40	1.7101325	8673
25	1.6335841	8962	5	1.6726119	8785	45	1.7109998	8672
30	1.6344803	8957	10	1.6734904	8782	50	1.7118670	8669
35	1.6353760	8953	15	1.6743686	8779	55	1.7127339	8667
40	1.6362713	8948	20	1.6752465	8775	63. 0	1.7136006	8666
45	1.6371661	8943	25	1.6761240	8772	5	1.7144672	8664
50	1.6380604	8938	30	1.6770012	8770	10	1.7153336	8662
55	1.6389542	8933	35	1.6778782	8765	15	1.7161998	8661
56. 0	1.6398475	8929	40	1.6787547	8763	20	1.7170659	8658
5	1.6407404	8925	45	1.6796310	8760	25	1.7179317	8657
10	1.6416329	8920	50	1.6805070	8757	30	1.7187974	8655
15	1.6425249	8916	55	1.6813827	8754	35	1.7196629	8654
20	1.6434165	8911	60. 0	1.6822581	8752	40	1.7205283	8652
25	1.6443076	8907	5	1.6831333	8748	45	1.7213935	8650
30	1.6451983	8903	10	1.6840081	8745	50	1.7222585	8649
35	1.6460886	8898	15	1.6848826	8742	55	1.7231234	8647
40	1.6469784	8894	20	1.6857568	8740	64. 0	1.7239881	8646
45	1.6478678	8890	25	1.6866308	8737	5	1.7248527	8644
50	1.6487568	8886	30	1.6875045	8734	10	1.7257171	8643
55	1.6496454	8882	35	1.6883779	8731	15	1.7265814	8642
57. 0	1.6505336	8877	40	1.6892510	8729	20	1.7274456	8640
5	1.6514213	8874	45	1.6901239	8726	25	1.7283096	8638
10	1.6523087	8869	50	1.6909965	8723	30	1.7291734	8638
15	1.6531956	8865	55	1.6918688	8721	35	1.7300372	8636
20	1.6540821	8861	61. 0	1.6927409	8718	40	1.7309008	8635
25	1.6549682	8857	5	1.6936127	8716	45	1.7317643	8633
30	1.6558539	8854	10	1.6944843	8713	50	1.7326276	8632
35	1.6567393	8849	15	1.6953556	8710	55	1.7334908	8631
40	1.6576242	8846	20	1.6962266	8709	65. 0	1.7343539	8631
45	1.6585088	8841	25	1.6970975	8706	5	1.7352170	8629
50	1.6593929	8838	30	1.6979681	8703	10	1.7360799	8628
55	1.6602767	8834	35	1.6988384	8701	15	1.7369427	8626
58. 0	1.6611601	8831	40	1.6997085	8699	20	1.7378053	8626
5	1.6620432	8827	45	1.7005784	8696	25	1.7386679	8625
10	1.6629259	8823	50	1.7014480	8694	30	1.7395304	8623
15	1.6638082	8819	55	1.7023174	8692	35	1.7403927	8623
20	1.6646901	8816	62. 0	1.7031866	8690	40	1.7412550	8622
25	1.6655717	8812	5	1.7040556	8688	45	1.7421172	8621
30	1.6664529	8809	10	1.7049244	8685	50	1.7429793	8619
35	1.6673338	8806	15	1.7057929	8683	55	1.7438412	8619
40	1.6682144		20	1.7066612		66. 0	1.7447031	

TABLE V. Seconde Table générale du mouv. parabol. des Comètes.

Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.
66° 0′	1.7447031	8619	69° 40′	1.7825846	8609	73° 20′	1.8205353	8651
5	1.7455650	8618	45	1.7834455	8609	25	1.8214004	8652
10	1.7464268	8616	50	1.7843064	8610	30	1.8222656	8654
15	1.7472884	8616	55	1.7851674	8610	55	1.8231310	8655
20	1.7481500	8616	70. 0	1.7860284	8611	40	1.8239965	8657
25	1.7490116	8614	5	1.7868895	8611	45	1.8248622	8659
30	1.7498730	8614	10	1.7877506	8612	50	1.8257281	8660
35	1.7507344	8614	15	1.7886118	8612	55	1.8265941	8661
40	1.7515958	8612	20	1.7894730	8613	74. 0	1.8274602	8664
45	1.7524570	8612	25	1.7903343	8613	5	1.8283266	8666
50	1.7533182	8612	30	1.7911956	8614	10	1.8291932	8667
55	1.7541794	8611	35	1.7920570	8615	15	1.8300599	8669
67. 0	1.7550405	8611	40	1.7929185	8615	20	1.8309268	8671
5	1.7559016	8610	45	1.7937800	8616	25	1.8317939	8672
10	1.7567626	8610	50	1.7946416	8617	30	1.8326611	8674
15	1.7576236	8609	55	1.7955033	8617	35	1.8335285	8677
20	1.7584845	8609	71. 0	1.7963650	8618	40	1.8343962	8678
25	1.7593454	8608	5	1.7972268	8620	45	1.8352640	8680
30	1.7602062	8608	10	1.7980888	8620	50	1.8361320	8682
35	1.7610670	8608	15	1.7989508	8621	55	1.8370002	8684
40	1.7619278	8608	20	1.7998129	8621	75. 0	1.8378686	8686
45	1.7627886	8607	25	1.8006750	8623	5	1.8387372	8688
50	1.7636493	8607	30	1.8015373	8624	10	1.8396060	8691
55	1.7645100	8607	35	1.8023997	8624	15	1.8404751	8692
68. 0	1.7653707	8607	40	1.8032621	8626	20	1.8413443	8695
5	1.7662314	8607	45	1.8041247	8626	25	1.8422138	8696
10	1.7670921	8606	50	1.8049873	8628	30	1.8430834	8699
15	1.7679527	8607	55	1.8058501	8628	35	1.8439533	8701
20	1.7688134	8606	72. 0	1.8067129	8630	40	1.8448234	8703
25	1.7696740	8606	5	1.8075759	8631	45	1.8456937	8706
30	1.7705346	8607	10	1.8084390	8632	50	1.8465643	8707
35	1.7713953	8606	15	1.8093022	8633	55	1.8474350	8710
40	1.7722559	8606	20	1.8101655	8634	76. 0	1.8483060	8713
45	1.7731165	8607	25	1.8110289	8636	5	1.8491773	8715
50	1.7739772	8606	50	1.8118925	8637	10	1.8500488	8717
55	1.7748378	8607	55	1.8127562	8638	15	1.8509205	8719
69. 0	1.7756985	8607	40	1.8136200	8639	20	1.8517924	8722
5	1.7765592	8607	45	1.8144839	8641	25	1.8526646	8725
10	1.7774199	8607	50	1.8153480	8642	30	1.8535371	8727
15	1.7782806	8607	55	1.8162122	8643	35	1.8544098	8729
20	1.7791413	8608	73. 0	1.8170765	8645	40	1.8552827	8732
25	1.7800021	8608	5	1.8179410	8646	45	1.8561559	8734
30	1.7808629	8608	10	1.8188056	8648	50	1.8570293	8737
35	1.7817237	8609	15	1.8196704	8649	55	1.8579030	8740
40	1.7825846		20	1.8205353		77. 0	1:8587770	

TABLE V. Seconde Table générale du mouv. parabol. des Comètes.

Anomal.	Log mouv. moyen.	Differ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Differ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Differ.
77° 0′	1.8587770	8742	80° 40′	1.8975284	8884	84° 20′	1.9370108	9076
5	1.8596512	8745	45	1.8984168	8887	25	1.9379184	9081
10	1.8605257	8747	50	1.8993055	8891	30	1.9388265	9085
15	1.8614004	8750	55	1.9001946	8895	35	1.9397350	9091
20	1.8622754	8754	81. 0	1.9010841	8900	40	1.9406441	9096
25	1.8631508	8756	5	1.9019741	8903	45	1.9415537	9101
30	1.8640264	8758	10	1.9028644	8906	50	1.9424638	9106
35	1.8649022	8761	15	1.9037550	8911	55	1.9433744	9112
40	1.8657783	8765	20	1.9046461	8915	85. 0	1.9442856	9116
45	1.8666548	8767	25	1.9055376	8919	5	1.9451972	9122
50	1.8675315	8770	30	1.9064295	8922	10	1.9461094	9127
55	1.8684085	8773	35	1.9073217	8927	15	1.9470221	9132
78. 0	1.8692858	8776	40	1.9082144	8931	20	1.9479353	9137
5	1.8701634	8778	45	1.9091075	8935	25	1.9488490	9143
10	1.8710412	8782	50	1.9100010	8939	30	1.9497633	9148
15	1.8719194	8785	55	1.9108949	8944	35	1.9506781	9153
20	1.8727979	8788	82. 0	1.9117893	8947	40	1.9515934	9159
25	1.8736767	8791	5	1.9126840	8952	45	1.9525093	9164
30	1.8745558	8794	10	1.9135792	8956	50	1.9534257	9170
35	1.8754352	8797	15	1.9144748	8961	55	1.9543427	9175
40	1.8763149	8800	20	1.9153709	8964	86. 0	1.9552602	9181
45	1.8771949	8804	25	1.9162673	8969	5	1.9561783	9186
50	1.8780753	8806	30	1.9171642	8973	10	1.9570969	9192
55	1.8789559	8810	35	1.9180615	8978	15	1.9580161	9197
79. 0	1.8798369	8813	40	1.9189593	8982	20	1.9589358	9203
5	1.8807182	8817	45	1.9198575	8987	25	1.9598561	9208
10	1.8815999	8819	50	1.9207562	8991	30	1.9607769	9214
15	1.8824818	8823	55	1.9216553	8995	35	1.9616983	9220
20	1.8833641	8827	83. 0	1.9225548	9000	40	1.9626203	9226
25	1.8842468	8830	5	1.9234548	9005	45	1.9635429	9231
30	1.8851298	8833	10	1.9243553	9009	50	1.9644660	9238
35	1.8860131	8837	15	1.9252562	9013	55	1.9653898	9242
40	1.8868968	8840	20	1.9261575	9019	87. 0	1.9663140	9249
45	1.8877808	8843	25	1.9270594	9023	5	1.9672389	9255
50	1.8886651	8847	30	1.9279617	9027	10	1.9681644	9261
55	1.8895498	8851	35	1.9288644	9033	15	1.9690905	9266
80. 0	1.8904349	8854	40	1.9297677	9037	20	1.9700171	9272
5	1.8913203	8858	45	1.9306714	9041	25	1.9709443	9279
10	1.8922061	8861	50	1.9315755	9047	30	1.9718722	9285
15	1.8930922	8865	55	1.9324802	9051	35	1.9728007	9290
20	1.8939787	8869	84. 0	1.9333853	9057	40	1.9737297	9297
25	1.8948656	8872	5	1.9342910	9061	45	1.9746594	9302
30	1.8957528	8876	10	1.9351971	9066	50	1.9755896	9309
35	1.8966404	8880	15	1.9361037	9071	55	1.9765205	9315
40	1.8975284		20	1.9370108		88. 0	1.9774520	

TABLE V. Seconde Table générale du mouv. parabol. des Comètes.

Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.
88° 0'	1.9774520		91° 40'	2.0190916		95° 20'	2.0621853	
5	1.9783841	9321	45	2.0200538	9622	25	2.0631837	9984
10	1.9793168	9327	50	2.0210168	9630	30	2.0641831	9994
15	1.9802502	9334	55	2.0219806	9638	35	2.0651833	10002
20	1.9811842	9340	92. 0	2.0229451	9645	40	2.0661844	10011
25	1.9821188	9346	5	2.0239104	9653	45	2.0671864	10020
30	1.9830540	9352	10	2.0248764	9660	50	2.0681894	10030
35	1.9839899	9359	15	2.0258432	9668	55	2.0691932	10038
40	1.9849264	9365	20	2.0268108	9676	96. 0	2.0701980	10048
45	1.9858636	9372	25	2.0277792	9684	5	2.0712037	10057
50	1.9868014	9378	30	2.0287483	9691	10	2.0722104	10067
55	1.9877399	9385	35	2.0297182	9699	15	2.0732179	10075
89. 0	1.9886789	9390	40	2.0306889	9707	20	2.0742264	10085
5	1.9896187	9398	45	2.0316604	9715	25	2.0752358	10094
10	1.9905591	9404	50	2.0326327	9723	30	2.0762462	10104
15	1.9915002	9411	55	2.0336058	9731	35	2.0772575	10113
20	1.9924420	9418	93. 0	2.0345797	9739	40	2.0782698	10123
25	1.9933844	9424	5	2.0355544	9747	45	2.0792830	10132
30	1.9943274	9430	10	2.0365298	9754	50	2.0802971	10141
35	1.9952711	9437	15	2.0375061	9763	55	2.0813122	10151
40	1.9962155	9444	20	2.0384832	9771	97. 0	2.0823282	10160
45	1.9971607	9452	25	2.0394612	9780	5	2.0833453	10171
50	1.9981064	9457	30	2.0404399	9787	10	2.0843633	10180
55	1.9990529	9465	35	2.0414194	9795	15	2.0853822	10189
90. 0	2.0000000	9471	40	2.0423998	9804	20	2.0864022	10200
5	2.0009478	9478	45	2.0433810	9812	25	2.0874231	10209
10	2.0018964	9486	50	2.0443630	9820	30	2.0884450	10219
15	2.0028456	9492	55	2.0453459	9829	35	2.0894679	10229
20	2.0037955	9499	94. 0	2.0463296	9837	40	2.0904917	10238
25	2.0047461	9506	5	2.0473142	9846	45	2.0915166	10249
30	2.0056974	9513	10	2.0482996	9854	50	2.0925424	10258
35	2.0066494	9520	15	2.0492858	9862	55	2.0935692	10268
40	2.0076022	9528	20	2.0502729	9871	98. 0	2.0945971	10279
45	2.0085556	9534	25	2.0512608	9879	5	2.0956260	10289
50	2.0095098	9542	30	2.0522496	9888	10	2.0966558	10298
55	2.0104647	9549	35	2.0532392	9896	15	2.0976867	10309
91. 0	2.0114203	9556	40	2.0542297	9905	20	2.0987186	10319
5	2.0123767	9564	45	2.0552211	9914	25	2.0997515	10329
10	2.0133337	9570	50	2.0562134	9923	30	2.1007855	10340
15	2.0142915	9578	55	2.0572065	9931	35	2.1018205	10350
20	2.0152500	9585	95. 0	2.0582005	9940	40	2.1028565	10360
25	2.0162093	9593	5	2.0591954	9949	45	2.1038935	10370
30	2.0171693	9600	10	2.0601911	9957	50	2.1049316	10381
35	2.0181301	9608	15	2.0611877	9966	55	2.1059707	10391
40	2.0190916	9615	20	2.0621853	9976	99. 0	2.1070109	10402

TABLE V. Seconde Table générale du mouv. parabol. des Comètes.

Anomal.	Log mouv. moyen.	Differ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Differ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Differ.
99° 0'	2.1070109	10412	102° 40'	2.1538734	10913	106° 20'	2.2031123	11496
5	2.1080521	10423	45	2.1549647	10925	25	2.2042619	11510
10	2.1090944	10433	50	2.1560572	10938	30	2.2054129	11525
15	2.1101377	10444	55	2.1571510	10950	35	2.2065654	11539
20	2.1111821	10455	103. 0	2.1582460	10963	40	2.2077193	11553
25	2.1122276	10465	5	2.1593423	10975	45	2.2088746	11568
30	2.1132741	10476	10	2.1604398	10988	50	2.2100314	11582
35	2.1143217	10487	15	2.1615386	11000	55	2.2111896	11597
40	2.1153704	10497	20	2.1626386	11013	107. 0	2.2123493	11611
45	2.1164201	10509	25	2.1637399	11025	5	2.2135104	11626
50	2.1174710	10519	30	2.1648424	11038	10	2.2146730	11641
55	2.1185229	10530	35	2.1659462	11051	15	2.2158371	11656
100. 0	2.1195759	10542	40	2.1670513	11063	20	2.2170027	11670
5	2.1206301	10552	45	2.1681576	11077	25	2.2181697	11685
10	2.1216853	10563	50	2.1692653	11089	30	2.2193382	11700
15	2.1227416	10575	55	2.1703742	11101	35	2.2205082	11716
20	2.1237991	10585	104. 0	2.1714843	11116	40	2.2216798	11730
25	2.1248576	10597	5	2.1725959	11128	45	2.2228528	11745
30	2.1259173	10608	10	2.1737087	11141	50	2.2240273	11760
35	2.1269781	10619	15	2.1748228	11154	55	2.2252033	11775
40	2.1280400	10630	20	2.1759382	11168	108. 0	2.2263808	11791
45	2.1291030	10642	25	2.1770550	11180	5	2.2275599	11806
50	2.1301672	10653	30	2.1781730	11194	10	2.2287405	11821
55	2.1312325	10664	35	2.1792924	11207	15	2.2299226	11837
101. 0	2.1322989	10676	40	2.1804131	11220	20	2.2311063	11852
5	2.1333665	10688	45	2.1815351	11234	25	2.2322915	11867
10	2.1344353	10699	50	2.1826585	11247	30	2.2334782	11883
15	2.1355052	10710	55	2.1837832	11260	35	2.2346665	11898
20	2.1365762	10722	105. 0	2.1849092	11274	40	2.2358563	11915
25	2.1376484	10734	5	2.1860366	11287	45	2.2370478	11929
30	2.1387218	10745	10	2.1871653	11301	50	2.2382407	11946
35	2.1397963	10757	15	2.1882954	11315	55	2.2394353	11961
40	2.1408720	10769	20	2.1894269	11328	109. 0	2.2406314	11977
45	2.1419489	10781	25	2.1905597	11342	5	2.2418291	11993
50	2.1430270	10792	30	2.1916939	11356	10	2.2430284	12009
55	2.1441062	10804	35	2.1928295	11370	15	2.2442293	12025
102. 0	2.1451866	10816	40	2.1939665	11383	20	2.2454318	12041
5	2.1462682	10829	45	2.1951048	11397	25	2.2466359	12057
10	2.1473511	10840	50	2.1962445	11411	30	2.2478416	12073
15	2.1484351	10852	55	2.1973856	11426	35	2.2490489	12089
20	2.1495203	10865	106. 0	2.1985282	11439	40	2.2502578	12106
25	2.1506068	10876	5	2.1996721	11453	45	2.2514684	12122
30	2.1516944	10889	10	2.2008174	11468	50	2.2526806	12138
35	2.1527833	10901	15	2.2019642	11481	55	2.2538944	12155
40	2.1538734		20	2.2031123		110. 0	2.2551099	

TABLE V. Seconde Table générale du mouv. parabol. des Comètes.

Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.
110° 0'	2.2551099		113° 40'	2.3103004		117° 20'	2.3691827	
5	2.2563270	12171	45	2.3115956	12952	25	2.3705682	13855
10	2.2575458	12188	50	2.3128927	12971	30	2.3719559	13877
15	2.2587662	12204	55	2.3141917	12990	35	2.3733459	13900
20	2.2599883	12221	114. 0	2.3154927	13010	40	2.3747380	13921
25	2.2612120	12237	5	2.3167955	13028	45	2.3761324	13944
30	2.2624374	12254	10	2.3181003	13048	50	2.3775290	13966
35	2.2636645	12271	15	2.3194071	13068	55	2.3789279	13989
40	2.2648933	12288	20	2.3207159	13088	118. 0	2.3803290	14011
45	2.2661238	12305	25	2.3220266	13107	5	2.3817324	14034
50	2.2673560	12322	30	2.3233392	13126	10	2.3831380	14056
55	2.2685899	12339	35	2.3246538	13146	15	2.3845460	14080
111. 0	2.2698255	12356	40	2.3259704	13166	20	2.3859562	14102
5	2.2710628	12373	45	2.3272889	13185	25	2.3873687	14125
10	2.2723018	12390	50	2.3286094	13205	30	2.3887835	14148
15	2.2735425	12407	55	2.3299320	13226	35	2.3902006	14171
20	2.2747850	12425	115. 0	2.3312565	13245	40	2.3916200	14194
25	2.2760292	12442	5	2.3325830	13265	45	2.3930418	14218
30	2.2772752	12460	10	2.3339116	13286	50	2.3944658	14240
35	2.2785229	12477	15	2.3352421	13305	55	2.3958922	14264
40	2.2797723	12494	20	2.3365747	13326	119. 0	2.3973210	14288
45	2.2810235	12512	25	2.3379093	13346	5	2.3987521	14311
50	2.2822765	12530	30	2.3392460	13367	10	2.4001856	14335
55	2.2835312	12547	35	2.3405847	13387	15	2.4016214	14358
112. 0	2.2847878	12566	40	2.3419255	13408	20	2.4030596	14382
5	2.2860461	12583	45	2.3432683	13428	25	2.4045002	14406
10	2.2873062	12601	50	2.3446132	13449	30	2.4059432	14430
15	2.2885680	12618	55	2.3459602	13470	35	2.4073886	14454
20	2.2898317	12637	116. 0	2.3473092	13490	40	2.4088364	14478
25	2.2910972	12655	5	2.3486603	13511	45	2.4102867	14503
30	2.2923645	12673	10	2.3500136	13533	50	2.4117393	14526
35	2.2936336	12691	15	2.3513689	13553	55	2.4131944	14551
40	2.2949046	12710	20	2.3527264	13575	120. 0	2.4146519	14575
45	2.2961774	12728	25	2.3540859	13595	5	2.4161119	14600
50	2.2974520	12746	30	2.3554476	13617	10	2.4175743	14624
55	2.2987284	12764	35	2.3568114	13638	15	2.4190392	14649
113. 0	2.3000067	12783	40	2.3581774	13660	20	2.4205066	14674
5	2.3012869	12802	45	2.3595454	13680	25	2.4219764	14698
10	2.3025689	12820	50	2.3609157	13703	30	2.4234488	14724
15	2.3038528	12839	55	2.3622881	13724	35	2.4249236	14748
20	2.3051385	12857	117. 0	2.3636626	13745	40	2.4264010	14774
25	2.3064261	12876	5	2.3650394	13768	45	2.4278809	14799
30	2.3077157	12896	10	2.3664183	13789	50	2.4293633	14824
35	2.3090071	12914	15	2.3677994	13811	55	2.4308482	14849
40	2.3103004	12933	20	2.3691827	13833	121. 0	2.4323356	14874

TABLE V. Seconde Table générale du mouv. parabol. des Comètes.

Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.
121° 0'	2.4323356		124° 40'	2.5004375		128° 20'	2.5742925	
5	2.4338256	14900	45	2.5020488	16113	25	2.5760451	17526
10	2.4353182	14926	50	2.5036630	16142	30	2.5778011	17560
15	2.4368134	14952	55	2.5052803	16173	35	2.5795606	17595
20	2.4383111	14977	125. 0	2.5069006	16203	40	2.5813237	17631
25	2.4398114	15003	5	2.5085239	16233	45	2.5830902	17665
30	2.4413143	15029	10	2.5101502	16263	50	2.5848603	17701
35	2.4428199	15056	15	2.5117795	16293	55	2.5866340	17737
40	2.4443280	15081	20	2.5134119	16324	129. 0	2.5884112	17772
45	2.4458387	15107	25	2.5150473	16354	5	2.5901919	17807
50	2.4473521	15134	30	2.5166857	16384	10	2.5919762	17843
55	2.4488681	15160	35	2.5183273	16416	15	2.5937641	17879
122. 0	2.4503868	15187	40	2.5199719	16446	20	2.5955556	17915
5	2.4519081	15213	45	2.5216196	16477	25	2.5973507	17951
10	2.4534321	15240	50	2.5232704	16508	30	2.5991494	17987
15	2.4549588	15267	55	2.5249243	16539	35	2.6009518	18024
20	2.4564881	15293	126. 0	2.5265813	16570	40	2.6027578	18060
25	2.4580201	15320	5	2.5282415	16602	45	2.6045675	18097
30	2.4595548	15347	10	2.5299048	16633	50	2.6063810	18135
35	2.4610923	15375	15	2.5315713	16665	55	2.6081981	18171
40	2.4626324	15401	20	2.5332409	16696	130. 0	2.6100188	18207
45	2.4641753	15429	25	2.5349138	16729	5	2.6118433	18245
50	2.4657210	15457	30	2.5365898	16760	10	2.6136715	18282
55	2.4672694	15484	35	2.5380690	16792	15	2.6155035	18320
123. 0	2.4688205	15511	40	2.5399514	16824	20	2.6173393	18358
5	2.4703744	15539	45	2.5416371	16857	25	2.6191788	18395
10	2.4719311	15567	50	2.5433260	16889	30	2.6210221	18433
15	2.4734906	15595	55	2.5450181	16921	35	2.6228692	18471
20	2.4750529	15623	127. 0	2.5467135	16954	40	2.6247201	18509
25	2.4766179	15650	5	2.5484122	16987	45	2.6265749	18548
30	2.4781858	15679	10	2.5501141	17019	50	2.6284335	18586
35	2.4797565	15707	15	2.5518193	17052	55	2.6302959	18624
40	2.4813301	15736	20	2.5535278	17085	131. 0	2.6321622	18663
45	2.4829065	15764	25	2.5552397	17119	5	2.6340324	18702
50	2.4844857	15792	30	2.5569549	17152	10	2.6359065	18741
55	2.4860678	15821	35	2.5586734	17185	15	2.6377846	18781
124. 0	2.4876528	15850	40	2.5603953	17219	20	2.6396666	18820
5	2.4892407	15879	45	2.5621205	17252	25	2.6415525	18859
10	2.4808315	15908	50	2.5638491	17286	30	2.6434424	18899
15	2.4924252	15937	55	2.5655811	17320	35	2.6453362	18938
20	2.4940218	15966	128. 0	2.5673166	17355	40	2.6472340	18978
25	2.4956213	15995	5	2.5690554	17388	45	2.6491359	19019
30	2.4972237	16024	10	2.5707977	17423	50	2.6510418	19059
35	2.4988291	16054	15	2.5725434	17457	55	2.6529517	19099
40	2.5004375	16084	20	2.5742925	17491	132. 0	2.6548657	19140

TABLE V. Seconde Table générale du mouv. parabol. des Comètes.

Anomal.	Log mouv. moyen.	Differ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Differ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Differ.
132° 0'	2.6548657	19180	135° 40'	2.7433320	21131	139° 20'	2.8411458	23451
5	2.6567837	19221	45	2.7454451	21180	25	2.8434909	23510
10	2.6587058	19262	50	2.7475631	21228	30	2.8458419	23567
15	2.6606320	19303	55	2.7496859	21276	35	2.8481986	23626
20	2.6625623	19344	136. 0	2.7518135	21325	40	2.8505612	23685
25	2.6644967	19386	5	2.7559460	21374	45	2.8529297	23743
30	2.6664353	19427	10	2.7560834	21424	50	2.8553040	23802
35	2.6683780	19469	15	2.7582258	21473	55	2.8576842	23861
40	2.6703249	19511	20	2.7603731	21523	140. 0	2.8600703	23921
45	2.6722760	19553	25	2.7625254	21573	5	2.8624624	23981
50	2.6742313	19596	30	2.7646827	21622	10	2.8648605	24041
55	2.6761909	19638	35	2.7668449	21673	15	2.8672646	24101
133. 0	2.6781547	19680	40	2.7690122	21723	20	2.8696747	24161
5	2.6801227	19723	45	2.7711845	21774	25	2.8720908	24222
10	2.6820950	19766	50	2.7733619	21826	30	2.8745130	24283
15	2.6840716	19808	55	2.7755445	21876	35	2.8769413	24345
20	2.6860524	19852	137. 0	2.7777321	21927	40	2.8793758	24406
25	2.6880376	19895	5	2.7799248	21979	45	2.8818164	24468
30	2.6900271	19939	10	2.7821227	22031	50	2.8842632	24530
35	2.6920210	19983	15	2.7843258	22082	55	2.8867162	24592
40	2.6940193	20026	20	2.7865340	22135	141. 0	2.8891754	24655
45	2.6960219	20070	25	2.7887475	22187	5	2.8916409	24718
50	2.6980289	20114	30	2.7909662	22239	10	2.8941127	24782
55	2.7000403	20159	35	2.7931901	22292	15	2.8965909	24845
134. 0	2.7020562	20204	40	2.7954193	22345	20	2.8990754	24908
5	2.7040766	20248	45	2.7976538	22399	25	2.9015662	24973
10	2.7061014	20293	50	2.7998937	22452	30	2.9040635	25037
15	2.7081307	20338	55	2.8021389	22506	35	2.9065672	25101
20	2.7101645	20383	138. 0	2.8043895	22559	40	2.9090773	25166
25	2.7122028	20428	5	2.8066454	22614	45	2.9115939	25232
30	2.7142456	20474	10	2.8089068	22667	50	2.9141171	25297
35	2.7162930	20520	15	2.8111735	22722	55	2.9166468	25363
40	2.7183450	20566	20	2.8134457	22777	142. 0	2.9191831	25429
45	2.7204016	20611	25	2.8157234	22831	5	2.9217260	25495
50	2.7224627	20658	30	2.8180065	22887	10	2.9242755	25562
55	2.7245285	20705	35	2.8202952	22943	15	2.9268317	25628
135. 0	2.7265990	20751	40	2.8225895	22998	20	2.9293945	25695
5	2.7286741	20798	45	2.8248893	23054	25	2.9319640	25764
10	2.7307539	20845	50	2.8271947	23110	30	2.9345404	25831
15	2.7328384	20892	55	2.8295057	23167	35	2.9371235	25899
20	2.7349276	20940	139. 0	2.8318224	23223	40	2.9397134	25968
25	2.7370216	20987	5	2.8341447	23280	45	2.9423102	26036
30	2.7391203	21035	10	2.8364727	23337	50	2.9449138	26106
35	2.7412238	21082	15	2.8388064	23394	55	2.9475244	26176
40	2.7433320		20	2.8411458		143. 0	2.9501420	

TABLE V. Seconde Table générale du mouv. parabol. des Comètes.

Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.
143° 0′	2.9501420	26245	146° 40′	3.0726927	29656	150° 20′	3.2119521	33904
5	2.9527665	26315	45	3.0756583	29742	25	3.2153425	34011
10	2.9553980	26385	50	3.0786325	29829	30	3.2187436	34121
15	2.9580365	26455	55	3.0816154	29916	35	3.2221557	34230
20	2.9606820	26527	147. 0	3.0846070	30004	40	3.2255787	34341
25	2.9633347	26598	5	3.0876074	30091	45	3.2290128	34452
30	2.9659945	26670	10	3.0906165	30180	50	3.2324580	34563
35	2.9686615	26741	15	3.0936345	30269	55	3.2359143	34677
40	2.9713356	26814	20	3.0966614	30358	151. 0	3.2393820	34789
45	2.9740170	26886	25	3.0996972	30448	5	3.2428609	34902
50	2.9767056	26959	30	3.1027420	30538	10	3.2463511	35016
55	2.9794015	27033	35	3.1057958	30629	15	3.2498527	35131
144. 0	2.9821048	27106	40	3.1088587	30720	20	3.2533658	35248
5	2.9848154	27180	45	3.1119307	30811	25	3.2568906	35363
10	2.9875334	27255	50	3.1150118	30904	30	3.2604269	35479
15	2.9802589	27329	55	3.1181022	30996	35	3.2639748	35597
20	2.9929918	27404	148. 0	3.1212018	31089	40	3.2675345	35715
25	2.9957322	27480	5	3.1243107	31182	45	3.2711060	35834
30	2.9984802	27555	10	3.1274289	31277	50	3.2746894	35953
35	3.0012357	27631	15	3.1305566	31371	55	3.2782847	36074
40	3.0039988	27708	20	3.1336937	31466	152. 0	3.2818921	36195
45	3.0067696	27784	25	3.1368403	31562	5	3.2855116	36317
50	3.0095480	27862	30	3.1399965	31657	10	3.2891433	36439
55	3.0123342	27939	35	3.1431622	31754	15	3.2927872	36562
145. 0	3.0151281	28017	40	3.1463376	31851	20	3.2964434	36686
5	3.0179298	28095	45	3.1495227	31949	25	3.3001120	36810
10	3.0207393	28174	50	3.1527176	32046	30	3.3037930	36936
15	3.0235567	28253	55	3.1559222	32145	35	3.3074866	37062
20	3.0263820	28332	149. 0	3.1591367	32244	40	3.3111928	37188
25	3.0292152	28412	5	3.1623611	32344	45	3.3149116	37315
30	3.0320564	28492	10	3.1655955	32443	50	3.3186431	37444
35	3.0349056	28573	15	3.1688398	32544	55	3.3223875	37573
40	3.0377629	28655	20	3.1720942	32646	153. 0	3.3261448	37703
45	3.0406284	28735	25	3.1753588	32747	5	3.3299151	37833
50	3.0435019	28816	30	3.1786335	32849	10	3.3336984	37965
55	3.0463835	28898	35	3.1819184	32952	15	3.3374949	38097
146. 0	3.0492733	28981	40	3.1852136	33056	20	3.3413046	38230
5	3 0521714	29064	45	3.1885192	33159	25	3.3451276	38364
10	3.0550778	29147	50	3.1918351	33264	30	3.3489640	38499
15	3.0579925	29232	55	3.1951615	33369	35	3.3528139	38635
20	3.0609157	29315	150. 0	3.1984984	33473	40	3.3566774	38771
25	3.0638472	29400	5	3.2018457	33581	45	3.3605545	38908
30	3.0667872	29485	10	3.2052038	33688	50	3.3644453	39046
35	3.0697357	29570	15	3.2085726	33796	55	3.3683499	39185
40	3.0726927		20	3.2119521		154. 0	3.3722684		

TABLE V. Seconde Table générale du mouv. parabol. des Comètes.

Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.
154° 0'	3.3722684	39325	157° 40'	3.5599080	46483	161° 20'	3.7844418	56381
5	3.3762009	39466	45	3.5645563	46673	25	3.7900799	56651
10	3.3801475	39607	50	3.5692236	46863	30	3.7957450	56922
15	3.3841082	39749	55	3.5739099	47055	35	3.8014372	57197
20	3.3880831	39893	158. 0	3.5786154	47250	40	3.8071569	57473
25	3.3920724	40038	5	3.5833404	47445	45	3.8129042	57753
30	3.3960762	40183	10	3.5880849	47641	50	3.8186795	58034
35	3.4000945	40328	15	3.5928490	47838	55	3.8244829	58318
40	3.4041273	40475	20	3.5976328	48039	162. 0	3.8303147	58604
45	3.4081748	40623	25	3.6024367	48239	5	3.8361751	58894
50	3.4122371	40773	30	3.6072606	48443	10	3.8420645	59186
55	3.4163144	40922	35	3.6121049	48646	15	3.8479831	59481
155. 0	3.4204066	41072	40	3.6169695	48852	20	3.8539312	59779
5	3.4245138	41225	45	3.6218547	49059	25	3.8599091	60080
10	3.4286363	41378	50	3.6267606	49268	30	3.8659171	60382
15	3.4327741	41532	55	3.6316874	49478	35	3.8719553	60687
20	3.4369273	41686	159. 0	3.6366352	49690	40	3.8780240	60996
25	3.4410959	41843	5	3.6416042	49904	45	3.8841236	61309
30	3.4452802	41999	10	3.6465946	50120	50	3.8902545	61623
35	3.4494801	42157	15	3.6516066	50337	55	3.8964168	61940
40	3.4536958	42317	20	3.6566403	50556	163. 0	3.9026108	62260
45	3.4579275	42477	25	3.6616959	50776	5	3.9088368	62585
50	3.4621752	42638	30	3.6667735	50999	10	3.9150953	62912
55	3.4664390	42801	35	3.6718734	51223	15	3.9213865	63242
156. 0	3.4707191	42965	40	3.6769957	51449	20	3.9277107	63575
5	3.4750156	43129	45	3.6821406	51676	25	3.9340682	63913
10	3.4793285	43294	50	3.6873082	51907	30	3.9404595	64252
15	3.4836579	43461	55	3.6924989	52137	35	3.9468847	64596
20	3.4880040	43630	160. 0	3.6977126	52370	40	3.9533443	64942
25	3.4923670	43798	5	3.7029496	52606	45	3.9598385	65293
30	3.4967468	43968	10	3.7082102	52844	50	3.9663678	65648
35	3.5011436	44140	15	3.7134946	53083	55	3.9729326	66005
40	3.5055576	44313	20	3.7188029	53323	164. 0	3.9795331	66366
45	3.5099889	44487	25	3.7241352	53566	5	3.9861697	66730
50	3.5144376	44662	30	3.7294918	53812	10	3.9928427	67099
55	3.5189038	44837	35	3.7348730	54059	15	3.9995526	67473
157. 0	3.5233875	45015	40	3.7402789	54308	20	4.0062999	67849
5	3.5278890	45195	45	3.7457097	54560	25	4.0130848	68229
10	3.5324085	45374	50	3.7511657	54814	30	4.0199077	68614
15	3.5369459	45556	55	3.7566471	55069	35	4.0267691	69002
20	3.5415015	45739	161. 0	3.7621540	55327	40	4.0336693	69395
25	3.5460754	45924	5	3.7676867	55587	45	4.0406088	69792
30	3.5506678	46108	10	3.7732454	55850	50	4.0475880	70194
35	3.5552786	46294	15	3.7788304	56114	55	4.0546074	70599
40	3.5599080		20	3.7844418		165. 0	4.0616673	

TABLE V. Seconde Table générale du mouv. parabol. des Comètes.

Anomal.	Log mouv. moyen.	Differ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Differ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Differ.
165° 0′	4.0616674	71010	168° 40′	4.4207091	94942	172° 20′	4.9254425	141562
5	4.0687684	71423	45	4.4302033	95664	25	4.9395987	143146
10	4.0759107	71842	50	4.4397697	96400	30	4.9539133	144765
15	4.0830949	72266	55	4.4494097	97144	35	4.9683898	146413
20	4.0903215	72696	169. 0	4.4591241	97901	40	4.9830311	148109
25	4.0975911	73129	5	4.4689142	98669	45	4.9978420	149836
30	4.1049040	73567	10	4.4787811	99447	50	5.0128256	151608
35	4.1122607	74011	15	4.4887258	100240	55	5.0279864	153423
40	4.1196618	74459	20	4.4987498	101043	173. 0	5.0433287	155275
45	4.1271077	74913	25	4.5088541	101859	5	5.0588562	157176
50	4.1345990	75372	30	4.5190400	102689	10	5.0745738	159124
55	4.1421362	75836	35	4.5293089	103531	15	5.0904862	161118
166. 0	4.1497198	76307	40	4.5396620	104387	20	5.1065980	163163
5	4.1573505	76781	45	4.5501007	105258	25	5.1229143	165260
10	4.1650286	77261	50	4.5606265	106142	30	5.1394403	167410
15	4.1727547	77749	55	4.5712407	107038	35	5.1561813	169618
20	4.1805296	78242	170. 0	4.5819445	107953	40	5.1731431	171881
25	4.1883538	78740	5	4.5927398	108882	45	5.1903312	174208
30	4.1962278	79244	10	4.6036280	109826	50	5.2077520	176596
35	4.2041522	79755	15	4.6146106	110786	55	5.2254116	179049
40	4.2121277	80274	20	4.6256892	111764	174. 0	5.2433165	181573
45	4.2201551	80796	25	4.6368656	112757	5	5.2614738	184166
50	4.2282347	81326	30	4.6481413	113769	10	5.2798904	186834
55	4.2363673	81864	35	4.6595182	114796	15	5.2985738	189581
167. 0	4.2445537	82407	40	4.6709978	115845	20	5.3175319	192407
5	4.2527944	82958	45	4.6825823	116913	25	5.3367726	195319
10	4.2610902	83515	50	4.6942736	117996	30	5.3563045	198319
15	4.2694417	84080	55	4.7060732	119103	35	5.3761364	201413
20	4.2778497	84652	171. 0	4.7179835	120228	40	5.3962777	204602
25	4.2863149	85232	5	4.7300063	121375	45	5.4167379	207895
30	4.2948381	85819	10	4.7421438	122543	50	5.4375274	211294
35	4.3034200	86415	15	4.7543981	123734	55	5.4586568	214805
40	4.3120615	87018	20	4.7667715	124947	175. 0	5.4801373	218433
45	4.3207633	87630	25	4.7792662	126184	5	5.5019806	222186
50	4.3295263	88248	30	4.7918846	127445	10	5.5241992	226068
55	4.3383511	88877	35	4.8046291	128731	15	5.5468060	230088
168. 0	4.3472388	89514	40	4.8175022	130043	20	5.5698148	234253
5	4.3561902	90159	45	4.8305065	131381	25	5.5932401	238569
10	4.3652061	90814	50	4.8436446	132747	30	5.6170970	243047
15	4.3742875	91477	55	4.8569193	134140	35	5.6414017	247696
20	4.3834352	92151	172. 0	4.8703333	135563	40	5.6661713	252523
25	4.3926503	92834	5	4.8838896	137016	45	5.6914236	257543
30	4.4019337	93526	10	4.8975912	138499	50	5.7171779	262765
35	4.4112863	94228	15	4.9114411	140014	55	5.7434544	268201
40	4.4207091		20	4.9254425		176. 0	5.7702745	

TABLE V. Seconde Table générale du mouv. parabol. des Comètes.

Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.	Anomal.	Log mouv. moyen.	Différ.	Anom.	Log mouv. moyen.	Différ.
176° 0'	5.7702745	273866	177° 20'	6.2979617	413360	178° 40'	7.2006993	840719
5	5.7976611	279775	25	6.3392977	426933	45	7.2847712	898763
10	5.8256386	285943	30	6.3819910	441427	50	7.3746475	965417
15	5.8542329	292388	35	6.4261337	456938	55	7.4711892	1042748
20	5.9834717	299128	40	6.4718275	473575	179. 0	7.5754640	1133551
25	5.9133845	306185	45	6.5191850	491470	5	7.6888191	1241684
30	5.9440030	313583	50	6.5683320	510766	10	7.8129875	1372638
35	5.9753613	321345	55	6.6194086	531638	15	7.9502513	1532498
40	6.0074958	329498	178. 0	6.6725724	554285	20	8.1037011	1739689
45	6.0404456	338079	5	6.7280009	578948	25	8.2776700	2008344
50	6.0742535	347112	10	6.7858957	605906	30	8.4785044	2375387
55	6.1089647	356642	15	6.8464863	635490	35	8.7160431	2907259
177. 0	6.1446289	366708	20	6.9100353	668113	40	9.0067690	3748130
5	6.1812997	377357	25	6.9768466	704263	45	9.3815820	5282717
10	6.2190354	388643	30	7.0472729	744547	50	9.9098537	9030884
15	6.2578997	400620	35	7.1217276	789717	55	10.8129421	
20	6.2979617		40	7.2006993		180. 0	....	

Usage et comparaison des deux Tables.

1. Pour les deux tables, il faut avoir également

$$\log h \ldots\ 9.7656500$$
$$\tfrac{1}{2}\log h \ldots\ 9.8828250$$
$$\text{et } \tfrac{3}{2}\log h = \log h^{\frac{3}{2}} \ldots\ 9.6484750$$

Pour notre table, il faut de plus, compl. $\frac{3}{2}\log h \ldots$ 0.3515250

2. Pour la table de Barker, il faut de plus (25)

log 0.912281, ou compl. log 1.096154... 9.9601284

$C.\ h^{\frac{3}{2}} \ldots$ 0.3515250

log mouvement diurne... 0.3116534 (A)

et son complément.... 9.6883466 (A')

3. On demande u pour...... le 22 janvier $7^h 3' 31''$
il faut avoir le passage p = 71 13.7.35
t = 49 6.4. 4

Table I, p. 430...... 6^h = 0.25
$4'$ = 002777777
$4''$ = 000046296
t = 49.252824074

Cette préparation est commune aux deux tables; nous allons présenter de front le reste de l'opération dans les deux systèmes

Barker.	*La Caille.*
log t... 1.6924311	.... 1.6924311
log (A)... 0.3116534	comp. $\frac{3}{2}$ log. h... 0.3515250
log mouv. diurne... 2.0040845	t' = 110' 6512...... 2.0439561
tab. V. 90° 20'.... 2.0037955	tab. IV. 110.50...... 90° 18' 23"8
différence....... 2890	1239"2 × 0.1512...0.1...2. 3.92
différ. pour 5'.... 9506	0.05 1. 1.96
	0.001 1.24
2890... 3.46090	0.0002 0.25
C. 9506... 6.02200	u = 90.21.31.2
log constant.. 300... 2.47712	
1' 31"2...... 1.96002	
90° 21.31.2 = u.	

Il est évident qu'ici la table de La Caille a l'avantage; il est bien plus simple de multiplier la différence 1239",2 de la table par la fraction décimale 0.1512, que d'employer quatre logarithmes dont un, à la vérité, est constant; du reste, on voit que le résultat est le même. Dans les 44 premiers degrés, pour avoir la partie proportionnelle de l'anomalie, on opérerait sur les nombres naturels, comme on fait ici sur le logarithme...

Passons au problème inverse.

Problème

Problème. On demande [illegible] tems de l'anomalie $u = 90° 21' 31'',2$.

Barker.			*La Caille.*
$u = 90° 21' 31''2$			$u = 90° 21' 31''2$
tab. V.. 90.20......	2.0037955	tab. IV, θ..110i50....	90.18.23.8
différ... 1.31.2	1.95999	log diff... 2.27277..	3. 7.4
différ. table.... 9506	3.97800	C. diff. table 6.90686..	1239″2
C. log 300.....	7.52288	log *a*... 9.17963	
log... 2890..	3.46087		
		$a =$ 0i 15122	
log table 2.0037955	temstab. $= \theta + a =$ 110.65122		2.0439563
log (A′) 9.6883466		$\frac{2}{3}$ log *h*...	9.6484750
log *t*.. 1.6924311	$t =$ 49i.25282;	$t =$ 49i25284...	1.6924313

Ici, La Caille emploie un logarithme de moins dans le calcul de la partie proportionnelle, mais il est obligé de chercher log *t*, ce qui rétablit l'équilibre; ajoutons encore que dans les 44 premiers degrés de l'anomalie, Barker est obligé de chercher le logarithme du moyen mouvement que sa table donne en nombres naturels.

Ainsi, en définitif, la table de La Caille a l'avantage décidément, quand il s'agit de chercher l'anomalie par le tems, ce qui est le cas le plus ordinaire de beaucoup. Elle n'a aucun désavantage, quand il s'agit de chercher le tems par l'anomalie; problème qui n'a guères lieu que pour déterminer le tems du périhélie, quand on est à la recherche des élémens : c'est ce qui fait que j'ai toujours préféré la forme que La Caille avait donnée à sa table. Cependant, comme quelques astronomes ont paru en dernier lieu donner la préférence à la forme imaginée par Barker, quoiqu'elle exige de plus le log. du mouvement diurne, je me suis déterminé à calculer de nouveau cette table en entier, ce qui m'a bien confirmé dans l'idée que le travail en est beaucoup plus long que celui de l'autre table; mais l'usage qu'en fait M. Gauss, pour la recherche des élémens des planètes nouvellement découvertes, était une raison suffisante pour que je desirasse assurer à cette table toute la précision que l'on pouvait souhaiter.

En la calculant avec plus de soin par des moyens nouveaux, je n'ai pas négligé de la comparer aux tables de Barker et de Zach. Jusqu'à 45°, Barker a donné le mouvement à quatre décimales seu-

lement. Sur les 540 nombres dont cette partie est composée, j'en ai trouvé 22 dont la dernière figure était un peu trop forte ou trop faible, mais de si peu, qu'on n'aurait pu la corriger sans introduire une erreur presque égale, mais de signe contraire. En général, ces erreurs ont disparu dans la table de M. de Zach, qui est à cinq décimales; mais une petite négligence dans l'interpolation depuis 8° 20′ jusqu'à 8° 50′, a donné des erreurs de 11, 10, 9, 7, 4, 3 et 1 sur la cinquième décimale. Plus loin, j'ai trouvé des erreurs de 2, 3, 4 et même 5 sur la dernière figure, mais les plus fortes sont en très-petit nombre.

A 45°, les deux auteurs commencent à donner les logarithmes, et je les avais imités; le format du livre faisant commencer une page à 44°, j'ai été contraint de donner les logarithmes un degré plutôt que je ne l'avais annoncé ci-dessus (29 et 30).

Dans le reste de la table, Barker se contente de cinq décimales. M. de Zach en a donné 7, ce qui est bien plus difficile; aussi différons-nous presque toujours au moins d'une unité, quelquefois de 2, 3, 4, 5, 6, 7; nous différons même de 9, à 161° 40′.

Pour estimer à quoi peuvent monter ces erreurs en jours, on peut employer la formule $dn = 1^{j}0096154 \left(\frac{n}{K}\right) d\log n$ (27), et c'est ainsi que j'ai formé la table suivante, où l'on voit, selon l'anomalie, l'effet que peut produire une unité sur la dernière figure du logarithme.

Anomal.	Effet de 1 part.	Anomal.	Effet de 1 part.	Anomal.	Effet de 1 part.	Anomal.	Effet de 1 part.
110°	0^{j}00003.3	162°	0^{j}00170.8	168°	0^{j}00561.4	174°	0^{j}04420
120	0.00006.5	163	0.00201.7	169	0.00726.5	175	0.07625
140	0.00018.2	164	0.00240.8	170	0.00963.9	176	0.14871
150	0.00039.7	165	0.00290.9	171	0.01318.3	177	0.35213
160	0.00125.3	166	0.00356.3	172	0.01872.5	178	1.1605
161	0.00146.0	167	0.00443.2	173	0.02788.7	179	9.4960

On voit que l'erreur de 9 unités sur la septième décimale, à 161° 40′, ne produit pas 0^{j},0126. Mais on ne rencontre pas d'anomalies aussi fortes; ainsi, malgré quelques petites irrégularités, la table avait déjà toute l'exactitude nécessaire.

Je n'ai pas bien senti ce qui avait pu déterminer Barker à donner le mouvement moyen au lieu du nombre de jours, ou son logarithme; mais j'ai dû suivre son exemple.

CHAPITRE XXXIV.

Des Satellites.

1. On appelle du nom de *satellites* des planètes secondaires qui circulent autour d'une planète principale et qui accompagnent celle-ci dans sa route annuelle autour du soleil. C'est ce qui leur a fait aussi donner le nom de *compagnes* (*comites*), mais la dénomination de *satellite* a prévalu. Ainsi la lune est le satellite de la terre. Mercure et Vénus n'ont point de satellites; du moins on n'a jamais pu les apercevoir, pas même dans les passages de ces deux planètes sur le soleil. Cassini crut en voir un à Vénus, mais c'était une illusion optique, une seconde image de la planète, et cette seconde image présentait en effet la même phase que Vénus. Short commit la même erreur, qui s'est depuis renouvelée plusieurs fois. Lambert a eu l'idée de rassembler ces prétendues observations pour voir s'il était possible de les représenter en supposant une révolution constante. Ses tables ont paru dans les Éphémérides de Berlin, 1777, p. 178 et suiv. Il supposait la révolution de $11^j\ 5^h$ environ, l'équation du centre de 23°, l'excentricité 0.195 un peu moindre que celle de Mercure, l'inclinaison de 64°, le demi-diamètre du satellite 0.28 de celui de la terre; le demi-grand axe $64\frac{1}{2}$ demi-diamètres de la terre et $66\frac{1}{2}$ demi-diamètres de Vénus. Le mouvement de l'apogée $3^s\ 19°$ en un an et celui du nœud — $3^s\ 7'$. Depuis plus de 30 ans personne n'a plus parlé du prétendu satellite dont Baudouin avait fait le sujet d'un Mémoire lu à l'Académie des Sciences. Voyez aussi les Éphémérides du P. Hell, 1766.

Mars n'a point de satellite, Jupiter en a quatre, Saturne sept, Uranus six. On ne voit donc aucune loi qui règle ni le nombre ni même l'existence des satellites autour d'une planète.

2. Galilée paraît être le premier qui ait su construire une lunette par des règles certaines; il paraît être aussi le premier qui ait vu les satel-

lites. Le 7 janvier 1610, il regardait Jupiter avec une bonne lunette qu'il venait de terminer, et que probablement il voulait essayer. Il aperçut auprès de la planète trois petites étoiles sur une ligne qui lui sembla parallèle à l'écliptique; deux à l'orient et une à l'occident. Le lendemain les trois étoiles étaient à l'occident; ce qui ne pouvait s'expliquer par le mouvement de Jupiter qui était alors rétrograde; il fallait donc que ces étoiles eussent changé de place. Les observations des jours suivans confirmèrent ce soupçon; Galilée vit clairement que les trois étoiles tournaient autour de Jupiter. Le 13 il en vit quatre, ce qui peut faire penser que la lunette n'était pas d'une grande force, et que les premiers jours un des satellites était trop voisin du disque pour être distingué; peut-être aussi que l'un des satellites était éclipsé ou qu'il se trouvait caché par le disque de la planète. En effet, Galilée avait commencé le 12 par entrevoir à l'orient du disque un point presque imperceptible qui augmenta peu à peu de lumière; mais le 13, enfin, il vit à la fois les quatre satellites. Il les revit le 20, le 22, ensorte qu'il ne lui resta plus le moindre doute ni sur le nombre des satellites ni sur la réalité de leurs mouvemens. Il nomma ces quatre lunes *astres de Médicis*. Il remarqua qu'ils décrivaient des cercles inégaux; que celui dont le cercle était moindre avait aussi une révolution moins longue. Il crut voir dans leurs diamètres apparens des variations qui lui parurent difficiles à expliquer. Dans sa lettre sur les taches du soleil, il annonce qu'il a déterminé les révolutions synodiques des quatre satellites, et qu'il en a fait des tables qu'il compte publier bientôt. La lettre est du 1er décembre 1612.

3. Simon Marius prétendit avoir fait cette découverte quelques jours plutôt; Galilée réclame avec amertume contre cette prétention à la deuxième page du *Saggiatore;* il va jusqu'à dire que Marius, loin d'avoir été le premier qui ait vu les satellites, ne les a réellement jamais observés, et qu'il a pris dans le Traité *Intorno alle cose che stanno in su l'acqua*, publié en 1612, les révolutions qui y étaient assignées aux quatre satellites.

Voici ces révolutions, suivant les deux auteurs; j'y ai joint celles que j'ai trouvées par mes dernières recherches sur les satellites de Jupiter.

	SUIVANT GALILÉE.	SUIVANT MARIUS.	SUIVANT NOUS.
I...	$1^j\ 18^h\ \frac{1}{2}$ presque.	$1^j\ 18^h\ 28'\ 30''$	$1^j\ 18^h\ 28'\ 35''945374812$
II...	3.13 $\frac{1}{3}$ environ.	3.13.18	3.13.17.53,73010602
III..	7. 4.	7. 3.56 34	7. 3.59.35,825112810
IV..	16.18 à peu près.	16.18. 9.15	16.18. 5. 7,020984400

Ces nombres sont en effet très-ressemblans, mais non assez pour démontrer le plagiat. L'argument le plus fort en faveur de Galilée, c'est que la première observation, où Marius donne la position des satellites relativement à Jupiter, se trouve être la seconde de Galilée, et que l'ouvrage de Marius n'a paru que plus de trois ans après le *Nuntius sidereus*. C'est donc à Galilée qu'appartient la découverte, puisqu'il l'a publiée le premier, et que sa première observation est plus ancienne d'un jour. Enfin ce qui peut faire douter de la bonne foi de Marius, quoi qu'en dise Weidler, c'est qu'il ne rapporte qu'une seule observation, et que son livre ne contient absolument rien qui ne puisse se déduire de ceux de Galilée qu'il avait certainement lus.

4. L'ouvrage de Simon Marius a pour titre : *Mundus jovialis a.* 1609, *detectus, ope perspicilli Belgici, hoc est quatuor jovialium planetarum cum theoria, tum tabulæ propriis observationibus maxime fundatæ ex quibus situs illorum ad jovem ad quodvis tempus datum promtissime et facillime supputari potest*, 1614. L'auteur s'y est fait graver avec sa lunette, qui est longue comme le bras; l'objectif paraît avoir un doigt et demi-d'ouverture. Au-dessous, on lit : *Inventum proprium mundus jovialis..... dante deo.* Dans sa Préface, il raconte toutes les peines qu'il a eues pour se procurer cette lunette; on y voit que le 29 décembre 1609, vieux style, c'est-à-dire le 8 janvier 1610, nouveau style, il vit trois étoiles en ligne droite à l'occident de Jupiter. Telle est en effet l'observation de Galilée, c'est la même date; l'observation est donc bonne : mais l'a-t-il faite ou empruntée? c'est ce qui est difficile à décider. Il en appelle au témoignage de celui qui lui avait procuré la lunette. Il déclare n'avoir aucune intention de porter atteinte aux droits de Galilée chez les Italiens; il se borne à réclamer pour lui-même une

gloire égale parmi les Germains; il rapporte ensuite des remarques qu'il a faites sur la scintillation des étoiles, sur les nébuleuses, et il paraît difficile de révoquer en doute qu'il n'ait en effet tiré bon parti de sa lunette, et qu'il n'ait pu voir aussi les satellites. Au reste il avoue que le *Nuntius sidereus* de Galilée lui a été utile; et il faut convenir aussi que son ouvrage est plus complet et plus méthodique. Il donne aux quatre satellites les noms de Mercure, Vénus, Jupiter et Saturne; il a depuis changé ces noms en ceux de Io, Europe, Ganymède et Calisto. Il remarque que le troisième est évidemment plus gros qu'aucun des trois autres qui lui paraissent à peu près égaux entre eux. Il voudrait les désigner collectivement par le nom d'astres de Brandebourg, comme Galilée les avait appelés astres de Médicis. Il expose sept phénomènes différens qu'il a constamment observés :

1°. Les satellites changent continuellement de place, et relativement à Jupiter, ils sont tantôt à l'orient et tantôt à l'occident.

2°. Chaque satellite a dans ses élongations des limites qu'il ne passe jamais.

3°. Leurs mouvemens sont plus sensibles quand ils approchent de Jupiter, plus lents ou nuls en apparence quand ils sont dans leurs digressions.

4°. Les révolutions sont plus longues pour les satellites qui s'éloignent le plus de Jupiter.

5°. Le centre de leurs mouvemens égaux est Jupiter, et avec Jupiter ils tournent autour du soleil et non autour de la terre.

6°. La ligne qui passe par les points des deux digressions est parallèle à l'écliptique, mais dans le cours de leurs révolutions ils s'écartent au nord et au sud de cette ligne; ce qui est surtout sensible quand deux satellites sont en conjonction et que l'un s'approche de Jupiter tandis que l'autre s'en éloigne. Ceci n'est vrai que dans certaines circonstances, et c'est un des argumens dont se sert Galilée pour prouver que Marius n'a pas réellement observé les satellites.

7°. Les satellites ne paraissent pas toujours de la même grosseur. Nous avons vu que Galilée avait fait la même remarque, qui n'est vraie que pour les instans qui précèdent ou suivent les éclipses totales. Les circonstances atmosphériques peuvent aussi influer sur ces apparences.

Toutes ces remarques sont implicitement comprises dans ce qu'avait publié Galilée.

5. Marius expose ensuite les phénomènes sur lesquelles sont appuyées les remarques précédentes. La première était facile, la seconde exigeait un grand nombre d'observations. Il trouva que les rayons des quatre cercles étaient de 3, 5, 8 et 13 minutes, ce qui diffère peu de ce qu'avait publié Galilée; la troisième était une suite nécessaire et une preuve du mouvement circulaire; la quatrième offrait alors beaucoup de difficulté, Marius y employa les retours aux plus grandes digressions. Nous avons déjà vu que ses nombres diffèrent peu de ceux de Galilée. Pour se démontrer la cinquième, il fit des tables de mouvemens moyens, pour les comparer à l'observation; il reconnut la nécessité de tenir compte de la parallaxe annuelle. A cette occasion il assure qu'il avait trouvé le système de Tycho, dans un tems où il ignorait encore jusqu'au nom de cet astronome, et que l'idée lui en était venu en lisant le système de Copernic, il en cite plusieurs témoins qui, à la réserve d'un organiste de Hall, étaient malheureusement tous morts à l'époque où il écrit. La sixième remarque est évidente quand elle est vraie; Marius n'a eu que le tort de la croire générale et sans exception. Elle le conduisit à construire des tables de latitude qui devaient souvent être fautives. Pour la septième, il rappelle l'embarras qu'elle avait causé à Galilée. Il en réfute les explications, et pour lui, il cherche la cause de ce phénomène dans les phases des satellites; mais la parallaxe annuelle de Jupiter et celle des satellites n'étant jamais de 12°, la partie visible et éclairée du disque est toujours $2\delta \cos^2 6°$ au moins, ou 0,989, ou 99 centièmes du disque; cette explication est donc insuffisante.

6. Marius conjecture ensuite que les satellites doivent s'éclipser dans leurs conjonctions supérieures. Il cherche la longueur du cône d'ombre de Jupiter. Il en conclut que d'après leurs distances à Jupiter et leur peu de latitude, les trois premiers satellites doivent toujours s'éclipser. Il tire la même conclusion pour le quatrième, en quoi il se trompe. Galilée dont la lunette était meilleure avait pu voir ces éclipses et Marius emprunte son témoignage. Il n'ose assurer si les satellites peuvent s'éclipser mutuellement en tout ou en partie, mais il croit la chose vraisemblable. Elle paraît certaine, puisque les satellites produisent des éclipses partielles sur le disque de Jupiter. Mais on ne connaît aucune observation de ces éclipses mutuelles.

Marius expose ensuite la construction de ses tables, qui ne présentent que des mouvemens moyens; mais il n'avait pas assez bien déterminé

les révolutions pour que ces tables s'accordassent long-tems avec les observations.

7. Dès les premiers tems de sa déconverte, Galilée avait senti que les mouvemens des satellites pouvaient servir à trouver les longitudes géographiques; il s'appliqua même à construire des tables qu'il ne put jamais conduire à un degré de perfection qui le satisfit, et après y avoir travaillé pendant 27 ans, il finit par ne rien publier. Peiresc et Moriu ne furent pas plus heureux; Reneri, disciple de Galilée, s'en était occupé dix ans, mais à sa mort on ne put retrouver le manuscrit qu'il se disposait à faire imprimer.

Hodierna voulut réparer cette perte, et ce travail l'occnpa pendant cinq ans. Son livre, publié en 1656, est curieux; il a pour titre : *Medicæorum Ephemerides nunquam hactenus apud mortales editæ, cum suis introductionibus in tres partes distinctis, et Menologiæ jovis compendium. Panormi*, 1656. (Ménologie, Traité des Lunes).

L'auteur en commençant, se demande pourquoi les satellites, qui, dans les lunettes, paraissent comme des étoiles de sixième grandeur, n'avaient jamais été vus avant Galilée. Il en donne pour raison l'éclat de Jupiter, dont ils ne s'écartent jamais que de quelques minutes. Cependant le bruit s'est répandu, il y a quelques années, qu'on les avait aperçus à la vue simple; mais on en doutait, les astronomes qui ont la meilleure vue n'ont jamais pu les distinguer.

Il établit ensuite que les satellites de Jupiter sont au nombre de quatre seulement, contre l'opinion de Fontana et de Schirlæus, qui en comptaient l'un sept et l'autre neuf.

8. Pour distinguer les satellites, il remarque que le plus lent ne s'écarte jamais de 15 diamètres de Jupiter ou de 15 modules, mais seulement de 12 à 13; et comme les autres s'en écartent encore moins, celui-ci est reconnaissable dans ses plus grandes digressions.

Le troisième satellite ne s'écarte jamais de neuf modules; ainsi quand on voit un satellite devenir stationnaire à cette distance, on est sûr que ce ne peut être que le troisième; d'ailleurs il est le plus gros de tous.

Le satellite qui deviendra stationnaire et puis rétrograde vers cinq modules de distance à Jupiter, sera nécessairement le second.

Le premier ne s'écarte jamais de plus de trois modules, et son mouvement est le plus rapide. Hodierna se contentait d'estimer ces distances,

tances, et dans cette estime il se faisait aider par les personnes qui assistaient à ses observations.

Depuis ce tems Cassini et Newton ont exprimé ces distances en demi-modules ou demi-diamètres de Jupiter. Voici ces distances suivant tous ces auteurs; nous désignerons les quatre satellites par les symboles suivans :

Satellites.	Galilée.	Marius.	Schirlæus.	Hodierna.	Cassini.	Newton.	Pound.
☾ʹ	6.0	6.0	6.0	7.0	5.67	5,965	1′51″ 6‴
☾ʺ	10.0	10.0	8.0	11.0	9.00	9,494	2.56.47
☾‴	16.0	16.0	12.0	18.0	14.38	15,141	4.42. 0
☾ⁱᵛ	24.0	26.0	20.0	29.0	25.30	26,630	8.16. 0

Pound n'a véritablement observé que les deux satellites extérieurs; il a mesuré la distance 8′ 16″ du ☾ⁱᵛ avec un micromètre appliqué à une lunette de 15 pieds. Celle du ☾‴, 4′ 42″ a été observée avec une lunette de 123 pieds. De ces deux mesures il a conclu les deux autres par le calcul.

Vendelinus en comparant les distances aux révolutions, avait reconnu qu'elles étaient dans le rapport établi par Képler; il suffit donc d'une distance observée pour en conclure toutes les autres par les révolutions. Or, j'ai déterminé les révolutions synodiques par l'ensemble de toutes les éclipses observées pendant 140 ans, j'en ai conclu les révolutions périodiques, et les révolutions sidérales d'après les règles que nous avons données pour la lune (XXV. 27); j'ai comparé et fait concourir les deux observations de Pound; et de là sont résultés les nombres donnés par M. Laplace (Mécan. céleste, tome IV, page 85), c'est-à-dire,

5.698491 .... 9.066548 .... 14.461895 .... 25.435900

Ces nombres tombent entre ceux de Cassini et de Newton, et se rapprochent en général beaucoup plus des premiers; on voit qu'il ne faut faire aucune attention aux anciennes mesures, qui n'étaient que des estimes assez incertaines.

9. Retournons à Hodierna. Galilée avait donné aux satellites le nom

d'astres de Médicis; en suivant cette idée, Hodierna nomme le premier satellite *Principharus*, le phare du prince régnant d'Étrurie; le second *Victripharus*, le phare de Victoire, du nom de la princesse alors régnante; le troisième *Cosmipharus*, ou le phare de Cosme, premier duc de Médicis; enfin le quatrième *Fernipharus*, par syncope pour *Ferdinandipharus*, du nom du prince Ferdinand. Il voulut même donner à Jupiter le nom de la ville de Florence; alors les bandes devenaient l'Arno qui traverse la ville. Il avait eu d'abord l'intention de nommer les quatre satellites Alphipharus, Bétipharus, Cappipharus et Deltipharus, des quatre premières lettres de l'alphabet latin grécisées, sans quoi Cappipharus eût été Gammipharus.

10. Hodierna voulut déterminer les inclinaisons des orbites, et ne fut guères plus heureux que ses prédécesseurs. Il donnait 1° 59′ à l'inclinaison du premier, c'était trop peu; 3° 7′ à celle du second, ce qui approche assez de la vérité; 5° 6′ et 8° 29′ à celles des deux autres, ce qui est considérablement exagéré. Ses révolutions étaient moins bonnes que celles de Galilée. Toute cette partie de son ouvrage est fort inexacte; il passe ensuite aux éclipses.

11. En appliquant à Jupiter ce que nous avons dit du cône d'ombre de la terre (XXVI. 6), on conçoit que Jupiter doit projeter un cône d'ombre beaucoup plus large et plus long. D'abord, pour plus large, cela est évident, car il aura pour base un grand cercle du globe de Jupiter à fort peu près; or le rayon de ce globe est 10,86 fois celui du globe terrestre (XXVII, p. dern.); ainsi le cône sera 11 fois plus large. L'angle au sommet de ce cône ou C, se trouvera par la formule $\sin C = \sin d - \sin p$ (XXVI. 7), d étant le demi-diamètre du soleil vu de Jupiter, et p la parallaxe horizontale du soleil vu de Jupiter. Mais la distance de Jupiter au soleil étant 5,20279 et $\delta = 15' 45''$, demi-diamètre du soleil vu de la terre, nous aurons $\sin d = \frac{\sin \delta}{5.20279}$; la parallaxe du soleil pour Jupiter sera $\frac{10.86 \times 8''7}{5.20279}$; car les parallaxes sont en raison directe de la grosseur de la planète et inverse de la distance. On aura donc

$$\sin C = \frac{\sin \delta}{5.20279} - \frac{10.86 \sin 8''7}{5.20279},$$

et l'axe du cône sera

$$\frac{\text{rayon de Jupiter}}{\sin C} = \frac{\text{rayon de Jupiter}}{\frac{\sin \delta}{5.20279} - \frac{10.86 \sin 8''7}{5.20279}} = \frac{5.20279 \text{ rayon de Jupiter}}{\sin \delta - 10.86 \sin 8''7}$$

$$= \frac{5.20279 . 5.20279 \sin 18''15}{\sin \delta - 10.86 \sin 8.7} = \frac{(5.20279)^2 \frac{18''5}{945''}}{1 - \frac{10.86 \times 8.7}{945}} = 0.5888\,;$$

c'est-à-dire environ six dixièmes de la distance du soleil à la terre.

Mais le rayon de l'orbite du quatrième satellite est $5.20279 \sin 8' 16'' = 0.01251$; l'axe s'étend donc à une distance 47 fois aussi grande que celle du quatrième satellite, ainsi tous les satellites dans leurs conjonctions supérieures doivent traverser le cône d'ombre et s'éclipser, à moins que leurs latitudes ne les écartent de cet axe assez pour qu'ils continuent de recevoir la lumière du soleil, ce qui n'a lieu que pour le quatrième, quand il est près de ses limites ou dans ses plus grandes latitudes.

12. Hodierna remarque que le quatrième satellite s'éclipse 21 fois par an, le troisième 51 fois, le second 103 et le premier 207; c'est-à-dire, autant de fois qu'ils parcourent de degrés en un jour. Remarque plus curieuse qu'utile, et qui, pour être exacte, demanderait que le soleil décrivît un degré par jour. En effet, supposons que le soleil fasse un degré par jour et le satellite 21; quand le soleil aura fait une circonférence, le quatrième satellite en aura fait 21 et se sera éclipsé 21 fois.

13. Il ne suffit pas de savoir que le satellite s'éclipse, il faut aussi déterminer si l'éclipse sera visible de la terre; elle ne le serait jamais du centre du soleil; un spectateur placé à la surface du soleil le plus avantageusement possible, ne verrait qu'une éclipse partielle; il n'y aurait qu'un seul point qui pût apercevoir le satellite jusqu'à son immersion dans l'ombre, et ce point serait dans la tangente aux deux globes. La figure 79 représente l'orbite de la terre, le soleil, Jupiter, les orbites des quatre satellites, et le cône d'ombre qui est peu convergent ou peu différent d'un cylindre, puisque l'angle au sommet n'a guères que 6'. Les satellites entrent dans l'ombre en I pour en sortir en E; nous faisons pour un moment abstraction de la latitude du satellite qui fera qu'au lieu de décrire un diamètre, il décrira une corde plus ou moins oblique de la section circulaire de l'ombre.

Prolongeons les côtés CPA, CQD du cône jusqu'en B et en F; il est évident que la terre verra les immersions tout le tems qui lui sera nécessaire pour décrire l'arc BOA de son orbite; elle verra les émersions tant qu'elle sera en un point de l'arc DRF.

14. Ainsi avant l'opposition de Jupiter, ou quand Jupiter passe au méridien entre minuit et midi, la terre verra les immersions à l'occident de Jupiter; et cela à peu près depuis la conjonction de Jupiter jusqu'à l'opposition, car l'arc AD est fort peu de chose. En effet, l'angle SDF est le demi-diamètre horizontal du soleil, $\frac{1}{2}$ AD $=$ CSD $= \frac{1}{2}$ diamètre ☉ — demi-angle au sommet du cône $= \delta - C = \delta - d + p$ $= \delta - \frac{\delta}{5,2} + \frac{10.86 \times 8'',7}{5,2} = \frac{4,2\delta}{5,2} + 18''$; $AD = \frac{4,2\delta}{2,6} + 36'' = \left(\frac{21}{13}\right) 945'' + 36''$ $= 1526'' + 36'' = 1562'' = 26'\,2''$ environ; il ne faut donc pas 11 heures à la terre pour parcourir l'arc AD; ainsi se trouvant en A à l'immersion, elle pourra se trouver en D long-tems avant l'émersion dans l'éclipse suivante. L'intervalle entre les deux observations est égal à la révolution plus la durée de l'éclipse. De l'opposition à la conjonction, c'est-à-dire tant que Jupiter passe au méridien entre midi et minuit, la terre verra les émersions à l'orient de Jupiter. Du point E' menez la tangente E'P au globe de Jupiter; vous aurez beau la prolonger, elle ne traversera jamais l'orbite de la terre, d'où il résultera que jamais la terre ne verra les émersions dans l'arc oriental AB de son orbite, ni les immersions dans l'arc occidental DF; on ne pourra donc jamais observer les durées des éclipses du premier satellite.

15. Du point E'', émersion du second satellite, menez la tangente E''PMN; elle coupera l'orbite de la terre en deux points M et N, et par conséquent sur l'arc MON la terre pourra voir l'immersion et l'émersion, c'est-à-dire observer la durée de l'éclipse; il en sera de même sur l'arc correspondant M'RN' de l'autre côté de l'orbite; mais l'une des deux observations sera moins certaine, parce que le satellite paraîtra fort voisin du bord de Jupiter. Dans le reste de sa révolution la terre ne pourra faire que l'une des deux observations.

Dans les arcs KOL et K'RL' on verra les deux phases du troisième satellite.

Dans les arcs GOH et G'RH' on verra les deux phases du quatrième.

Si le satellite a une latitude, elle facilitera les observations.

16. Hodierna indique dans quelles circonstances on peut observer le commencement ou la fin des éclipses des deux premiers satellites et les deux phases pour les derniers, mais sa théorie est fort imparfaite, il n'a pas vu que l'on pouvait observer aussi les deux phases du second; rien pourtant n'est plus simple que ce problème, et l'auteur avait assez de données pour le résoudre un peu mieux.

Soit (fig. 80) P le pôle de l'orbite de Jupiter, T le lieu jovicentrique de la terre, a celui du satellite; menez l'arc Ta qui sera la mesure de l'angle au centre de Jupiter entre la terre et le satellite,

$$\begin{aligned}\cos Ta &= \cos PT \cos Pa + \sin PT \sin Pa \cos P \\ &= \sin L \sin \lambda + \cos L \cos \lambda \cos(\text{☾} - \text{♁});\end{aligned}$$

$(\text{☾} - \text{♁})$ est la différence de longitude jovicentrique entre la terre et le satellite, L la latitude jovicentrique de la terre, λ celle du satellite. Négligez les latitudes, et vous aurez $Ta = (\text{☾} - \text{♁})$.

17. On peut trouver d'une autre manière cet arc Ta. Soit (fig. 81) IV l'orbite de Jupiter, PP′ les deux pôles de cette orbite, EC l'écliptique, CNV sera l'inclinaison de l'orbite de Jupiter sur celle de la terre, N le nœud de Jupiter, E′Q l'équateur de Jupiter, CN′Q sera l'inclinaison de cet équateur sur l'écliptique. Soit CN′Q = I. VN″Q sera l'inclinaison de cet équateur sur l'orbite de Jupiter. Soit a le lieu du satellite sur son orbite qui diffère très-peu de l'équateur; soit T le lieu de la terre sur l'écliptique, mais vu de Jupiter. Menez Ta,

$$\begin{aligned}\cos Ta &= \cos N'T \cos N'a + \sin N'T \sin N'a \cos N', \\ \cos A &= \cos(\text{♁} - \text{☊})\cos(\text{☾} - \text{☊}) + \sin(\text{♁} - \text{☊})\sin(\text{☾} - \text{☊})\cos I \\ &= \cos(\text{♁} - \text{☊})\cos(\text{☾} - \text{☊}) + \sin(\text{♁} - \text{☊})\sin(\text{☾} - \text{☊}) \\ &\quad - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} I \sin(\text{♁} - \text{☊})\sin(\text{☾} - \text{☊}) \\ &= \cos(\text{♁} - \text{☊} - \text{☾} + \text{☊}) - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} I \sin(\text{♁} - \text{☊})\sin(\text{☾} - \text{☊}) \\ &= \cos(\text{♁} - \text{☾}) - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} I \sin(\text{♁} - \text{☊})\sin(\text{☾} - \text{☊}) \\ &= \cos(\text{☾} - \text{♁}) - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} I \sin(\text{♁} - \text{☊})\sin(\text{☾} - \text{☊}), \\ \cos(\text{☾} - \text{♁}) - \cos A &= +2\sin^2 \tfrac{1}{2} I \sin(\text{♁} - \text{☊})\sin(\text{☾} - \text{☊}), \\ 2\sin\tfrac{1}{2}(A - \text{☾} + \text{♁})\sin\tfrac{1}{2}(A + \text{☾} - \text{♁}) &= 2\sin^2 \tfrac{1}{2} I \sin(\text{♁} - \text{☊})\sin(\text{☾} - \text{☊}) \\ &= \sin 302'' \sin(\text{♁} - \text{☊})\sin(\text{☾} - \text{☊}), \\ A - (\text{☾} - \text{♁}) &= \frac{302'' \sin(\text{♁} - \text{☊})\sin(\text{☾} - \text{☊})}{\sin\frac{1}{2}(A + \text{☾} - \text{♁})} = \frac{302'' \sin(\text{♀} - \text{☊})\sin(\text{☾} - \text{☊})}{\sin(\text{☾} - \text{♁})} \\ A &= (\text{☾} - \text{♁}) + \frac{302'' \sin(\text{♁} - \text{☊})\sin(\text{☾} - \text{☊})}{\sin(\text{☾} - \text{♁})}.\end{aligned}$$

18. Soit maintenant (fig. 82) A le centre de Jupiter, a celui du satellite, et T celui de la terre,

$$\operatorname{tang} T = \frac{Aa \sin A}{TA - Aa \cos A}, \quad T = \left(\frac{Aa}{TA}\right)\frac{\sin A}{\sin 1''} + \left(\frac{Aa}{TA}\right)^2 \frac{\sin 2A}{\sin 2''} + \text{etc.}$$

Le premier terme suffit toujours même pour le quatrième satellite,

$$T = \left(\frac{Aa}{TA}\right)\sin\left\{(\mathbb{C} - \text{♁}) + \frac{302'' \sin(\text{♁} - \Omega)\sin(\mathbb{C} - \Omega)}{\sin(\mathbb{C} - \text{♁})}\right\}$$
$$= \left(\frac{r}{D}\right)\frac{\sin(\mathbb{C} - \text{♁})}{\sin 1''} + \left(\frac{r}{D}\right)302'' \sin(\text{♁} - \Omega)\sin(\mathbb{C} - \Omega)\operatorname{coséc}(\mathbb{C} - \text{♁}),$$

T sera l'élongation du satellite pour le centre de la terre. Si cette élongation surpasse le demi-diamètre de Jupiter vu du centre de la terre, le satellite sera visible : si elle est moindre que le demi-diamètre, le satellite sera vu sur le disque de Jupiter, ou caché derrière ce disque, selon que $(\mathbb{C} - \text{♁})$ sera un angle aigu ou obtus.

Le centre du satellite sera sur le bord de Jupiter, si l'on a

$$T = \left(\frac{r}{D}\right)\frac{\sin(\mathbb{C} - \text{♁})}{\sin 1''} + 302''\left(\frac{r}{D}\right)\sin(\text{♁} - \Omega)\sin(\mathbb{C} - \Omega)\operatorname{coséc}(\mathbb{C} - \text{♁})$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\text{diam.}\,\text{♃} = \frac{93'',2}{D};$$

ainsi le centre sera sur le bord de Jupiter, si

$$\frac{r \sin(\mathbb{C} - \text{♁})}{\sin 1''} + 302''.\, r \sin(\text{♁} - \Omega)\sin(\mathbb{C} - \Omega)\operatorname{coséc}(\mathbb{C} - \text{♁}) = 93'',2,$$

ou si

$$\frac{\sin(\mathbb{C} - \text{♀})}{\sin 1''} + 302'' \sin(\text{♁} - \Omega)\sin(\mathbb{C} - \Omega)\operatorname{coséc}(\mathbb{C} - \text{♁}) = \left(\frac{93'',2}{r}\right),$$

ou

$$\sin(\mathbb{C} - \text{♁}) = \left(\frac{93'',2}{r}\right)\sin 1'' - 302''.\sin(\text{♁} - \Omega)\sin(\mathbb{C} - \Omega)\operatorname{coséc}(\mathbb{C} - \text{♁})\sin 1'';$$

mais

$$r' = 5.20279 \sin 1'\,51'',6, \quad r'' = 5.20279 \sin 2'\,56'',8,$$
$$r''' = 5.20279 \sin 4'\,42'', \quad r^{\text{IV}} = 5.20279 \sin 8'\,16''.$$

Le terme $\sin 302'' \sin(\text{♁} - \Omega)\sin(\mathbb{C} - \Omega)\operatorname{coséc}(\mathbb{C} - \text{♁})$ est ordinairement fort petit en comparaison du premier; en le négligeant, on

aurait approximativement les valeurs suivantes, qui sont celles dn demi-diamètre de Jupiter vu des satellites et de la parallaxe horizontale des satellites vus de Jupiter.

$$\sin(\text{☾}' - \text{♁}) = \frac{93'',2 \sin 1''}{5.20279 \sin 1'51'',6} = \sin 9^\circ\, 14'.50'' = \sin 170^\circ\, 45'\, 10'',$$

$$\sin(\text{☾}'' - \text{♁}) = \sin 5^\circ\, 48'\, 30'' = \sin 174^\circ\, 11'\, 30'',$$

$$\sin(\text{☾}''' - \text{♁}) = \sin 3.38.30 = \sin 176.21.30,$$

$$\sin(\text{☾}^{\text{IV}} - \text{♁}) = \sin 2.\ 4.11 = \sin 177.55.49:$$

entre ces deux limites, le satellite sera visible; au-delà, il sera invisible. Nous négligeons ici l'aplatissement de Jupiter, qui rend le satellite visible un pen plus long-tems, et le demi-diamètre du satellite qui diminue la distance des bords. La longitude jovicentrique ♁ = 180° + longit. géoc. ♃; cette longitude varie peu dans nn jour. Au moyen de ces formules, on pourra calculer l'entrée du satellite sur le disque, ou son occultation sous le disque; ainsi, pour le premier,

$$\text{☾}' = \text{♁} \mp 9^\circ\, 14'\, 50'' \text{ donnera l'entrée sur le disque et la sortie,}$$

$$\text{☾}' = \text{♃} \mp 9^\circ\, 14'\, 50'' \text{ l'entrée et la sortie derrière le disque.}$$

Ces formules suffiraient pour se préparer à ces observations qu'on fait rarement, parce qu'elles sont trop difficiles et trop peu sûres pour être utiles.

19. Les formules générales du lieu géocentrique donneraient en tout tems les positions apparentes des quatre satellites; mais des orbites si petites à la distance où nous les voyons, permettent des moyens plus expéditifs. Voici ceux qui ont été pratiqués par Hodierna, et imités par tous les astronomes qui l'ont suivi.

Soit (fig. 83) Jupiter entouré des orbites de ses satellites. Si vous marquez sur ces orbites les points o et 180° de longitude par la ligne ♈♎, et que vous divisiez en degrés les quatre circonférences, vous serez en état d'y placer chaque jour chaque satellite, quand vous aurez des tables de leurs mouvemens jovicentriques. Vons y placerez le soleil en tirant la ligne ♃S, et la terre en tirant la ligne ♃T, qui fera avec ♃T un angle égal à la parallaxe annuelle de Jupiter; le cône d'ombre sera snr S♃ prolongée; la terre en T verra le centre de Jupiter en ♃, et les quatre orbites se projetteront orthographiquement sur la ligne AB, perpendiculaire à T♃. Des points que les quatre satellites occupent

sur leurs orbites, abaissez des perpendiculaires 1, 2, 3, 4, elles marqueront sur la projection les lieux des quatre satellites. Ainsi, dans notre figure, la ligne A, 4, 2, ♃, 1, 3, B sera ce qu'on appelle *configuration des satellites*. Jupiter, désigné par un disque blanc, en occupe le milieu; on supprime la ligne AB, on ne conserve que les quatre points qui sont les pieds des perpendiculaires. A côté de chaque point, on place un chiffre qui sert à distinguer le satellite. Les satellites s'approchent de Jupiter quand le chiffre est entre le point et Jupiter; ils s'en éloignent quand les points sont entre Jupiter et le chiffre. On voit par là s'ils sont directs ou rétrogrades, dans la partie supérieure ou dans la partie inférieure de leurs orbites. Si le satellite est caché derrière Jupiter, on met un point noir avec son chiffre vers le bord du tableau; si le satellite est sur le disque, on met au bord un petit disque blanc avec son chiffre. Cette construction néglige les latitudes. J'ai publié, dans la Connaissance des tems de 1808, des tables qui permettent d'avoir égard aux latitudes, et dispensent de toute figure et de l'instrument que Cassini a donné sous le nom de *jovilabe* (Lalande, 3054).

20. Pour construire les tables des mouvemens jovicentriques des satellites, voici les moyens d'Hodierna; il s'attacha à déterminer les tems des immersions dans l'ombre. Ainsi, le premier septembre 1655 après minuit, lorsque l'ascension droite du milieu du ciel était 13° 13', c'est-à-dire, suivant son calcul, le premier septembre à 14ʰ 12', ou 14ʰ 11' selon Lalande, il avait observé l'immersion du premier satellite. Par plusieurs observations de ce genre, il avait pu déterminer à fort peu près le tems de la révolution synodique. En effet, ouvrez une Éphéméride, celle de 1811, par exemple; par un milieu entre toutes les émersions calculées pour janvier, vous trouverez 1j 18ʰ 28' 57" pour le tems qui ramène les émersions, c'est à peu près la révolution cherchée; car d'une éclipse à la suivante, les inégalités et la demi-durée sont les mêmes. Par les immersions calculées pour le mois d'octobre, vous trouverez 1j 18ʰ 28' 20"; le milieu est 1j 18ʰ 28' 38", et il n'est pas en excès de 1",5. On conçoit qu'en répétant ces comparaisons pendant plusieurs années et en différentes saisons, on a dû arriver à une détermination assez précise. La révolution du premier satellite étant de 1j 18ʰ $\frac{1}{2}$ environ, les immersions ou les émersions avanceront à chaque fois de 5ʰ $\frac{1}{2}$ environ; ainsi une immersion observée à 7ʰ du matin, sera suivie d'une autre qui s'observera à 1ʰ $\frac{1}{2}$ après minuit, et d'une autre

autre à 8 heures du soir ; on pourra donc souvent observer deux éclipses consécutives, et quelquefois trois. Pour le second, dont la révolution est de $3^j\ 13^h\ 18'$, l'avance à chaque fois sera de $10^h\ 42'$; on aura donc aisément deux éclipses consécutives visibles de nuit. Pour le troisième, dont la révolution est de $7^j\ 4^h$ à peu près, les immersions retarderont de 4 heures ; celles du quatrième avanceront de 6 heures à peu près : d'ailleurs cette ressource est inutile pour les deux derniers dont on observe souvent les deux phases. Ce moyen est facile; mais il ne pouvait être, ni pour Galilée ni pour Hodierna, de la même précision qu'aujourd'hui, par le défaut des lunettes qui, grossissant fort peu, jetaient de l'incertitude sur les observations, surtout quand le satellite était trop voisin de Jupiter.

21. Les révolutions ainsi déterminées, il fallait, pour en conclure les conjonctions, avoir une idée des demi-durées. En voici le moyen appliqué à un exemple.

Le 20 novembre 1811, l'immersion du premier satellite pouvait s'observer à....................................	$10^h\ 14'\ 11''$
Le 22 nov. 1811, l'émersion pouvait s'observer à	6.53.57
Intervalle........................	1^j 20.39.46
ôtez la révolution moyenne...............	1.18.28.36
durée de l'éclipse................	2.11.10
demi-durée.....................	1. 5.35

L'émersion arrivait le...........	22 nov.	$6^h\ 53'\ 57''$
l'avant-dernière immersion le......	18	15.45.39
Intervalle............	3	15. 8.18
ôtez deux révolutions.....	3	12.57.12
durée de l'éclipse.....		2.11. 6
demi-durée..........		1. 5.33

On peut de même multiplier ces comparaisons. Hodierna pouvait donc trouver la demi-durée assez exactement; mais au lieu de $1^h\ 5'\ 34''$ que nous trouvons ici, il suppose 48', ce qui prouve combien ses observations étaient grossières, car les demi-durées pour le premier satellite ne varient que de 64' à 68'.

22. A l'immersion du.............	20 nov.	$10^h\ 14'\ 11''$
ajoutez la demi-durée.......		1. 5.34
vous aurez la coujonction supérieure...	20 nov.	11.19.45

Pour ce momeut, calculez la longitude héliocentrique de Jupiter, ce sera celle du satellite vue du centre de Jupiter. Vous savez que peudant la révolutiou 1j $18^h\ 28'\ 36''$, le satellite décrit 360° par son mouvement relatif; ajontez-y le mouvement de Jupiter pour le même intervalle de tems, vous aurez le mouvement vrai, d'où vous couclurez le mouvement diurne, et vous construirez la table des époques et celle des mouvemens moyens.

23. Par des opérations pareilles, Hodierna calcule la coujonction du second satellite, en supposant la demi-durée 49'; mais elle n'est jamais au-dessous de 65', ni au-dessus de 86'; l'erreur était donc plus forte encore que pour le premier.

En 1811, le 27 novembre, à $17^h\ 36'\ 27''$, on pouvait observer à Paris l'émersion du second satellite; mais c'était la seconde depuis l'opposition de Jupiter. On avait observé la dernière émersion.

Le	20 à	$12^h 16'\ 29''$
Intervalle..............	7	5.19.58
2 révolutions..........	7	2.35.58
durée.............		2.44.10
demi-durée............		1.22. 5
immersion.............	20	12.16.29
conjonction............	20	13.38.34

Quoique la demi-durée soit variable, il n'y a jamais dans ce calcul que l'erreur des observatious, car on emploie la demi-durée qui avait lieu ce jour-là.

24. Pour le troisième satellite, il avait observé l'immersion et l'émersion, et trouvait la durée de 2h 20'; la plus grande est de $2^h\ 27'$, la plus courte est d'une heure.

Pour le quatrième, il choisit de même une observation complète où il avait trouvé $2^h\ 57'$ pour la durée qui va quelquefois à $4^h\ 45'$.

On voit donc comment on a pu calculer les tables des moyens mouvemens, et se mettre en état de tracer chaque jour la figure des configurations des satellites. Pour plus d'exactitude, il convenait de dépouiller chacune des observations de l'effet du mouvement progressif de la lumière. Ainsi, en supposant que l'immersion ou l'émersion eût été observée lorsque Jupiter était à une distance D de la terre, on aurait retranché 493″,2.D de l'instant de l'observation, pour avoir exactement l'instant où le satellite se serait trouvé à la surface du cône d'ombre; on aurait obtenu de cette manière des révolutions, des demi-durées et des conjonctions plus exactes. Mais ensuite, après avoir calculé les configurations pour un instant donné, il aurait fallu ajouter à cet instant l'équation de la lumière; car les configurations ne peuvent être aperçues à l'instant même où elles ont lieu, mais seulement lorsque la lumière arrive à l'œil de l'observateur; et la distance de Jupiter à la terre pouvant être de 6,2 et un peu plus, l'équation de la lumière peut aller à 44′.

25. La conjonction ainsi calculée ne serait ni une conjonction moyenne, ni une conjonction vraie. La demi-durée, combinée avec l'instant de l'observation corrigé de l'équation de la lumière, ne donnera encore que le milieu de l'éclipse; et nous avons montré, en parlant des éclipses de lune, que ce milieu diffère en plus ou en moins du tems de la conjonction. Mais cette cause d'erreur se réduit presque à rien, si la demi-durée est la plus grande, car alors l'éclipse arrive tout auprès du nœud; alors on a la conjonction vraie. Pour la changer en conjonction moyenne, il faut tenir compte des inégalités de Jupiter et du satellite.

26. Soit T le tems de la conjonction moyenne, ♃ et ☾ les longitudes moyennes de Jupiter et du satellite; on aura ♃ — ☾ = o. Soient ♃ + E la longitude vraie de Jupiter, ☾ + E′ celle du satellite; la différence vraie de longitude à l'instant T sera

$$♃ + E - ☾ - E' = (♃ - ☾) + (E - E') = E - E',$$

puisque ♃ — ☾ = o.

Soit T + dT l'instant de la conjonction vraie, la différence de longitude sera

$$♃ + d♃ - ☾ - d☾ + E + dE - E' - dE' = o,$$

ou $\quad (d♃ - d☾) + (\mathrm{E} - \mathrm{E}') + (d\mathrm{E} - d\mathrm{E}') = 0$;

ou $\quad (d☾ - d♃) = (\mathrm{E} - \mathrm{E}') + (d\mathrm{E} - d\mathrm{E})$,

ou $\quad (d☾ + d\mathrm{E}') - (d♃ + d\mathrm{E}) = \mathrm{E} - \mathrm{E}'$.

Soient V et v les mouvemeus vrais du satellite et de Jupiter en une seconde de tems,

$$\mathrm{V} - v : (d☾ + d\mathrm{E}') - (d♃ + d\mathrm{E}) :: 1'' : d\mathrm{T} = \frac{(d☾ + d\mathrm{E}') - (d♃ + d\mathrm{E})}{\mathrm{V} - v} = \frac{\mathrm{E} - \mathrm{E}'}{\mathrm{V} - v}.$$

Ainsi on aura l'intervalle entre la conjonction moyenne et la conjonction vraie, en divisant par le mouvement vrai relatif, en 1″ de tems, la différence des inégalités qui avaient lieu à l'instant de la conjonction moyenne.

Soit $\quad \mathrm{V} = \mathrm{M} + x, \quad v = m + y,$

$$d\mathrm{T} = \frac{\mathrm{E} - \mathrm{E}'}{(\mathrm{M} - m) + (x - y)} = \frac{\left(\frac{\mathrm{E} - \mathrm{E}'}{\mathrm{M} - m}\right)}{1 + \left(\frac{x - y}{\mathrm{M} - m}\right)}$$

$$d\mathrm{T} = \left(\frac{\mathrm{E} - \mathrm{E}'}{\mathrm{M} - m}\right)\left[1 - \left(\frac{x - y}{\mathrm{M} - m}\right) + \left(\frac{x - y}{\mathrm{M} - m}\right)^2 - \text{etc.}\right];$$

M et m sont les mouvemens moyens pour une seconde de tems.

27. Mais nous avons aussi

$$d☾ - d♃ = (\mathrm{E} - \mathrm{E}') + (d\mathrm{E} - d\mathrm{E}') = (\mathrm{E} + d\mathrm{E}) - (\mathrm{E}' + d\mathrm{E}'),$$

le second membre sera la différence des inégalités à la conjonction vraie. Or

$$\mathrm{M} - m : (d☾ - d♃) :: 1'' : d\mathrm{T} = \frac{(d☾ - d♃)}{(\mathrm{M} - m)} = \frac{(\mathrm{E} + d\mathrm{E}) - (\mathrm{E}' + d\mathrm{E}')}{\mathrm{M} - m}.$$

Ainsi $d\mathrm{T}$ est composé de deux parties $\left(\frac{\mathrm{E} + d\mathrm{E}}{\mathrm{M} - m}\right) - \left(\frac{\mathrm{E}' + d\mathrm{E}'}{\mathrm{M} - m}\right)$, qui ont un diviseur commun et constant, au moins pour le même satellite. Les deux numérateurs sont la somme des inégalités de Jupiter, et la somme des inégalités du satellite à l'instant de la conjonction vraie; le premier terme s'ajoute à la conjonction moyenne pour avoir la vraie, le second s'en retranche : ce serait le contraire pour réduire une conjonction vraie observée à la conjonction moyenne. Nous ne connaissons pas encore

$(E' + dE')$, mais nous connaissons $(E + dE)$, c'est-à-dire la somme des inégalités de Jupiter en conjonction vraie. Ainsi, du tems de la conjonction observée, nous retrancherons $\left(\frac{E + dE}{M - m}\right)$; mais notre conjonction moyenne sera trop faible de $\left(\frac{E' + dE'}{M - m}\right)$ que nous aurions dû y ajouter.

28. Nous avons trouvé pour la lune, que la section du cône d'ombre avait pour rayon $\varpi + \pi - \delta$, c'est-à-dire la somme des parallaxes horizontales du satellite et du soleil — le demi-diamètre du soleil, ou, ce qui revient au même, le demi-diamètre de la planète principale vue du satellite + la parallaxe horizontale du soleil vue de la même planète — le demi-diamètre du soleil vu aussi de la planète,

$$\sin \varpi = \frac{93{,}2 \sin 1''}{r} = \frac{93{,}2 \sin 1''}{5.20279 \sin 1'\, 51'',6} = \sin 9^\circ\, 14'\, 50''$$

pour le premier satellite. Ainsi les nombres (18) sont les parallaxes horizontales des satellites.

La corde décrite par le satellite pendant l'éclipse est le mouvement vrai pour la demi-durée. Soit ρ le rayon de l'ombre, μ la demi-corde, $\frac{\mu}{\rho} = \sin B$, $\rho \cos B$ sera la plus courte distance dans les éclipses qui arrivent à 90° du nœud, c'est-à-dire dans les plus courtes éclipses, $\rho \cos B$ sera aussi la latitude. Dans les éclipses les plus longues, c'est-à-dire celles qui arrivent dans le nœud même, $\rho \cos B = 0$; la longitude en conjonction est la longitude du nœud : dans les limites la longitude en conjonction, augmentée et diminuée de 90°, donnera les deux nœuds, et $\frac{\rho \cos B}{r}$ sera la tangente de l'inclinaison. Ainsi les plus longues éclipses donneront le lieu du nœud; les plus courtes donneront l'inclinaison. Par des observations faites à de longs intervalles, on verra si les nœuds sont fixes ou mobiles, l'inclinaison constante ou variable. On ne pourra jamais être bien sûr d'avoir observé une éclipse dans le nœud non plus que dans les limites : on doit donc s'attendre à ne pas trouver un accord parfait dans les résultats. Nous supposons ici que le satellite disparaît à l'instant où son centre entre dans l'ombre, cela peut n'être pas bien exact, mais l'erreur sera constante à fort peu près; nous aurons ou élargi ou rétréci la section du cône; c'est un mal inévitable, mais il n'est pas bien grand.

29. Hodierna n'a pas osé donner la formule des durées; il étoit trop peu sûr de ses latitudes; il n'avait pu se procurer en si peu d'années un nombre suffisant d'éclipses, et celles qu'il avait observées n'étaient sans doute que d'une bonté très-médiocre. Vers le même tems, Cassini s'occupa de cette théorie avec beaucoup plus de succès. Dès 1666, il avait déjà des tables beaucoup meilleures; et en 1668, il publia l'ouvrage intitulé : *Ephemerides Bononienses mediceorum siderum ex hypothesibus et tabulis J. Dominici Cassini.* Il y donnait pour chaque jour les configurations des satellites, comme on les voit dans les lunettes qui renversent les objets. Aujourd'hui toutes les Éphémérides donnent ces configurations pour tous les jours; mais l'usage n'est pas aussi général pour la forme, qui est droite chez les uns et renversée chez les autres. Il donnait encore, outre les immersions et les émersions par rapport au cône d'ombre, celles qui ont lieu derrière le disque, les passages sur le disque, c'est-à-dire l'instant de l'entrée et celui de la sortie, et enfin les instans des plus grandes digressions. On néglige aujourd'hui tous ces phénomènes pour s'en tenir aux éclipses, qui sont bien plus faciles à observer, et d'un usage beaucoup plus sûr et plus commode. Cassini croyait toutes les inclinaisons égales, les nœuds communs et fixes. On voit encore dans cet ouvrage, qu'il proposait de nouveaux noms pour les satellites qu'il voulait qu'on appelât *Pallas*, *Junon*, *Thémis* et *Cérès*, quoique, pour plus de commodité, il les désignât à l'ordinaire par les noms de premier, second, etc.

Il annonce que dans ses tables il a fait usage de quelques équations empiriques; il croit que les tables du premier satellite sont assez sûres pour qu'à défaut d'observations correspondantes, on puisse les employer à la détermination des longitudes.

Il paraît assez content des tables du quatrième; il avoue que celles des deux autres sont moins certaines. Il ne fait aucune différence entre les durées des passages sur le disque et celles des éclipses; il croyait les plus grandes élongations égales à 5, 8, 13 et 25 demi-diamètres de Jupiter. Il est clair que ces tables ne pouvaient avoir toute la précision dont l'auteur se flattait, ou que cette précision ne pouvait se soutenir long-tems; mais leur succès fut tel, et Picard les trouva si exactes, que sur le rapport qu'il en fit, Colbert attira Cassini en France.

30. Nous avons dit comment l'erreur de ces tables avait fait décou-

vrir la vitesse de la lumière. Cassini, en reconnaissant combien l'idée de Roëmer était ingénieuse, crut cependant que les observations ne la confirmaient pas. Maraldi, long-tems encore après, la combattait par des raisons spécieuses, et Fontenelle l'aplaudissait *d'avoir fait rejeter une erreur qui aurait pu s'accréditer*. Cette erreur prétendue est aujourd'hui une vérité incontestable, depuis qu'elle a été si pleinement confirmée par la découverte de l'aberration, si bien d'accord d'ailleurs avec ce que j'ai trouvé par la comparaison d'un millier d'éclipses du premier satellite.

31. Maraldi crut trouver dans l'inclinaison une variation qui produisait une variation de 12′ dans les éclipses du second satellite. Il est à croire qu'une partie de cette variation tenait aux erreurs des observations qui sont toujours assez incertaines, au moins pour celle des deux phases qui s'observe tout près de Jupiter. En 1677, Cassini avait vu une tache sur le quatrième satellite qui était alors sur le disque de Jupiter. Le satellite lui-même devait être invisible, parce qu'étant tout éclairé, il ne pouvait se distinguer du disque : mais il trouva que le mouvement de la tache était égal au mouvement du quatrième satellite ; cette tache avait disparu avant que le satellite ne fût sorti du disque. On ne voit pas bien clairement pourquoi la tache n'avait pas continué à se voir jusqu'à l'instant de la sortie, car elle n'avait pas dû changer sensiblement de place sur l'hémisphère tourné vers nous. Mais cette tache même était éclairée; elle était donc bien peu propre à réfléchir la lumière : quoi qu'il en soit, Cassini vit une tache pareille sur le troisième satellite. Maraldi revit, en 1713, la tache du quatrième satellite, 36 ans après l'observation de Cassini ; il en conclut que le satellite tournait toujours la même face à Jupiter, et que dans ses conjonctions inférieures il montrait toujours au soleil la face opposée; mais que pour montrer à la terre le même hémisphère à deux jours différens, il fallait que la longitude jovicentrique de la terre fût revenue la même, ce qui ne pouvait arriver qu'au bout de 12 ans. Pound et Messier ont consigné des observations pareilles dans les Transactions philosophiques, il paraîtrait en résulter que la loi serait commune à tous les satellites, qui toujours montreraient le même hémisphère à leur planète principale, ce qui est sûr au moins pour la lune.

32. Pound avait donné en 1719 des tables écliptiques du premier satellite. On y trouve les premières conjonctions moyennes de chaque

année, le changement des conjonctions moyennes pour toute l'année, c'est-à-dire une table des multiples de la révolution moyenne, qui va jusqu'à 365 ou 366^j et quelques heures. Il avait rendu toutes les équations additives, usage qui s'est étendu depuis à toutes les tables astronomiques. Il suffit pour cela d'ajouter à chaque équation particulière sa plus grande valeur négative ; par là, tous les termes de la table deviennent nécessairement additifs. On en fait autant pour toutes les équations, et l'on retranche de l'époque la somme de toutes les quantités ajoutées aux tables particulières. Son équation de la lumière n'est que de 14', il suppose avec Roëmer que la lumière emploie 14' à parcourir le diamètre de l'orbite terrestre. Ces tables ont été réimprimées dans le Recueil posthume des Tables de Halley, et dans les Institutions astronomiques de Lemonnier, page 304.

En 1740, Cassini II publia des tables des satellites corrigées d'après ses propres observations, et il les donna sous deux formes. Dans les premières, qui sont à l'ordinaire en signes et degrés, on trouve aussi pour chaque degré de différence entre la longitude jovicentrique du satellite et la longitude géocentrique de Jupiter, la distance géocentrique des centres de Jupiter et du satellite, exprimée en demi-diamètres de Jupiter. Nous avons donné (18) une formule qui peut servir à calculer ces élongations. Les secondes tables sont en tems ; on y trouve les moyens de calculer les conjonctions moyennes, les équations nécessaires pour les convertir en conjonctions vraies, et enfin les demi-durées. On y voit une équation de 14' 10" commune à tous les satellites, et qui ne peut être que l'équation de la lumière. Mais il en avait négligé la seconde partie, qui dépend de l'excentricité de Jupiter, et qui avait fourni à Pound et Bradley, une équation de 3' 30".

33. Les tables de Bradley parurent en 1749, dans le Recueil des Tables de Halley : elles sont aussi sous deux formes différentes, on y trouve aussi les élongations des satellites. Bradley y annonce des équations dont la période est de 437 jours, parce que cette période ramenant les trois satellites intérieurs à la même configuration, doit aussi ramener dans le même ordre toutes les inégalités produites par les attractions réciproques de ces trois satellites. Il n'ose encore évaluer ces perturbations, et il invite les géomètres à s'en occuper.

34. Wargentin se servit aussi de cette période de 437 jours pour déterminer

déterminer les inégalités par observation : c'est lui qui donna le premier des tables un peu exactes des éclipses. Il fit des travaux de ses prédécesseurs, de ses contemporains et surtout des deux Maraldi, l'usage le plns heureux et le mieux entendn. Il trouva pour le premier satellite une variation de 3′ 30″, une de 16′ ½ pour le second; il aperçut dans le troisième des inégalités singulières qu'il avait d'abord présentées séparément, et qu'il voulut ensuite réunir en une seule table, ce qui ne pouvait être aussi exact. On sentait le besoin d'nne théorie qui pût guider l'astronome dans des recherches si compliquées. Bailly s'en occupa le premier. Si les géomètres n'ont pas témoigné une estime bien profonde pour la partie analytique de son travail, il eut du moins la satisfaction de montrer aux astronomes la cause qui produisait les équations que l'observation avait dévoilées. Il fit voir que l'équation de $0^h\ 3'\ 30''$ ou de $0^\circ\ 29'\ 30''$ introduite par Wargentin, était l'équation de la forme $a \sin(A'-A) + b \sin 2(A'-A) + c \sin 3(A'-A) +$ etc. qui doit exister pour toutes les planètes troublées (XXVII. 72). Il s'en servit pour déterminer la masse du satellite perturbateur qui ne pouvait être qne le second; il trouva 0.0000211 pour cette masse, en prenant celle de Jupiter pour unité. D'après mes recherches fondées sur la théorie de M. Laplace, j'ai trouvé 0.0000232355.

35. L'équation du second satellite est de $0^h\ 16'\ 30''$ ou de $1^\circ\ 6'\ 42''$ suivant Wargentin. Bailly montra qu'elle dépendait de l'action du premier satellite et de celle du troisième, qu'elle devait être le résultat de deux variations différentes ou des équations

$$a \sin(☾'-☾'') + b \sin 2(☾'-☾'') + c \sin 3(☾'-☾'') + \text{etc.}$$
$$a' \sin(☾''-☾''') + b' \sin 2(☾''-☾''') + c' \sin 3(☾''-☾''') + \text{etc.}$$

Il remarqna que le premier terme de la première série était le terme dominant, tandis que dans la seconde série c'était le second terme qui était le plus fort; il remarqua de plus qne le sinus de $(☾'-☾'')$ était égal au sinus de $2(☾''-☾''')$, et qu'ainsi les deux termes dominans pouvaient être ramenés à un seul argument, et paraissaient ne faire qu'une seule inégalité. Cette inégalité complexe ne pouvait donner les deux masses qu'en snpposant connu le rapport entre ces masses; mais ne voyant rien pour obtenir ce rapport, il employa un mouvement de 12° par an que Maraldi avait remarqué dans les nœuds du second, et qui devait dépendre de la masse du troisième. Il essaya ce moyen qui

ne lui réussit que très-médiocrement; il avait encore la ressource de supposer les deux masses égales; mais de l'une comme de l'autre manière, il trouva des masses trop fortes. Quant à celle du quatrième, qu'il trouva 0.00005, il en approcha davantage; car, d'après mes recherches fondées sur la théorie de M. Laplace, cette masse est 0.0000426591.

Il ne put réussir que plus imparfaitement dans la théorie du troisième sur lequel Wargentin n'avait rien de bien constaté. Bailly donna au troisième une excentricité, et calcula quelques autres équations assez peu exactes. Pour le quatrième, dont la théorie est plus simple, parce qu'il est peu exposé aux perturbations des trois autres, il se contenta de lui donner une excentricité de 50′ à peu près égale à celle de Vénus.

Il avait appliqué à chacun des satellites en particulier la théorie lunaire de Clairaut qui n'était pas suffisante. A son Mémoire il joignit des tables qui, se trouvant moins commodes que celle de Wargentin, et n'ayant pas comme celles-ci l'avantage d'avoir eté suffisamment éprouvées, ne purent inspirer la même confiance.

Bailly n'avait pas eu le tems de mettre la dernière main à ce travail. L'Académie venait de proposer la théorie analytique des satellites pour le sujet d'un prix qu'elle devait adjuger en 1766 : elle avait reçu un grand Mémoire de M. Lagrange. Bailly se hâta de publier son ouvrage et ses tables, présumant bien que les remarques curieuses qu'il avait faites le premier, n'auraient pas échappé à l'analyse plus savante de M. Lagrange.

56. En effet, au lieu de chercher séparément, comme avait fait Bailly, les inégalités de chaque satellite par l'application des formules connues, Lagrange, par une analyse nouvelle, puissante, et dont les développemens ont quelque chose d'effrayant, attaque le problème tout entier, et considère à-la-fois l'action du soleil et les actions réciproques des quatre satellites; il donne les formules numériques des inégalités dont il ne reste plus qu'à multiplier tous les coefficiens par la masse du satellite perturbateur exprimée en partie de la masse de Jupiter. Ces formules sont encore de la même forme que la variation de la lune; elles offrent toutes un terme dominant auprès duquel les autres peuvent être négligés quand on ne cherche pas la dernière précision, et dans lequel M. Lagrange montre l'équation employée par Wargentin. Comme Bailly, il en déduit d'abord la masse du second

satellite; il trouve 0.00002417, ce qui surpasse de fort peu celle que supposent mes tables.

57. Passant ensuite au second satellite, il y trouve, dans la triple formule de variation, deux termes principaux

$$\left(\frac{m'}{M}\right).91810' \sin(☾'-☾'') \text{ et } \left(\frac{m'''}{M}\right).148383' \sin 2(☾'''-☾'');$$

il montre que ces deux termes réunis doivent former une somme de $\frac{33}{2} = 16{,}5$, ce qui ne suffit pas pour déterminer m' et m''', c'est-à-dire les masses du premier et du troisième satellite. Mais soit $m''' = m'n$, on aura

$$\frac{m'}{M} = \frac{33}{183620 + 296776\,n} \quad \text{et} \quad \frac{m'''}{M} = \frac{33\,n}{183620 + 296776\,n}.$$

Comme Bailly, il montre que la quantité $(☾'-☾'')+2(☾'''-☾'')$ est toujours la même dans les conjonctions, ou que $☾'-3☾''+2☾''' = 180° \; 30' = 180°$ à fort peu près, et qu'on peut ainsi toujours supposer $2(☾'''-☾'') = 180° - (☾'-☾'')$; que les sinus des deux argumens sont les mêmes, et que les deux équations n'en font qu'une. Il montre que ce rapport entre les longitudes des trois satellites est tellement approché, qu'on peut le supposer exact; il calcule l'erreur qui peut résulter de la supposition, et montre qu'elle pourra toujours se négliger. M. Laplace a depuis prouvé que le rapport est exact, et il en déduit cet autre théorème, $\Delta☾' + 2\Delta☾''' = 3\Delta☾''$, c'est-à-dire que dans un tems quelconque, le mouvement du premier plus deux fois le mouvement du troisième, forment une somme égale à trois fois le mouvement du second. La vérité de ces deux théorèmes a été pleinement confirmée par mes recherches sur les mouvemens des trois satellites; c'est-à-dire, qu'ayant cherché par la totalité des éclipses, sans m'astreindre à aucune supposition, les mouvemens séculaires et les époques des longitudes moyennes, j'ai trouvé que les deux théorèmes étaient satisfaits à 3 ou 4'' près, c'est-à-dire avec une précision que j'étais loin d'attendre des observations. Si les théorèmes n'étaient pas géométriquement exacts, M. Laplace démontre qu'ils seraient toujours vrais entre certaines limites, et ne seraient sujets qu'à une variation périodique, qu'il appelle libration des satellites, dont au reste je n'ai pu trouver le moindre vestige, quelque soin que j'aie pu y apporter. Ainsi nous devons les considérer comme rigoureusement vrais.

38. Pour le troisième, Lagrange ne trouve dans les trois séries qu'un seul terme qui mérite quelque attention $\left(\frac{m''}{M}\right)(99075')\sin(\mathbb{C}''-\mathbb{C}''') =$ 2′ 24″; il n'est pas dans les tables de Wargentin, qui l'avait simplement entrevu, sans pouvoir en constater la valeur qui est de 2′ 5″ dans nos tables. Il considère encore une équation $\left(\frac{m^{\text{iv}}}{M}\right)(7124')\sin(\mathbb{C}''-\mathbb{C}''')$. Nos tables ont une équation, $24''\sin 2(\mathbb{C}''-\mathbb{C}''')$. Lagrange pense que l'équation dépendant de m^{iv} ne pourrait valoir une minute, à moins que la masse du quatrième ne fût beaucoup plus considérable que celle des trois autres, ce qui n'est pas.

39. Il ne trouve dans les trois séries du quatrième aucun terme important; en effet, suivant nos tables, aucun terme ne passe 11″; mais en continuant le développement de son analyse savante, il trouve pour chaque satellite quatre espèces d'équation du centre qui dépendent de la distance angulaire de chaque satellite, à l'apside des trois autres et à son apside propre; mais il ne fait qu'indiquer ces différentes équations, sans les comparer aux deux équations que Wargentin avait introduites dans les tables du troisième, et qui sont en effet deux équations du centre, ainsi que l'a démontré M. Laplace.

40. Pour les latitudes et leurs inégalités, il imagine quatre plans différens passant par le centre de Jupiter, dont le premier se meut sur l'orbite de la planète, en gardant toujours avec elle la même inclinaison; le second se meut de même sur le premier, le troisième sur le second, et enfin le quatrième, qui sera l'orbite de satellite, se mouvra sur l'orbite du troisième. Les nœuds de ces plans rétrograderont de quantités dont il donne les formules. Il trouve la formule de la section elliptique de l'ombre, en déduit l'expression des demi-durées et des durées entières, et les moyens d'en conclure la latitude du satellite par les durées observées.

41. Il termine son Mémoire par quelques aperçns sur les variations dans les inclinaisons et dans les mouvemens des nœuds, et ses résultats ne sont pas toujours d'accord avec les observations, ce qui peut venir des quantités négligées et des erreurs mêmes de l'observation. En général, ce bel ouvrage est une vraie conquête par laquelle l'analyse avait réuni à son domaine la plupart des inégalités vues ou entrevues par

les astronomes : les géomètres ont dû l'accueillir avec admiration, mais il ne faisait rien ou presque rien pour la perfection des tables qui n'en ont reçu aucune amélioration. L'auteur avait promis des développemens ultérieurs qu'il n'a point donnés : il était réservé à M. Laplace d'étendre cette théorie, d'y faire des découvertes importantes dont l'application devait améliorer les tables et en bannir tout empirisme.

42. M. Laplace a exposé ses recherches analytiques dans les volumes de l'Académie des Sciences, pour 1788 et 1789. On y retrouve les équations indépendantes des excentricités, telles que les trois variations de chaque satellite. Passant ensuite aux équations qui dépendent des excentricités et à celles qui dépendent du soleil, il trouve parmi celles-ci des équations qui répondent à la variation, à l'évection et à l'équation annuelle de notre lune : mais toutes ces équations solaires sont nulles dans les éclipses, il est inutile d'en grossir les tables ; il était indubitable que ces équations devaient exister, la question se réduisait à savoir si elles étaient sensibles. M. Laplace donne, d'une manière plus complète et plus claire, les inégalités des latitudes ; il conçoit les satellites comme mus sur des plans situés entre l'orbite et l'équateur de Jupiter, passant par l'intersection commune de ces deux plans, et respectivement inclinés sur le plan de l'équateur, de quantités toujours en rapport avec l'inclinaison de l'équateur sur l'orbite. Toutes ces formules renferment cinq inconnues, qui sont les masses des quatre satellites et l'aplatissement de Jupiter; car Lagrange avait montré déjà que l'aplatissement introduit dans les inégalités des satellites, des modifications que M. Laplace fait servir à déterminer l'ellipticité du globe de Jupiter, d'une manière plus précise qu'on n'avait pu le faire par la mesure directe des deux axes. A ces inconnues, ajoutez les inconnues ordinaires de toutes les orbites planétaires, leurs révolutions et leurs grands axes, leurs excentricités, leurs apsides, leurs nœuds, leurs inclinaisons, enfin les époques des longitudes moyennes; vous aurez pour les quatre satellites 29 indéterminées qui ne peuvent être connues que par les observations où elles se trouvent mêlées, de manière à n'être séparées que très-difficilement et par des essais successifs et souvent répétés. Il a fallu revenir plus d'une fois sur la théorie de chacun des satellites, jusqu'à ce qu'on eût des valeurs qui représentassent les éclipses observées, avec toute l'exactitude qu'il est permis d'espérer; et comme les observations sont assez incertaines, on a dû en considérer

un très-grand nombre pour faire disparaître des résultats moyens les erreurs dont elles sont susceptibles.

43. C'est ce travail que j'ai entrepris à l'aide de la théorie de M. Laplace et des tables de Wargentin, qui m'offraient des approximations commodes de la plupart des élémens qu'il s'agissait de vérifier. Ma première idée avait été d'y employer la totalité des observations qu'on avait recueillies dans un espace d'environ 130 ans, depuis Hodierna jusqu'à l'époque où finirait mon travail. Je m'en occupais depuis plus d'un an, quand l'Académie proposa les tables des satellites pour le sujet d'un prix qu'elle devait adjuger en 1792. L'époque fixée me força pour le moment de resserrer considérablement le plan que j'avais formé, sauf à le reprendre un jour plus à loisir. Mes premières tables n'étaient guère fondées que sur deux mille éclipses tout au plus, mais choisies, mais calculées avec tout le soin dont j'étais capable. Ces tables obtinrent le prix. Lalande les imprima dans la troisième édition de son Astronomie; elles ont été adoptées par tous les Astronomes, et ils s'en servent encore.

44. Une difficulté particulière à cette théorie est l'incertitude des observations. Pour le premier satellite même qui entre dans l'ombre, ou s'en dégage d'un mouvement plus rapide, il n'est pas rare de voir deux observations d'une même éclipse différer entre elles d'une demi-minute; pour le second, la différence est plus que double; pour le troisième, elle peut aller jusqu'à 3′; elle passe souvent 4′ pour le quatrième; sans parler des éclipses qui arrivent dans les limites où ce satellite ne fait que perdre une partie de sa lumière, ensorte que tel observateur ne cesse de l'apercevoir, tandis que l'autre le croit éclipsé pendant 7, 8 ou 10 minutes. Les tables construites sur la totalité des observations ne peuvent donner les éclipses que pour des vues et des lunettes moyennes, et pour un état moyen de l'atmosphère : d'autres causes encore influent sur la bonté des observations. Si Jupiter est trop voisin de l'horizon, s'il est trop près du soleil, si le satellite est trop voisin de Jupiter, l'observation devient incertaine; et je ne balance pas d'affirmer, avec plus de fondement, que Cassini ne pouvait le faire de ses premières tables; que généralement une éclipse calculée est plus sûre que l'observation faite en un seul lieu, par un seul observateur. Mais si l'on a une suite d'éclipses observées en plusieurs lieux dans l'espace

d'un mois, et que la différence entre les tables et l'observation soit à peu près constante, on pourra regarder cette différence moyenne comme l'erreur des tables, et les en corriger pour calculer plus sûrement la longitude inconnue du lieu où l'on aura observé quelques-unes de ces éclipses; mais quand on n'aura qu'une observation correspondante dans un seul lieu connu, le plus sûr encore sera de regarder comme la différence de longitude, la différence entre l'observation et le calcul fait sur les tables. C'est ce qu'a fait M. Humboldt pendant son voyage en Amérique. Quand on n'avait que des tables purement empiriques et par conséquent toujours incertaines, on avait raison de se méfier du calcul; et aujourd'hui même, pour la différence des méridiens, on fera bien de se borner au premier satellite; ou tout au plus il serait permis d'y joindre quelques observations du second, mais en les choisissant avec circonspection. Quand on voit l'immersion et l'émersion dans une même éclipse du second, on prend ordinairement le milieu entre les deux résultats; il est fort douteux que cette pratique soit la meilleure : celle des deux phases qui s'observe près du bord est toujours plus incertaine que l'autre, surtout si c'est une émersion; dans tous les cas on doit toujours s'attendre à une erreur de plusieurs secondes. Cette manière de chercher la différence des méridiens, si elle n'est pas la plus sûre de toutes, est au moins la plus commode : il n'en coûte que la peine de calculer le tems moyen de l'observation, et de le comparer au tems du même phénomène, calculé pour Paris, dans la Connaissance des Tems. Le résultat est de beaucoup préférable à celui d'une éclipse de lune, et les occasions sont beaucoup plus fréquentes, puisque le premier satellite s'éclipse régulièrement à des intervalles de 42 heures.

45. La mesure de la méridienne étant venu interrompre mes recherches sur les satellites, je n'ai pu les reprendre qu'en 1801, pour y employer toutes les observations depuis l'origine jusqu'en 1804. Pour chacune de ces éclipses, j'ai formé une équation de condition, qui devait contribuer à me donner les corrections de mes premières tables. J'ai éliminé de nouveau, et pour diminuer un peu la longueur du travail, M. Laplace a fait calculer, d'après ma dernière élimination, les masses des satellites et l'aplatissement de Jupiter, avec les coefficiens numériques qui en résultaient pour les diverses équations. Je me suis servi de ces calculs pour composer de nouvelles tables, dont j'ai de même calculé les erreurs et les équations de condition auxquelles on en

pourra joindre d'autres dans dix ou vingt ans, pour corriger mes nouvelles tables qui sont imprimées depuis quatre ans, et qui paraîtront presque en même tems que cette Astronomie.

46. Dans l'impossibilité où nous sommes de nous étendre ici davantage, nous nous bornerons à rapporter, d'après ces tables, les inégalités des quatre satellites.

Soient $\mathbb{C}'$, $\mathbb{C}''$, $\mathbb{C}'''$, $\mathbb{C}^{\text{iv}}$ les longitudes moyennes des quatre satellites, $\text{♃}'$, $\text{♃}''$, $\text{♃}'''$, ♃^{iv} leurs apsides inférieures, que Bailly avait désignées par le nom grec et latin de *périjove*; la correction des conjonctions moyennes en tems sera pour le premier satellite,

$$
\begin{aligned}
&+ 1'',665 \sin(\mathbb{C}' - \mathbb{C}'') + 0'',742 \cos \tfrac{1}{2}(\mathbb{C}' - \mathbb{C}'')\\
&- 3'\,13'',079 \sin 2(\mathbb{C}' - \mathbb{C}'') - 0'',027 \sin 3(\mathbb{C}' - \mathbb{C}'')\\
&- 0'',144 \sin 4(\mathbb{C}' - \mathbb{C}'') - 0.0604 \sin 5(\mathbb{C}' - \mathbb{C}'')\\
&+ 0'',88 \sin 4(\mathbb{C}' - \mathbb{C}'') :
\end{aligned}
$$

c'est l'équation commune à toutes les planètes, et que j'appelle variation. Le dernier terme est une correction particulière qui tient à l'arrangement que j'ai choisi pour mes tables,

$$- 1'',555 \sin(\mathbb{C}' - \text{♃}''') - 0'',73 \sin(\mathbb{C}' - \text{♃}^{\text{iv}}) :$$

ce sont deux espèces d'équations du centre,

$$
\begin{aligned}
&+ 0'',82 \sin[(\mathbb{C}' - \mathbb{C}'') - (\mathbb{C}'' - \text{♃}''')]\\
&+ 2'',919 \sin[(\mathbb{C}' - \mathbb{C}'') - (\mathbb{C}'' - \text{♃}^{\text{iv}})] ;
\end{aligned}
$$

ce sont deux espèces d'évection qui n'existent pas dans la théorie de notre lune, parce qu'elle est unique,

$$- 22'',942 \sin 2H ,$$

c'est la différence entre la conjonction et le milieu, H est la distance du satellite au nœud de l'équateur de Jupiter.

47. Les équations du deuxième satellite sont,

$$
\begin{aligned}
&+ 12'',535 \sin(\mathbb{C}'' - \mathbb{C}''') - 915'',131 \sin 2(\mathbb{C}'' - \mathbb{C}''')\\
&- 4'',680 \sin 3(\mathbb{C}'' - \mathbb{C}''') - 5'',728 \sin 4(\mathbb{C}'' - \mathbb{C}''')\\
&- 0'',358 \sin 5(\mathbb{C}'' - \mathbb{C}''') - 0'',281 \sin 6(\mathbb{C}'' - \mathbb{C}''')\\
&+ \text{une correction particulière } 18'',22 \sin 4(\mathbb{C}'' - \mathbb{C}''') :
\end{aligned}
$$

c'est

c'est la variation; mais celle-ci est composée de deux, l'une produite par le premier satellite, et l'autre par le troisième. Elles se réduisent à un même argument (35),

$$-28'',247\sin(\mathbb{C}''-\psi''')-12'',330\sin(\mathbb{C}''-\psi^{iv})$$
$$-43'',268\sin[(\mathbb{C}'-\mathbb{C}'')-(\mathbb{C}''-\psi''')]$$
$$-19'',574\sin[(\mathbb{C}-\mathbb{C}'')-(\mathbb{C}''-\psi^{iv})].$$

On voit ici deux espèces d'équation du centre, et deux espèces d'évection. Les deux premiers satellites paraissent n'avoir pas d'équation du centre qui leur soit propre.

$$\text{réduction au milieu} = -39'',75\sin 2H - 0,''9044\sin 2L$$
$$+11'',99\sin(H+L)+0'',8725\sin(H+K);$$

la correction des demi-durées, $-48''\sin 2(\mathbb{C}''-\mathbb{C}''')$. On verra plus loin ce que sont les argumens I, K, L.

48. Les équations du troisième satellite sont

$$+125'',105\sin(\mathbb{C}''-\mathbb{C}''')+1'',835\sin 2(\mathbb{C}''-\mathbb{C}''')$$
$$+1'',019\sin 3(\mathbb{C}''-\mathbb{C}''')$$
$$+6'',9998\sin(\mathbb{C}'''-\mathbb{C}^{iv})-23'',911\sin 2(\mathbb{C}''-\mathbb{C}^{iv})$$
$$-1'',681\sin 3(\mathbb{C}'''-\mathbb{C}^{iv})-0''392\sin 4(\mathbb{C}'''-\mathbb{C}^{iv}):$$

ce sont deux variations; celle qui dépendrait du premier satellite est insensible,

$$-263'',73\sin(\mathbb{C}'''-\psi''')-116'',76\sin(\mathbb{C}'''-\psi^{iv});$$

ce sont deux équations du centre relatives à deux apsides différentes,

$$-11'',473\sin[(\mathbb{C}''-\mathbb{C}''')-(\mathbb{C}'''-\psi^{iv})]$$
$$-6'',726\sin[(\mathbb{C}''-\mathbb{C}''')-(\mathbb{C}'''-\psi^{iv})].$$

Les réductions $\quad -88'',1\sin 2H-12'',1\sin(H+K)$
$\quad -1'',18\sin(H+I)-0'',45\sin(H+L).$

Les corrections des demi-durées sont de $4'',1$, $8'',5$ et $3'',8$, et dépendent des trois premiers argumens.

49. Les équations du quatrième satellite sont

$-55' 28'',77 \sin(☾^{iv} - ♃^{iv}) - 15'',25 \sin 2(☾^{iv} - ♃^{iv})$
$- 0''0977 \sin 3(☾^{iv} - ♃^{iv})$
$+$ un terme de correction $10'',67 \sin 2(☾^{iv} - ♃^{iv})$
$+ 79'',871 \sin(☾^{iv} - ♃''')$ seconde équation du centre
$+ 11'',35 \sin(☾''' - ☾^{iv}) + 5'',11 \sin 2(☾''' - ☾^{iv})$
$+ 0'',33 \sin 4(☾''' - ☾^{iv}) + 0'',12 \sin 5(☾''' - ☾^{iv})$.

Réduction $\quad - 164'',0 \sin 2H - 1'',0395 \sin 2L$
$+ 4'',90 \sin(H + K) + 30'',61 \sin(H + L)$.

Correction des demi-durées $+ 62'' \cos(☾^{iv} - ♃^{iv}) + 3'' \cos$ anom. m. ♃.

50. $H = ♃ + 46° 14' 27'' - 49''833 t$, t est le nombre d'années
$I = ♃ + 74.55.58 + 2439,073 t$, depuis 1750.
$K = ♃ + 187.27.35 + 9143,55 t$,
$L = ♃ + 256.40.48 + 43323,98 t$.

♃ est le lieu de Jupiter qui, à la conjonction, est aussi celui du satellite; le reste de l'argument complète la distance à un nœud mobile.
Les latitudes en conjonction seront

$\lambda' = 3° \; 5' \; 21''85 \sin H - 54''633 \sin L - 8''259 \sin K$:
$\lambda'' = 3. \; 4.21,42 \sin H - 1668,79 \sin L - 121,4 \sin K - 20''827 \sin I$,
$\lambda''' = 3. \; 0.21,7944 \sin H - 739,5 \sin K - 114 \sin I + 57''18 \sin L$,
$\lambda^{iv} = 2.40.42,7 \sin H - 896,7 \sin I - 145,45 \sin K + 1'',555 \sin L$.

51. Les demi-durées dans les nœuds,

$D' = 1^h \, 7' \, 52''$, $D'' = 1^h \, 26' \, 3''$, $D''' = 1^h \, 46' \, 50''$, $D^{iv} = 2^h \, 22' \, 55''$.

Ces durées ont été calculées pour les lunettes achromatiques ordinaires; elles seraient plus longues de quelques secondes pour les lunettes simples dont on se servait anciennement. L'impossibilité où l'on est de mettre en tables tout ce qui peut influer sur la bonté de ces observations, fait qu'il en est peu qui soient réellement comparables; en conséquence, il semble qu'on ne devrait observer les éclipses des satellites qu'avec des lunettes ordinaires, et telles que peuvent les avoir les voyageurs, pour qui principalement les tables des satellites peuvent être commodes. Or il nous importe assez peu de savoir à quel instant précis

l'éclipse aura réellement commencé ou fini; mais à quel instant aura pu la voir le voyageur, qui ne saurait être muni de ces grands télescopes qui diminuent les durées des éclipses sans les réduire jamais à leurs véritables quantités.

52. Pour diminuer un peu l'incertitude des observations, les rendre plus comparables et pouvoir estimer le segment visible du satellite, c'est-à-dire la surface éclairée, qui suffit pour apercevoir le satellite, et qui ne peut diminuer sans que le satellite disparaisse, Bailly, d'après une idée ingénieuse de Fouchy, se procurait des éclipses artificielles et en déduisait le segment visible. Quelque tems avant l'éclipse, quand le satellite brillait encore de toute sa lumière, Bailly rétrécissait successivement par différens diaphragmes l'ouverture de la lunette, jusqu'à ce que le satellite devînt tout-à-fait invisible. Par les dimensions connues de ses diaphragmes, il savait de combien il avait diminué la lumière entrée dans la lunette; l'ouverture entière de l'objectif était à celle du dernier diaphragme comme le diamètre entier du satellite, ou au diamètre d'un cercle égal au segment invisible, qui ne suffisait plus à donner la sensation du satellite. Bailly avait fait un grand nombre d'observations et de calculs pour les trois premiers satellites. Lalande, qui estimait ce travail plus que toutes les dignités dont Bailly fut dans la suite revêtu pour son malheur, continua ces recherches sur le quatrième. Maskelyne avait trouvé un moyen plus commode pour diminuer l'ouverture de sa lunette; sans cesser de regarder le satellite, il tournait une manivelle jusqu'à ce que le satellite disparût; et alors il allait regarder l'ouverture où un vernier lui indiquait le rapport qu'elle avait avec l'ouverture entière. Il continua ces essais pendant plusieurs années; mais il y renonça, quand il se fut convaincu que c'était prendre une peine assez inutile. J'ai fait quelques essais dans ce genre avec des diaphragmes, comme ceux de Bailly; mais j'y ai renoncé beaucoup plus tôt, les croyant très-peu sûrs, et c'est maintenant l'opinion générale. Il est bien certain que nous n'observons ni les immersions ni les émersions véritables, que nous augmentons la largeur du cône d'ombre; mais comme c'est par l'observation et non par les dimensions des orbites que nous déterminons la largeur du cône, il s'ensuit qu'au cône véritable nous substituons un cône moyen qui doit être toujours augmenté du segment invisible du satellite, et ce segment doit être toujours à peu près le même. On ne peut guère espérer mieux, et nous sommes forcés de nous contenter de ce degré de précision.

Satellites de Saturne.

53. Les satellites de Saturne n'auront jamais la même utilité que ceux de Jupiter, ils sont beaucoup plus petits; pour les voir tous, il faut des télescopes d'une force extraordinaire, ce qui est cause que généralement les astronomes y font peu d'attention.

Huyghens aperçut d'abord le plus gros de tous en 1655, c'est le sixième dans l'ordre des distances. D. Cassini vit le septième en 1671, le cinquième en 1672, en se servant de lunettes de 35 et 70 pieds. En mars 1684, il vit le troisième et le quatrième avec des lunettes de différentes longueurs, depuis 34 jusqu'à 136 pieds. Enfin, en 1789, M. Herschel découvrit le deuxième et puis le premier avec un télescope de 40 pieds; il a rendu compte de ses observations dans un Mémoire lu à la Société royale, le 17 juin 1790. Ce Mémoire est terminé par des tables des mouvemens moyens des sept satellites; nous allons en extraire l'époque 1788 et le mouvement diurne, les révolutions périodiques des deux premiers et leurs distances moyennes au centre de Saturne. Le reste est pris dans l'Astronomie de Lalande (3067).

	Ép. 1788.	Mouv. diurn.	Révolut. périod.	Révolut. synod.	Distances.
1	65°03	381°962	0j 22h 37′ 32″9		28″6689
2	307.48	262.727	1. 8.53. 8.9		36.7889
3	131.91	190.798	1.21.18.26.2	1j 21h 18′ 54″8	43.5
4	173.95	131.535	2.17.44.51.2	2.17.45.51.0	56.0
5	93.86	79.690	4.12.25.11.1	4.12.27.55.2	78.0
6	132.41	22.577	15.22.41.13.1	15.23.15.20.2	180.0
7	196.84	4.538	79. 7.53.42.8	79.22. 3.12.9	522.5

Herschel, dans ses calculs, a supposé la révolution périodique du sixième de 15j 22h 45′ 13″,4, et la distance 188″,918; Newton la fait de 184″. Les nombres de notre table, recueillis de différens auteurs, ne sont peut-être pas bien d'accord entre eux, mais ils suffiront pour l'usage qu'on peut en faire. Au moyen de ces nombres, ou mieux en recourant aux tables d'Herschel, on tracerait les configurations de ces

satellites; c'est une précantion qui n'est pas inutile pour les observer. Voyez d'aillcurs les tables de Cassini 1740, et les tables de Berlin.

54. Le septième se voit mieux dans sa digression occidentale; il est sujet à disparaître dans la digression orientale. Ccpendant il a été vu en 1705 pendant toute sa révolution (*Mém. Acad. des Sciences* 1714, p. 370), d'où Cassini infère que les taches qni le rendent le plus souvent invisible dans cette portion de son orbite ne sont pas permanentes, et sont à pen près de la nature de celles de Jupiter qu'on voit peudant des mois entiers, et qui après cela cessent de paraître. M. Bernard, en 1787, a remarqué que ce satellite s'affaiblissait au point de disparaître, et que cela durait plus ou moins jusqu'après sa coujonction inférieure; il reprend ensuite son éclat avant de parvenir à la digression occidentale après laquelle on le voit bien même vers sa conjonction supérieure.

55. Les satellites, dans leurs plus grandes digressions, sont toujours dans le grand axe de l'anneau ou dans la ligne des anses : dans leurs conjonctions, les petits axes de lenrs ellipses apparentes ont paru moitié moins grands, d'où l'on conclnt qne le sinus de leur inclinaison est de 0,5, c'est-à-dire que l'inclinaison est de 30° environ; c'est à fort peu près l'inclinaison de l'annean. De cette double observation, l'on conclut qne les satellites se meuvent dans le plan de l'anneau; le septième est le seul qui s'écarte sensiblement de ce plan, et son orbite paraît sitnée à pareille distance, entre l'équatenr de Saturne et son écliptique. Mais par les observations qne M. Bernard faisait à Marseille en 1787, Lalande tronvait l'inclinaison 22° 42′ snr l'orbite, ou 24° 45′ sur l'écliptique. Le nœnd de ce satellite lui paraissait en 4^s 28° 20′ sur l'orbite, ou 4° 25′ 5″ snr l'écliptique. Ces quantités diffèrcnt sensiblement de celles que tronvait Cassini. On a trop pen d'observations, et elles ne sont pas susceptibles d'nne assez grande précision. On a vu combien peu l'on est sûr de l'inclinaison de l'anneau, l'incertitude est encore plus grande ponr les satellites.

56. Il résulte de la théorie de M. Laplace (*Mécan. Cél.*, tom. IV, p. 173), que l'aplatissement de Saturne doit maintenir les anneanx et les orbites des satellites intérieurs dans le plan de l'équateur. Mais cet aplatissement est inconnu; on voit seulement que si l'on rapporte les

orbites des satellites à un plan fixe, comme on le fait pour ceux de Jupiter, l'inclinaison de ce plan par rapport à l'équateur sera insensible pour nous; que tous les satellites, excepté le dernier et peut-être aussi l'avant-dernier, se mouvront dans le plan de l'équateur, ainsi que les anneaux; que l'équateur de Saturne entraîne dans son mouvement le plan intermédiaire et l'orbite du dernier satellite, qui conserve toujours sur ce plan la même inclinaison moyenne, avec un mouvement rétrograde et presque uniforme.

57. La dernière tentative qu'on ait faite pour éclaircir les points douteux de cette théorie, est celle que M. Bessel a consignée dans un Mémoire dont on lit un extrait dans le Journal de Gotha, sept. 1811, p. 197. M. Bessel fait l'inclinaison de l'anneau 27° 11′ 34″+0.52(t—1800), le lieu du nœud, 5ˢ 20° 49′ 54″ + 41″,00 (t — 1800); ces élémens sont rapportés à l'orbite de Saturne. Sur l'écliptique, l'inclinaison serait 28° 34′ 6″; le lieu du nœud 166° 52′ 11″ + (t — 1800) 40″,57. Il croit que cette inclinaison pourrait être moindre, mais qu'elle ne pourrait être plus grande. Sa raison est que s'il existe une irradiation, elle doit être la même pour les deux axes de l'anneau; elle augmentera le rapport des deux axes, et par conséquent l'inclinaison qui s'en déduit. Le diamètre de l'anneau, suivant M. Bessel, est de 40″, le diamètre équatorial de Saturne n'est que de 17″,4; le rapport des deux axes de la planète, 1 : 0.892385. La masse de l'anneau est $\frac{1}{213}$ de la masse de Saturne; c'est la plus forte que l'on puisse supposer.

L'orbite du sixième satellite est elliptique; l'époque de la longitude pour Paris, en 1800, est 67° 25′ 47″; l'apside inférieure 203° 35′ 7″. Le mouvement en 36524 jours est de 2290 révol. + 202° 12′; en 365j,25, de 22 révol. + 326° 14′ 52″,232; en 365, de 22 révol. + 320° 36′ 12″,935; en un jour, de 22° 34′ 37″,186. L'excentricité est 0.0488759; enfin la plus grande équation 5° 36′ 8″.

Par des observations particulières de ce satellite, l'inclinaison a paru de 24° 30′, ou 25° 55′, assez différente par conséquent de l'inclinaison de l'anneau ou de l'équateur; mais il n'est pas impossible que ces plans aient quelque inclinaison l'un par rapport à l'autre.

Satellites d'Uranus.

58. Les satellites d'Uranus sont encore bien plus difficiles à voir, et par conséquent beaucoup plus inutiles que ceux de Saturne. Jus-

qu'ici M. Herschel est le seul qui les ait suivis avec quelque constance, et même il n'en a plus parlé depuis long-tems. Il résulte du Mémoire de M. Herschel, que l'orbite de ces satellites est presque perpendiculaire à l'écliptique; on y voit le soupçon de deux anneaux perpendiculaires l'un à l'autre. Ces satellites sont au nombre de 6. Voyez les *Transactions philosophiques* de 1788 et 1797. Voici les distances et les révolutions, suivant M. Herschel. Les élémens du second et du quatrième sont établis sur des mesures réelles; le reste est conjectural. Les inclinaisons sont de 89° 30′ ou 90° 30′; le nœud ascendant à 5^s 21° ou 8^s 9°, suivant qu'on supposera la première ou la seconde inclinaison : c'est ce que j'ai trouvé par un calcul exact des observations de M. Herschel.

Satellites.	Distances.	Révolutions.
1	25″ 5	5^j 21^h 25′ 0″
2	33.09	8.17. 1.19.13
3	38.57	10.23. 4
4	44.23	11.11. 5. 1.50
5	88.46	38. 1.49
6	172.92	107.16.40

CHAPITRE XXXV.

Grandeur et figure de la Terre.

1. La question de la figure et de la grandeur de la terre serait presque indifférente pour l'astronome qui ne quitterait pas son observatoire et n'emploierait que ses propres observations. Il n'a besoin que du rayon de la terre ou de la distance de son œil au centre des mouvemens diurnes pour calculer les parallaxes, au moyen desquelles il peut ramener ses observations à celles qu'il ferait du centre même; ce rayon lui est même inutile : il suffit d'en connaître le rapport à la distance de l'astre, c'est-à-dire le sinus de la parallaxe horizontale, et ce sinus lui est donné par l'observation. Nous n'avons, dans tout ce qui précède, supposé la figure de la terre que pour les éclipses du soleil ou les passages de Vénus qu'on voudrait avoir pour différens pays. Nous avons indiqué d'avance les formules pour la terre aplatie, mais ces formules supposent connues les dimensions de l'ellipsoïde terrestre. Ce sont ces dimensions qui vont faire la matière de ce chapitre.

2. Ptolémée a pris la peine de prouver 1°. que la terre n'est pas un plan, car alors la lune et tous les astres se leveraient au même instant pour tous les peuples du monde : or on avait observé qu'au commencement d'une éclipse de lune on comptait, en différens pays, des heures différentes, et que la lune était inégalement élevée au-dessus de l'horizon; 2°. que la terre n'est ni un prisme, ni un cylindre, ni un cône, ni enfin un solide à facettes; il en donne des raisons excellentes, et qui ne sont pas difficiles à imaginer.

L'ombre de la terre est sensiblement ronde dans les éclipses de lune; toutes les planètes qui, comme la terre, circulent autour du soleil, la lune et le soleil lui-même sont certainement autant de corps sphériques. La première idée qui doit se présenter est celle de la terre sphérique; tout au plus pourrions-nous y soupçonner un léger aplatissement,

tissement, comme on le voit évidemment à Jupiter. La terre tourne autour de son axe en 24 heures sidérales; toutes les autres planètes tournent plus ou moins vite : voilà des analogies auxquelles on ne saurait résister sans de fortes raisons, et nous n'en n'avons d'aucune espèce.

3. La terre est une surface courbe, et sa courbure paraît uniforme. Sur le Pic de Ténériffe, M. de Humboldt voyait la mer abaissée de toutes parts autour de lui, à près de 92° de son zénit. Le soleil se levait pour lui 12′ plus tôt que pour l'habitant de la plaine. De la plaine, on voyait la pointe neigée de la montagne éclairée 12′ avant le lever et 12′ après le coucher du soleil. Les mêmes phénomènes se remarquent en petit sur toutes les montagnes, sur les tours un peu élevées, et même sur le pont d'un vaisseau en pleine mer. A toutes ces preuves, ajoutons-en de plus directes.

4. Avancez sous un même méridien, du sud vers le nord, vous verrez l'étoile polaire s'élever et le soleil s'abaisser; marchez du nord vers le sud, le pôle s'abaissera et l'équateur se relevera d'autant. Faites la même chose sous un autre méridien, vous observerez les mêmes variations proportionnelles au chemin que vous aurez fait, d'où il suit que la surface de la terre est une suite de cercles qui vont se réunir aux pôles, et que par conséquent la terre est sphérique. Tous les phénomènes du mouvement diurne en différens pays s'expliquent par cette supposition, dont il n'est plus permis de douter. On n'a donc plus que deux choses à vérifier : quelles sont les dimensions de cette sphère; est-elle parfaite, ou bien la terre est-elle un sphéroïde?

5. Ces questions ont dû de tout tems attirer l'attention et piquer la curiosité des astronomes. Aristote, dans son Traité du Ciel, liv. II, nous dit que ceux qui s'efforcent de conjecturer la grandeur de la terre, ne lui donnent guère que 400,000 stades de circonférence; nous lui donnons aujourd'hui 40,000,000 mètres. Le stade, à ce compte, serait environ de cent mètres. Ce passage ne prouve ni la valeur du stade, ni une mesure réelle de la terre par les mathématiciens dont parle Aristote : il est difficile d'estimer sur quoi portaient leurs conjectures. Ératosthène paraît avoir enseigné le premier ce qu'il fallait faire pour connaître la grandeur de la terre; quant à sa figure, ils la supposaient tous parfaitement ronde.

Ératosthène savait qu'à Syène, le jour du solstice à midi, les puits étaient éclairés jusqu'au fond ; que les édifices les plus élevés ne jetaient aucune ombre. Le soleil S (fig. 84) était donc au zénit du puits P ; mais au même moment à Alexandrie, Ératosthène voyait le soleil à la distance ZAS = 7° 12' : il en conclut que l'arc PA distance des parallèles était de 7° 12'. Il négligeait l'angle ASP, qui pour nous ne serait guère que d'une seconde, mais qu'il devait croire de 21", puisqu'il faisait la parallaxe du soleil vingt fois plus forte que nous. Il négligeait encore la réfraction qu'il ne connaisssait pas : il supposa donc AP = 7° 12', ou, suivant Cléomède, $\frac{360°}{50}$, car il ne prenait que les nombres ronds les plus approchans. Il ne tenait pas compte non plus du demi-diamètre du soleil, qui fait que les ombres sont nulles dans un espace circulaire d'un rayon de 15 à 16'; il était donc possible que l'arc terrestre fût de 7° 27', ou de 6° 57' seulement. On lui dit que la distance d'Alexandrie à Syène était de 5000 stades. Il venait de trouver que cette longueur était un 50ᵉ de la circonférence : il supposa que le chemin qui s'étendait le long du Nil, était tout en ligne droite; qu'il était tout dans le plan du méridien, quoique la différence de longitude entre les deux extrémités fût de près de 3°. La circonférence à ce compte devait être de 250000 stades, le degré de $\frac{5000}{7,2} = \frac{50000}{72}$, ou de 694st,444 ; pour avoir un degré de 700 stades en nombre rond, il donna 252000 stades à la circonférence. On ne doit donc regarder ce calcul d'Ératosthène que comme un exemple de ce qu'il y aurait à faire quand on aurait une véritable mesure, tant de l'arc terrestre que de l'arc céleste ; car dans le fait il n'avait ni l'une ni l'autre.

6. Cléomède est le seul auteur qui nous ait donné quelques détails sur cette prétendue opération ; il raconte qu'Ératosthène s'était transporté à Syène, pour s'assurer de la distance solsticiale du soleil au zénit, et la comparer à celle qu'il avait observée à Alexandrie, avec l'instrument de gnomonique, appelé *scaphé;* comme si Ératosthène, qui avait placé les armilles à Alexandrie, avait pu se contenter de ce moyen grossier, quand il en avait d'autres à sa disposition. Mais le livre de Cléomède ressemble à certains traités de Cosmographie, composés pour le commun des lecteurs, par un homme instruit, à la vérité, mais qui n'a que des idées superficielles d'Astronomie.

7. Posidonius indiqua une autre méthode, beaucoup plus simple

suivant Cléomède, mais dans la réalité beaucoup moins précise. Il supposa Rhodes et Alexandrie sous le même méridien; l'erreur était au moins de $1^\circ \frac{1}{2}$: la distance en ligne droite était estimée de 5000 stades, comme celle d'Alexandrie à Syène. Canobus, belle étoile du vaisseau, est invisible en Grèce; à Rhodes, on la voit paraître un instant au méridien, tout-à-fait à l'horizon. Cette même étoile, à Alexandrie, s'élevait, lui dit-on, d'un quart de signe ou de 7° 30′, ou de la 48ᵉ partie du méridien. 5000 stades, suivant ce calcul, étaient donc la 48ᵉ partie de la circonférence; le degré sera

$$5000^{st} \cdot \frac{48}{360} = 5000 \cdot \frac{8}{60} = \frac{4000}{6} = 666^{st} \cdot 666.$$

Il négligea la réfraction qui devait élever Canobus de 33′ environ à Rhodes, et de 4′ environ à Alexandrie, ce qui faisait une erreur de 29′, sans parler de l'incertitude des 5000 stades qu'il avait adoptés sur le récit très-incertain des navigateurs. D'ailleurs Ptolémée ne donne que 36° à la hauteur du pôle à Rhodes; ôtez-en 7° 30′, il ne resterait que 28° 30′ pour celle d'Alexandrie, qui est de 31°. Suivant le même Ptolémée, son degré était beaucoup plus court que celui d'Ératosthène. On a prétendu que son stade était plus grand; mais on serait assez embarrassé pour en fournir une preuve directe.

On voit que ces calculs fondés sur les données les plus incertaines, ne pouvaient donner tout au plus qu'un premier aperçu de la grandeur de la terre, et les deux astronomes ne portaient pas sans doute leurs prétentions plus loin.

8. Ptolémée dit, *Géograph.*, liv. I, ch. 3, que pour mesurer le degré de la terre sphérique, il n'est pas besoin de le prendre dans le méridien même, et qu'il suffit de connaître suivant quel angle il est incliné au méridien. Soit P le pôle (fig. 85), Z et Z′ les zénits des deux lieux; si vous connaissez les deux complémens de latitude avec l'un des deux angles azimutaux Z et Z′, vous pouvez calculer l'arc ZZ′, comparer cet arc avec l'arc terrestre mesuré entre les deux lieux, et avoir la valeur du degré. Géométriquement, il a raison, mais l'observation n'est pas facile. Ptolémée dit l'avoir faite, mais il ne nomme pas les lieux; il n'indique pas comment il a pu les voir l'un de l'autre, comment il a mesuré l'azimut; il ne donne ni l'arc terrestre, ni l'arc céleste; et sans entrer dans aucun détail, il dit simplement que, suivant les meilleures mesures, le degré est de

500 stades. *Géogr.*, liv. VII, chap. 5. Il nous apprend ailleurs qu'avec son quart de cercle, il a déterminé la distance des deux tropiques à cinq minutes près. Supposons qu'il se soit aussi trompé de 5′ sur son arc céleste, il n'aura eu la valeur de son degré qu'à $\frac{1}{12}$ près, et l'on ne voit pas pour quelle raison Ératosthène et Posidonius auraient été plus heureux. Il nous est donc impossible de compter sur ces mesures des Grecs.

9. Almamoun, prince arabe, demanda à ses mathématiciens si le degré terrestre était bien tel que l'annonçait Ptolémée, et il leur en prescrivit la vérification. Ils allèrent dans les plaines de Singiâr, se séparèrent en deux bandes, marchèrent les uns vers le midi, et les autres vers le nord, jusqu'à ce que la hauteur du soleil fût changée d'un degré ; ils mesurèrent leur route, et trouvèrent le même degré que Ptolémée. Almamoun ne se rendit pas, il leur fit recommencer l'observation dans un autre lieu ; par les mêmes procédés ils arrivèrent à la même conclusion. Almamoun confessa que Ptolémée avait raison ; il n'avait rien de mieux à faire, mais nous n'en dirons pas autant de ses astronomes. Au reste, on ajoute qu'ils trouvèrent un degré de 56 $\frac{2}{3}$ milles ; mais on n'est nullement d'accord sur la valeur de ces milles, pas plus que sur les stades des Grecs de Rhodes ou d'Alexandrie. Bailly croit que toutes ces mesures sont identiques, et les restes d'une ancienne mesure fort exacte dont la mémoire est perdue, ce qui n'est rien moins que prouvé.

10. Mon compatriote Fernel supposa qu'Amiens était sous le même méridien que Paris, et en effet l'erreur est presque insensible. Il partit pour Amiens, et comptant exactement les tours de roue de sa voiture, il s'avança vers le nord jusqu'à ce que la hauteur solsticiale du soleil fût d'un degré moindre qu'à Paris, et il trouva ainsi pour le degré d'Amiens, 57070 toises. La Caille trouva depuis pour ce même degré, 57074 toises. On peut admirer le bonheur de Fernel ; cependant il faut supposer que la toise de Fernel était précisément la même que celle de La Caille, et nous verrons qu'il y a quelque raison de croire qu'elle était plus courte (13).

11. Snellius entreprit enfin une mesure véritable. Par des mesures trigonométriques, il détermina la distance d'Alcmaer et de Berg-op-zoom ; il observa des distances au zénit aux deux extrémités de l'arc, et trouva un degré de 55020 trop faible de 2050. Muschembroeck cor-

rigea plusieurs parties de cette mesure; et Cassini de Thuri, par de nouvelles observations, porta ce degré à 57115 toises, ce qui paraît un peu trop fort.

12. Norwood, en Angleterre, par un mélange des méthodes de Fernel et Snellius, en tâchant de plus d'évaluer les détours de la route au moyen du graphomètre, trouva 57424 toises, et cette mesure était fort exagérée. Il la consigna dans un ouvrage intitulé *The Seaman's practice*. Newton paraît l'avoir ignorée, du moins quand il fit ses premiers calculs pour trouver la loi suivant laquelle décroît la gravité; n'ayant aucun livre sous sa main, il prit le degré de 60 milles anglais, tel que le supposaient les navigateurs de sa nation; cette évaluation fautive ne répondant point à la loi du carré de la distance, il abandonna pour le moment ses recherches. Voyez *a View of Isaac Newton's Philosophy*. Dublin, 1758. Préface, p. 6 et 7.

13. Picard fut le premier qui sut donner aux différentes parties de l'opération les soins qui seuls pouvaient la rendre exacte. Il mesura une base avec une toise étalonnée; il observa tous les angles de ses triangles avec un quart de cercle à lunette; il calcula les réductions au centre des signaux, prit les distances au zénit avec un grand secteur construit tout exprès, et trouva pour le degré d'Amiens, 57060 toises : mais c'était par la compensation de deux erreurs. D'une part, sa toise était plus courte d'un millième que celle de l'Académie des Sciences. Cette remarque, faite par La Caille, ne fut reconnue par les autres astronomes qu'après plusieurs vérifications de la base de Juvisi, et par de nouvelles observations des premiers triangles que Picard avait établis sur cette base. Lemonnier disputa long-tems; enfin il fut obligé de se rendre à l'évidence. En corrigeant les observations de Picard, des effets de l'aberration et de la nutation qui étaient inconnues à Picard, et sans lesquelles il n'avait pu ramener ses observations d'étoiles à une même époque, Lemonnier avait porté ce degré à 57183 toises; mais en tenant compte de la réfraction et de la différence des toises, La Caille le ramena à une valeur assez exacte, et qui différait très-peu de celle qu'avait trouvée Picard. Cet astronome n'avait donc guère commis que des erreurs inévitables; et par un bonheur qu'il méritait, son degré avait toute l'exactitude qu'on était en droit d'exiger.

14. La mesure de Picard fut continuée jusqu'à Dunkerque, par

La Hire, et jusqu'à Perpignan, par Cassini II, qui publia le tout en 1718, dans le livre de *la Grandeur et la Figure de la Terre*. On y voit que la longueur moyenne du degré entre Paris et Collioure, est de 57097'.

Par les observations comparées de Paris et de Bourges, on trouvait.. 57098
On conservait le degré de Picard, de..................... 57060
Ensuite, entre Paris et Dunkerque, on trouva (p. 236) un degré moyen de.. 56960
On avait donc de Paris vers le nord un degré plus petit de 100
En allant vers le sud, un degré plus grand de 37 ou....... 38.

Quoique ces différences ne fussent nullement proportionnelles aux distances mesurées, il en résultait un alongement de degrés en allant vers l'équateur. Cassini, p. 238, en conclut une ellipse alongée vers les pôles, et la conclusion était juste. On avait commencé par en tirer une tout opposée dans les Mémoires de 1701, où l'on concluait que la terre est un *sphéroïde aplati vers les pôles, ce qui semble favorable aux hypothèses modernes* (de Newton et d'Huygens). On a depuis changé la page pour rectifier la conclusion.

15. Richer, envoyé à Cayenne pour vérifier les réfractions et divers points de la théorie du soleil, s'était aperçu que son horloge, réglée à Paris, retardait, et il avait été obligé d'en raccourcir la verge; il en conclut que la pesanteur était moindre dans le voisinage de l'équateur, ce qui pouvait venir de deux causes : une plus grande distance au centre, et par conséquent un renflement du globe à l'équateur, un aplatissement au pôle et un sphéroïde elliptique. Mais cette cause n'aurait pu produire que 0",9 de retard diurne, et l'effet était presque triple. L'autre cause, plus puissante, était le mouvement diurne de la terre autour de son axe, plus sensible vers l'équateur qu'à Paris, dans la raison des cosinus de 5° et de 49°. Cette cause pouvait produire 1",46, et à l'équateur même elle eût produit 1",53. Un mouvement de rotation doit produire une force centrifuge, et l'effet observé était une preuve sensible du mouvement diurne de la terre.

16. La pesanteur que nous observons n'est que relative; elle est diminuée de tout l'effet de la force centrifuge qui, dans les différens climats, est plus ou moins oblique à la direction des graves; à l'équateur, les deux forces sont directement opposées; aux pôles, la force centrifuge est nulle; c'est donc seulement à l'un des pôles que l'on pourrait ob-

server la pesanteur absolue. Huyghens imagine un syphon composé de deux branches, formant un angle droit au centre de la terre. L'une des branches se dirige dans le plan de l'équateur et suivant un de ses rayons; l'autre se dirige au pôle et dans le sens de l'axe; il suppose les deux branches remplies d'un fluide homogène. Le fluide renfermé dans la branche polaire aura tout son poids; dans l'autre, au contraire, le poids sera diminué par la force centrifuge. Cette seconde colonne sera donc moins pesante que la première, et l'équilibre ne pourra s'établir que quand la branche équatoriale aura gagné par sa hauteur tout ce qu'elle aura perdu par le mouvement de rotation; d'où il suit que pour l'équilibre, les mers équatoriales doivent être plus élevées que les mers polaires; que les terres, pour n'être pas inondées, doivent avoir une forme analogue, et que la terre doit être un sphéroïde aplati. Il calcula que cet aplatissement devait être de $\frac{1}{578}$. Sa théorie est moins satisfaisante que celle de Newton; et comme elle est plus simple et moins savante, on a cru qu'elle était la plus ancienne, quoique dans la réalité elle ne soit venue qu'après celle de Newton.

17. Newton avait considéré la question d'une manière plus générale; il eut égard aux attractions de toutes les molécules qui composent le sphéroïde; et en leur supposant à toutes une même densité, il trouva un aplatissement de $\frac{1}{230}$. Les mesures de Cassini et La Hire étaient en contradiction avec ces théories, qui ne pouvaient passer pour bien rigoureuses : mais quelles que pussent être les variations de densité du centre à la circonférence, l'aplatissement était démontré et l'on ne pouvait en révoquer en doute que la quantité précise, qu'Huyghens faisait trop petite et Newton trop grande. Le milieu entre les deux était $\frac{1}{349}$, qui ne s'écartait guère de la vérité; j'ai trouvé $\frac{1}{309}$, comme je le dirai bientôt. On attaqua les mesures de Cassini, mais on répondit que la théorie pouvait avoir raison, sans que les observations eussent tort; que si la terre avait été primitivement sphérique, la rotation aurait dû l'aplatir; mais que si elle était primitivement alongée d'une certaine quantité, la rotation n'avait que diminué l'alongement. Mais pourquoi la terre eût-elle été d'abord alongée? Il serait difficile d'en trouver une raison fondée en principes et sur un calcul rigoureux.

18. Pour décider la question, on proposa de mesurer deux degrés assez éloignés l'un de l'autre pour que l'erreur des observations fût

nécessairement beaucoup moindre que l'inégalité que l'on cherchait. Godin, Bouguer et La Condamine partirent pour le Pérou, où, en dix années et avec des peines incroyables, ils parvinrent à mesurer trois degrés dans l'hémisphère austral ; ils furent aidés par deux officiers espagnols, Don Georges Juan et Antonio de Ulloa. Cette mesure est décrite dans trois ouvrages, la *Figure de la Terre*, par Bouguer, les *trois premiers Degrés de l'Hémisphère austral*, par La Condamine, et le *Voyage historique de l'Amérique méridionale*, par les Espagnols.

L'arc mesuré était de 3° 7′ 1″ qui répondaient à 176950′, et le degré était de 56775 toises ; mais en le réduisant au niveau de la mer, La Condamine trouvait 56750, Bouguer 56753, et Don Georges Juan le faisait de 56768 ; en supposant 57070 pour celui de Paris, la différence était au moins de 302 toises. Il était donc démontré que le degré de l'équateur était sensiblement plus petit que celui de Paris.

19. Maupertuis, Clairaut, Camus, Lemonnier et Outhier allèrent en Laponie : l'astronome suédois, Celsius, se joignit à eux ; ils mesurèrent un arc de 57′. Maupertuis et Outhier écrivirent l'histoire de leur voyage ; ils trouvèrent au cercle polaire un degré de 57419, c'est-à-dire de 549 toises plus grand que celui de Paris. En le comparant aux degrés de France, ils trouvèrent un aplatissement de $\frac{1}{178}$ jugé depuis beaucoup trop fort, et qui se trouve cependant le plus propre à représenter les douze degrés mesurés dernièrement en France et en Espagne.

20. Vers le même tems on songea à vérifier les degrés de France, sur l'exactitude desquels on avait élevé plus d'un doute. La Caille, en moins de deux ans, acheva presque seul ce grand ouvrage dont on a tous les détails et tous les résultats dans le livre de la *Méridienne vérifiée*, l'un des meilleurs, sans contredit, que nous ayons en ce genre ; il prouva que les degrés allaient tous en s'alongeant du midi vers le nord. Un degré de longitude, qu'il mesura près d'Arles, conduisit à la même conséquence, confirmée bientôt après par le retour des Académiciens du Pérou. Depuis ce tems, tous les degrés mesurés en différens pays constatèrent de plus en plus cette conséquence de la théorie physique et mathématique. Il est vrai que tous ces degrés donnent des quantités un peu différentes pour l'aplatissement qu'on suppose d'environ $\frac{1}{320}$; mais tous au moins prouvèrent un aplatissement incontestable, et c'est tout ce que les défauts de plusieurs de ces mesures et les difficultés inhérentes de toutes ces opérations permettent d'exiger.

21.

21. Tous ces degrés ont été mesurés sur les principes de Snellius et de Picard ; toute la différence est dans le plus ou moins de perfection des instrumens, l'adresse ou la patience et peut-être aussi la bonne-foi des observateurs, les attentions plus recherchées et les méthodes plus rigoureuses de calculs. Il en faut pourtant excepter le degré de Pensilvanie, où Mason et Dixon ne firent aucun usage de la trigonométrie. Au moyen d'une lunette méridienne portative, ils tracèrent dans les plaines de la Pensilvanie, un long alignement qu'ils mesurèrent à la toise. Quand ils rencontraient quelque obstacle qui les empêchait de prolonger leur ligne, ils menaient à quelque distance une autre méridienne parallèle à la première ; et observant enfin avec un grand secteur les distances zénitales des mêmes étoiles aux deux extrémités, ils trouvèrent à 39° 12′ de latitude nord, un degré de 56888 toises.

22. La Caille, au Cap de Bonne-Espérance, dans l'hémisphère austral, trouva, par 33° 18′ de latitude, un degré de 57040 toises qui paraît un peu fort. Il le mesura de la même manière que les degrés de France, avec les mêmes soins et les mêmes instrumens ; sa base est d'une bonne longueur, ses triangles en petit nombre et bien conditionnés. J'ai eu entre les mains ses manuscrits, je n'y ai rien trouvé qui pût autoriser le moindre soupçon. Il faudrait dire que l'hémisphère austral est peut-être un peu différent de l'hémisphère boréal, ou bien que la courbure des méridiens n'est pas parfaitement régulière. Lalande dit que la toise de La Caille était un peu trop grande ; mais elle aurait dû donner un degré trop faible, et il est au contraire beaucoup trop fort, puisqu'il est plus grand que le 45° mesuré en France, et qui lui-même était trop fort.

23. Les pères Maire et Boscovich mesurèrent deux degrés entre Rome et Rimini. Boscovich avait lui-même dirigé la construction de son secteur et de son quart de cercle ; ils rendirent compte de leur travail dans un ouvrage dont le titre est : *De litterariâ Expeditione per Pontificiam ditionem* 1755. Le livre V, qui est tout de Boscovich, contient plusieurs formules et différentes recherches sur l'aplatissement de la terre. L'auteur a donné un soin particulier à la réduction des angles au centre des stations : mais la méthode de La Caille, *Mérid. vérifiée*, était encore plus directe et plus sûre, quoiqu'un peu obscure. Ils mesurèrent un espace de 123221ᵗ,3, dont l'amplitude céleste était de 2°

9′ 47″,0, et donnèrent un degré de 56979ᵗ pour la latitude moyenne de 43°. C'est Boscovich qui a suggéré l'idée de mesurer les degrés de Turin, de Hongrie, d'Autriche et de Pensilvanie. MM. Oriani, Conti et Calandrelli, avec de nouveaux cercles, ont vérifié la latitude de Rome. MM. Oriani et Moynet ont observé de même à Rimini : ce dernier a retrouvé la base et observé plusieurs azimuts. Ces différens travaux n'ont point encore été publiés, et il en résultera sans doute quelque changement dans la valeur de ce degré; ce qu'on entrevoit n'est pas favorable à l'hypothèse de la courbure régulière des méridiens.

24. En demandant que divers degrés fussent mesurés, les uns dans des pays de plaines, et les autres dans des pays de montagnes, l'intention de Boscovich avait été de mettre dans tout son jour l'attraction des montagnes sur le fil à plomb des secteurs. Beccaria, qui fut chargé de la mesure du degré du Piémont, partagea son arc en deux, pour voir quel degré résulterait et de l'arc total et des deux arcs partiels.

L'arc total était de 1° 7′ 44″71 pour 64887ᵗ,01, ce qui donne 57468ᵗ,59.
L'arc boréal..... 27. 4.29 pour 26153.62............. 57965.65.
L'arc austral..... 40.40.42 pour 38733.59............. 57137.79.

Mais Beccaria ne pense pas que cette analogie ordinaire et qui suppose une courbure régulière, puisse s'appliquer aux pays de montagnes, et moins qu'à tout autre au pays où il a mesuré son degré; il pense que l'attraction des montagnes voisines surpassait celle du Chimboraço observée par Bouguer et La Condamine. Une attraction pareille a été constatée par Maskelyne, qui a pris des distances au zénit, au nord et au sud de la montagne Schechallien, en Écosse. Il a reconnu que le fil à plomb en était dérangé de manière à produire des erreurs de 6″. Lalande (2704) croit que l'erreur pourrait être de 900 toises sur le degré du Piémont, et à l'article (2698) il le réduit à 57069; c'est 400 toises de moins qu'on ne tire de l'arc total. Beccaria, dans son *Gradus Taurinensis,* remarqua, le premier, que les triangles à la surface de la terre sont des triangles sphériques dont les angles doivent toujours surpasser 180° d'une quantité qui peut aller à 5″ et plus.

25. En France, le 45ᵉ degré avait été trouvé de 57023 par La Caille. Ce degré était trop fort, et l'erreur provenait de la petite base de Rhodès, qui avait forcé d'augmenter considérablement les degrés méridionaux.

Voyez dans la *Base du Système métrique*, tom. III, p. 159 et suiv., les objections que j'ai proposées contre cette base et contre les conséquences qui en ont été déduites. Nos mesures réduisent ce degré à 57008 toises, ou 57012',57 au plus. Le 50° degré qui résulte de nos mesures, diffère peu de 57084 toises.

26. Le P. Liesganig, ayant mesuré le degré de Hongrie, trouva pour la latitude moyenne 45° 57', un degré de 56881'; et par divers arcs mesurés près de Vienne, les quantités suivantes :

Latitudes 48° 43', degrés 57086 toises.
47.47 57074
47.15 .... 57064.

Mais, dans un Journal fort répandu, on a élevé quelques doutes sur la bonté des observations, et même sur la véracité de l'observateur. Sans entrer dans cet examen, nous nous bornons à copier les déterminations que l'auteur a consignées aux pages 255 et 257 de l'ouvrage intitulé : *Dimensio graduum Meridiani Viennensis et Hungarici Vindobonæ* 1770.

27. Depuis la dernière mesure exécutée en France, M. Svanberg a vérifié le degré de Laponie. Les instrumens dont il s'est servi sont un cercle de la construction de Lenoir, tout semblable à ceux qui nous avaient servi pour les degrés de France, un mètre et une toise, étalonnés par Méchain et moi. On peut voir tous les détails de cette belle opération dans l'ouvrage rédigé par M. Svanberg, sous le titre d'*Exposition des Observations faites en Laponie, pour la détermination d'un arc du méridien*. Stockolm, 1805. On y voit, page 192, que le degré coupé par le parallèle de 66° 20', est de 57196,159 toises, plus petit de 223 toises qu'il n'avait été trouvé par les Académiciens français. L'aplatissement qu'il en déduit est $\frac{1}{307,405}$, quand il le compare avec notre mesure. Quoique cet aplatissement soit une espèce de confirmation de ce que j'ai trouvé, quoique je ne fasse aucun doute que la nouvelle opération ne mérite en tous sens la préférence sur celle de 1736, cependant il me paraît extrêmement difficile de supposer que nos Académiciens aient pu se tromper de plus de 200 toises sur leur degré. On voit déjà, par la comparaison de la partie géodésique, que l'erreur ne viendrait

ni de la base, ni des triangles. M. de Svanberg remarque lui-même que la latitude de l'église de Tornéa, extrémité de l'ancien arc, est la même qu'on a trouvée en 1736; tout le mal viendrait donc des observations faites anciennement au signal de Kittis. Mais on ne voit pas clairement comment elles donneraient une erreur de 12″ sur l'amplitude. Pour la rendre moins invraisemblable, M. Svanberg rapporte les premières observations faites au Pérou, où l'on voit des erreurs plus fortes; mais il est aisé de répondre que le secteur dont on s'était servi d'abord au Pérou, avait de grands vices de construction. Les Académiciens, à l'aide d'un horloger qui les accompagnait, en construisirent de nouveaux dont on pourrait encore se défier à certain point. Au lieu que le secteur du nord avait été fait par Graham, sur le modèle du secteur de Greenwich. Ce secteur rapporté en France, a servi à Lemonnier pour vérifier la découverte de l'aberration; enfin les Académiciens avaient fait des expériences directes pour s'assurer que le transport ne le dérangeait pas. Tout ce qu'on pourrait reprocher à nos Académiciens, ce serait de n'avoir pas retourné leur secteur de l'est à l'ouest à chaque station, parce que ce retournement leur parut trop pénible; mais on peut répondre encore que l'ayant retourné en France, ils ne trouvèrent pas que la ligne de collimation eût changé. J'ai lu attentivement un manuscrit où Lemonnier avait consigné toutes les observations astronomiques, même celles dont on n'avait fait aucun usage, je n'y ai rien vu qui pût éveiller le soupçon. Enfin ce qui pourrait nous autoriser à rejeter une grande partie de la différence sur des irrégularités locales, c'est que le terme sud était bien loin de celui des Français; que le terme nord n'était peut-être pas non plus bien exactement le même, quoique sur la même montagne. Car le nouvel arc est de 1° 37′ 19″,56, tandis que l'ancien était simplement de 57′ 27″ ou 30″, ensorte que la différence est de 39′ 40″.

28. Postérieurement à la mesure de Laponie, le colonel Mudge mesura trois degrés en Angleterre, entre Clifton et Dunnose, dans l'île de Wight. Par la station d'Arbury, il a partagé son arc en deux parties presque égales; il a soudivisé ces parties en liant ses triangles à l'observatoire de Greenwich et à celui du lord Marlboroug. On a été fort surpris que tous les arcs partiels comparés entre eux, indiquassent un alongement. Mais, en laissant de côté Greenwich et Blenheim, M. Rodriguez a montré dans les Transactions philosophiques de 1812, que l'arc entier

s'accorde avec le demi-grand axe et l'aplatissement qui résultent de nos mesures; qu'il suffirait ensuite de supposer une erreur de 5″ à la station intermédiaire d'Arbury, ponr que les deux arcs partiels appartinssent au même sphéroïde. Il restera pourtant à concevoir comment le beau secteur de Ramsden, dont l'erreur était constante ou nulle aux deux extrémités, a pu avoir une erreur différente de 5″ à la station intermédiaire. Mais que ces anomalies proviennent de l'instrument ou des inégalités locales, ce qui paraît n'être pas encore bien décidé, il en résultera toujours que dans les opérations de ce genre, il n'y a de sûreté que dans les arcs d'une grande étendue, tel que celui qui va de Dunkerque à Barcelone ou Formentera, où l'erreur, quelle qu'en puisse être la cause, se trouve divisée par un plus grand intervalle. Dans les arcs trop petits et contigus, l'errenr inévitable des observations doit avoir une trop grande influence sur le résultat, qui ne peut répandre aucun jour sur la question de l'aplatissement.

29. On voit dans les Mémoires de Calcutta, que M. William Lambton, en 1802 et 1803, a mesuré un degré du méridien et un degré perpendiculaire, à 12° 32′ ½ de latitude. La base mesurée avec une chaîne d'acier était de 40006,4418 pieds anglais. Le secteur était de Ramsden, comme celui de M. Mudge, mais il était beaucoup moins grand: l'amplitude de l'arc était de 1° 34′ 56″,428. Le degré, suivant M. Lambton, est de 60495 fathoms ou 56765 toises; le degré perpendiculaire de 61061 fath. ou 57294 toises, d'où j'ai conclu un aplatissement de $\frac{1}{205,67}$; mais M. Rodriguez, dans le Mémoire cité, dit avoir refait les calculs et trouvé des erreurs considérables: avec ses corrections, il tronve que ce degré s'accorde avec le rayon de l'équateur qui résulte de nos mesures et avec l'aplatissement $\frac{1}{310}$.

30. Après ces détails purement historiques, passons à la partie théorique, et voyons quelles sont les opérations partielles dont se compose la mesure d'un ou plusieurs degrés du méridien.

Il est impossible dans un pays habité, de trouver un arc du méridien entièrement libre, et assez égal pour être réellement mesuré avec le mètre ou la toise. Il est douteux même que dans les déserts, ce parti fût le plus expéditif et le plus sûr. Les deux extrémités d'un arc du méridien seront toujours invisibles l'une pour l'autre; il faut donc, en partant d'un lieu donné, savoir s'avancer de station en station

dans la direction du méridien, et trouver le moyen de savoir, à chaque station nouvelle, combien on a fait de chemin vers le nord ou le midi. Ainsi, dans notre opération dont l'extrémité boréale était à Dunkerque, quand j'étais sur la tour de cette ville, je pouvais, par des moyens astronomiques, déterminer la direction DM de la méridienne (fig. 86); et si j'avais aperçu à dix ou douze lieues un autre objet M, le problème eût été en ce moment de déterminer en toises la longueur de DM. Mais ne voyant aucun point remarquable qui fût exactement dans cette direction, et voyant au contraire, à ma droite et à ma gauche, les tours W de Watten et C de Cassel suffisamment éloignées l'une de l'autre, je devais sentir la nécessité de former un triangle entre ces trois points.

31. Supposons donc qu'après avoir mesuré CDW et CDM, je me sois transporté à Cassel et à Watten, pour y prendre les angles DCW et DWC : alors j'aurais dû trouver $C + D + W = 180° + 2$ ou $3''$, ce qui m'aurait assuré de la bonté de mes opérations; j'aurais connu les angles CDM, WDM, c'est-à-dire, les azimuts de Cassel et Watten sur l'horizon de Dunkerque; et prenant arbitrairement un des côtés CD ou CW pour unité, j'aurais connu les deux autres par les analogies des triangles rectilignes,

$$\sin W : \sin C :: DC : DW = \frac{DC \sin C}{\sin W} = \frac{\sin C}{\sin W},$$
$$\sin W : \sin D :: DC : CW = \frac{DC \sin D}{\sin W} = \frac{\sin D}{\sin W}.$$

J'aurais pu de même calculer les segmens W*a* et C*a* formés par la méridienne DM sur le troisième côté CW et la partie D*a* de la méridienne.

32. Pour prolonger la ligne D*a*, de Cassel et de Watten, j'avais à prendre les angles au clocher de Fiefs, c'est-à-dire WCF, CWF et WFC, qui m'auraient donné, toujours en mêmes mesures, c'est-à-dire en parties de DC (ligne de 7 lieues environ), les distances CF et WF et la partie interceptée *ab* de la méridienne. Ainsi, de triangle en triangle, je serais arrivé jusqu'à Amiens, que j'aurais trouvé à peu de distance de la méridienne, ou jusqu'au Panthéon, à Paris, que j'aurais trouvé presque exactement sur la méridienne. En effet, dans le triangle MDP (fig. 87), entre Saint-Martin du Tertre, Dammartin

et le Panthéon, la partie qr de la méridienne était presque parallèle au côté MP; de sorte qu'en abaissant sur la méridienne la petite perpendiculaire $Px = rP \sin r$, et calculant $rx = rP \cos r$, j'aurais eu pour longueur totale de ma méridienne, $Dr + rx$.

33. Comparant alors les hauteurs du pôle à Dunkerque et au Panthéon, ou les distances de la même étoile au zénit des deux lieux, j'aurais eu l'arc céleste qui répond à l'arc terrestre $Dr + rx$; et il n'aurait plus manqué que de connaître en mètres ou en toises la longueur du côté CD prise pour unité dans tout ce qui précède. Car, soit $CD = n'$, l'arc du méridien eût été $n(Dr + rx)$; et supposant l'arc céleste de $2° 11' 20''$, comme il s'est en effet trouvé, j'aurais dit :

$$2° 11' 20'' : 3600'' :: n(Dr + rx) : \text{valeur du degré en toises.}$$

34. Pour connaître n, j'avais plus d'un moyen; je pouvais, comme en 1739, mesurer une base, c'est-à-dire une droite BA sur le bord de la mer; dans le triangle DBA (fig. 86), calculer

$$\sin D : \sin B :: BA : DA = \frac{BA \sin B}{\sin D}.$$

Les angles B et D, peu différens de deux droits et presque égaux, m'auraient fait connaître DA avec la même précision que BA, parce que le rapport des deux sinus changerait peu quand il y aurait une erreur de quelques secondes sur chacun des deux angles.

Alors, dans le triangle CDA, j'aurais eu

$$\sin C : \sin A :: DA : DC = \frac{DA \sin A}{\sin C}, \text{ ou } DC = BA.\left(\frac{\sin B}{\sin D}\right)\left(\frac{\sin A}{\sin C}\right).$$

J'aurais pu par des moyens tout semblables, lier une autre base à l'un quelconque de mes côtés; par exemple, lier la base de Villersbretonneux au côté qui joignait Villersbretonneux et Sourdon, près d'Amiens. Cette base aboutissait à l'une des stations, et l'on épargnait l'un des deux triangles de jonction : la base pouvait elle-même être un des côtés des triangles; ce dont on voit un exemple encore unique dans la Méridienne de 1739, où le côté qui joignait les signaux de Méri et d'Ennordre, près de Bourges, avait pu être réellement mesuré sur une plaine inculte. Enfin je pouvais, ainsi que je l'ai réellement fait, joindre à l'un des côtés qui avoisinent Paris, une base mesurée

sur l'une des grandes routes qui abontissent à cette capitale. On épargne ainsi la peine d'aplanir le terrain, la mesnre en devient plus facile et plus sûre; mais il faut qne la route aille en ligne droite au moins sensiblement, ce qui est assez rare. C'est ce que Picard avait trouvé dans nn espace de 5000 toises, sur la route de Juvisi, et ce que nous avons rencontré sur la route de Melun et sur celle de Perpignan, dans nn intervalle de plus de 6000 toises. Une base plns conrte serait moins sûre, une plus longue est trop difficile à rencontrer. M. Henri en a pourtant mesuré une de 11000 toises près de Strasbourg.

C'est ainsi que l'on pourrait conduire à-la-fois toutes les parties de l'opération, mais on risquerait d'entreprendre et de conduire assez loin une chaîne de triangles qu'il serait ensuite trop difficile de continuer jusqu'au but; et l'on préfère souvent de tracer d'abord le plan de son opération, en commençant par choisir les stations, et alors on n'a pas besoin de mettre une grande précision dans les mesures provisoires des angles et des azimnts.

35. Il est assez indifférent par qnelle espèce d'observation on commencera, par les bases, les distances zénitales ou les azimnts; il suffit d'avoir une connaissance approchée d'un côté du premier triangle. Ainsi nous allons commencer par le choix des stations.

Du point de départ observez tous les points les plus remarquables qui ne s'éloignent pas trop de la méridienne qne vous voulez mesurer: attachez-vous principalement aux objets qui sont à 30° environ de part et d'autre de cette ligne; déterminez-en les azimuts à une minute près, ce qni se fait aisément. Choisissez de préférence les endroits assez élevés pour être aperçus, comme on dit, *dans le ciel*. Un objet est souvent fort difficile à reconnaître quand il se projette sur une forêt ou une montagne voisine : mais ce n'est pas assez que du point A, fig. 88, l'objet B soit vu projeté sur les nnages; il faut que réciproquement, du point B le point A soit vu de même. Pour vons en assnrer, du point A prenez la distance zénitale du point B et la distance zénitale du point opposé C de l'horizon : si la somme $ZAB + ZAC > 180°$, l'objet A sera bien visible de B; si la somme est plns petite et que l'horizon opposé soit en C', l'objet A se projettera en C sur la montagne C'P, et sera difficile à voir, à moins que la distance AC ne soit considérable. Si la somme est de 180° juste, ou de 180° 3 ou 4', vous pouvez espérer

espérer que la réfraction terrestre, en élevant le signal A, le fera voir plus facilement.

Cette circonstance décide de la couleur des signaux. Quand un signal ordinaire se projette sur le ciel, il est utile de le noircir; quand il se projette sur une montagne ou une forêt, il est utile de le blanchir pour qu'il se détache mieux sur un fond verd ou grisâtre.

A chaque station que vous visitez ainsi, prenez en outre les angles horizontaux ou de position entre la dernière station que vous avez quittée et celles que vous pourrez y joindre par la suite. Si vous avez le tems, faites-y ce qu'on appelle un tour d'horizon, en prenant les angles entre tous les objets remarquables; vous vous assurerez de cette manière, le long de votre méridienne, un nombre de stations plus que suffisant, entre lesquelles vous choisirez celles qui vous donneront une suite de triangles mieux conditionnés.

36. La condition la meilleure généralement, est que les triangles soient équilatéraux ou à peu près : une règle plus générale est de n'y admettre aucun angle trop aigu qui soit opposé au côté connu; soient A et C cet angle et ce côté, A′ et C′ un autre angle et le côté opposé,

$$\sin A : \sin A' :: C : C' = \frac{C \sin A'}{\sin A},$$

$$dC' = \frac{dC \sin A'}{\sin A} + \frac{C \cos A' \sin dA'}{\sin A} - \frac{C \sin A' \sin dA \cos A}{\sin^2 A},$$

expression qui vous prouve d'abord que l'erreur du côté conclu ou dC', serait celle du côté connu, augmentée dans le rapport $\left(\frac{\sin A'}{\sin A}\right)$, qui est plus grand que l'unité; car soit $A = 30°$, il restera 150° pour les deux autres angles, et la valeur moyenne de A′ sera 75°. Vous aurez ensuite une erreur $dC'_{\prime\prime} = \frac{C \cos A' \sin dA'}{\sin A}$, erreur assez considérable et proportionnelle à l'erreur que vous commettrez sur A′; enfin une erreur plus considérable

$$dC'_{\prime\prime\prime} = -\frac{C \sin dA \sin A' \cos A}{\sin^2 A} = -\frac{C \sin dA \sin A' \cot A}{\sin A}$$

qui peut s'ajouter à la précédente, parce que l'erreur dA peut tout aussi bien être en sens contraire de dA'.

Vous aurez

$$\frac{dC'_{a}}{dC'_{a}} = -\frac{C \sin dA \sin A' \cot A}{\sin A} \cdot \frac{\sin A}{C \cos A' \sin dA'} = -\frac{dA \cot A}{dA' \cot A'};$$

il importe donc que le sinus qui est au dénominateur soit le plus grand possible. Aussi La Caille s'était-il imposé la loi de n'admettre aucun angle au-dessous de 30°, et c'est un précepte dont il ne faut jamais s'écarter sans la plus indispensable nécessité.

57. Après le choix des stations vient naturellement la question de la nature des signaux qui les feront distinguer de loin. Le meilleur de tous les signaux est, sans contredit, une lampe à courant d'air, avec un miroir parabolique qui en réfléchit la lumière dans la direction de l'observateur : on multiplie les réverbères selon la distance de laquelle on doit les observer. Cette espèce de signal a cependant plusieurs inconvéniens : d'abord on ne peut observer que la nuit, et alors les stations sur les montagnes désertes et escarpées deviennent extrêmement pénibles, quelquefois dangereuses. Il faut bien diriger les miroirs, et avoir un gardien qui entretienne fidèlement les lampes; car si quelques-unes viennent à s'éteindre, le centre de figure change, et votre angle doit varier d'une quantité qui à la vérité ne peut être considérable. Nous avons fait l'essai de ces signaux, Méchain et moi; mais dans un tems de trouble comme celui où s'est fait notre mesure, nous n'avons pas tardé à sentir que, pour notre sûreté, il fallait y renoncer absolument. Dans des tems plus tranquilles, Méchain en a repris l'usage dans les environs de Valence en Espagne; et ses observations, dont j'ai eu communication, ne m'ont pas paru plus régulières que celles qu'il avait faites sur des signaux ordinaires. Cependant MM. Biot et Arago, dont l'ouvrage ne tardera pas à paraître, se sont uniquement servis de lampes, et en paraissent contens. Je ne les ai employées que deux ou trois nuits, et un hasard malheureux a fait, toutes les fois, que la lumière que je voyais parfaitement d'ailleurs, avait des oscillations continuelles qui rendaient l'observation difficile et incertaine.

58. Les Anglais emploient des feux de Bengale, qui ont une lumière extrêmement vive; mais elle dure trop peu pour l'usage de nos cercles qui exigent qu'on répète 20 ou 30 fois l'angle qu'on veut avoir avec précision. Elle dure assez pour l'usage du Théodolite, qui est un cercle

horizontal au centre duquel est une lunette suspendue comme les lunettes méridiennes : on peut élever cette lunette ou l'abaisser dans la direction des deux signaux, et le cercle azimutal donne l'angle réduit à l'horizon. Ces instrumens sont si bien divisés, que les angles simples s'y prennent, en quelques minutes, avec la précision de 2 ou 3″ au moins, ensorte qu'une observation suffit : mais les préparatifs sont plus longs, par la nécessité d'assurer l'horizontalité du cercle et celle de l'axe autour duquel tourne la lunette. Voyez l'ouvrage du major-général Roy, dans les Transactions philosophiques, 1790.

39. A défaut des signaux de feu, et avant qu'ils eussent été imaginés, les signaux étaient un clocher, un arbre, une tour, un moulin ou tel autre édifice. Les clochers ont plusieurs inconvéniens; l'intérieur en est souvent embarrassé de charpente, ensorte qu'on y observe fort incommodément et presque jamais au centre même. C'est encore là le moindre mal, et l'on peut y remédier; mais quand ils forment une flèche pointue, rarement elle est parfaitement droite; les différentes faces en sont gauches et contournées; et quand elles sont éclairées obliquement et inégalement, il est difficile de viser à l'axe, qui d'ailleurs n'est pas perpendiculaire, d'où résulte une erreur impossible à calculer. Un arbre dont on distinguerait le tronc et la tête, serait un fort bon signal; on les voit de très-loin quand ils se projettent dans le ciel. Si la tête était bien ronde et bien droite, peu importerait qu'on distinguât la tige : trop souvent les arbres sont difficiles à voir projetés sur la terre, on ne peut les discerner s'ils se projettent sur un bois, et dans ce cas, La Caille les couvrait d'un drap blanc; mais si ces arbres sont plantés exprès, le vent peut les faire pencher, et alors il en résulte des erreurs sensibles. Une tour présente ordinairement une masse trop considérable et trop irrégulière pour que de toutes les stations voisines on la voie tout-à-fait la même, de manière à viser invariablement à l'axe. Aussi, Méchain et moi, nous n'avons jamais manqué de placer des signaux particuliers sur les grosses tours où nous avons observé. Les moulins, outre la masse et l'irrégularité de figure, ont un inconvénient particulier; on les change de position pour les exposer au vent; l'axe de rotation n'est point au centre de figure : de là des erreurs impossibles à connaître et difficiles à calculer, quand on connaîtrait chaque fois dans quel azimut le vent soufflait : jamais nous ne nous en sommes servis. Les édifices ordinaires et plus irréguliers font les plus mauvais signaux.

Voyez, dans la Méridienne vérifiée, l'angle entre la Bastide et la chapelle Saint-Pierre, IIIᵉ partie, page xliij.

40. Autant que je l'ai pu, j'ai construit mes signaux : ils étaient composés de quatre poutres inclinées, enfoncées de quelques pieds en terre, et se réunissant en pyramide tronquée bien carrée. Les quatre faces étaient couvertes de planches jusqu'à près de 2 mètres de terre; ensorte que la partie pleine soutendit toujours un angle de 31″, c'est-à-dire que H étant la hauteur de la pyramide pleine, D la distance, j'eusse toujours $H = 0.00015D$. L'expérience m'avait appris qu'il fallait cette longueur pour que le signal fût bien visible : la largeur de la base était un tiers de la hauteur. J'avais remarqué que les pointes des clochers étaient souvent invisibles, et voilà pourquoi j'ai toujours préféré les pyramides tronquées. L'observation horizontale n'en était pas moins bonne, et la distance zénitale était plus sûre. Méchain, qui avait varié d'abord sur la forme de ses signaux en Espagne, les fit en France sur ce modèle. Dans quelques circonstances particulières, comme au milieu d'une forêt, il faut donner aux signaux une hauteur démesurée. Ainsi, dans la forêt d'Orléans, mon signal avait plus de 20 mètres de hauteur, et la lunette était à 17 mètres de terre. Dans ce cas, il ne faut rien épargner pour la solidité; car ces grands signaux deviennent fort incommodes par leurs oscillations dès que le vent s'élève.

41. Il arrive souvent que le signal est obliquement éclairé, et si l'on vise au milieu de la face visible, on s'écarte nécessairement de l'axe; l'erreur est alors facile à réparer. Vous connaissez les dimensions de la pyramide et la position des quatre arêtes par rapport aux signaux voisins. Soit C le centre du signal ou un point de l'axe (fig. 89), M ou M′ le milieu de la partie éclairée; vous avez mesuré BOM ou BOM′, au lieu de $BOC = BOM + COM = BOM' - COM'$. Imaginez la perpendiculaire Mx, vous aurez

$$\tang COM = \frac{Mx}{Ox} = \frac{CM \sin MCO}{OC - CM \cos MCO} = \frac{\left(\frac{CM}{OC}\right)\sin MCO}{1 - \left(\frac{CM}{OC}\right)\cos MCO},$$

$$COM = \left(\frac{CM}{OC}\right)\frac{\sin MCO}{\sin 1''} + \left(\frac{CM}{OC}\right)^2 \frac{\sin 2MCO}{\sin 2''} + \text{etc.}$$

Le premier terme suffit toujours; vous connaissez le second membre,

vous savez toujours quelle est la face observée ; vous savez que la correction est additive quand la face éclairée est la plus voisine de l'objet comparé B, et qu'elle est soustractive, si c'est la face éloignée M'. Ainsi nul doute sur la correction, à moins que vous n'ayez des raisons de douter si le sommet de la pyramide était visible, ce qui arrive dans les tems excessivement brumeux où le signal est faiblement éclairé. Dans ces tems, il vaudrait mieux ne pas observer, mais on est quelquefois maîtrisé par les circonstances.

42. Il faut toujours connaître la hauteur du signal au-dessus du sol. Soit H cette hauteur au-dessus du sol, $\left(\frac{H}{D \sin 1''}\right)$ sera la correction additive à la distance zénitale observée pour avoir la distance du sol au zénit de la station O. Soit h la hauteur de l'instrument à la station O, $\left(\frac{h}{D \sin 1''}\right)$ sera la correction soustractive de la distance zénitale observée pour la réduire à celle qu'on aurait prise à terre. Soit enfin H' la hauteur du signal O au-dessus de la lunette, $\left(\frac{H'}{D \sin 1''}\right)$ sera la correction additive à la distance zénitale observée pour la réduire à celle qu'on aurait prise du sommet du signal O.

43. L'avantage de ces signaux construits exprès, et qui leur est commun avec les signaux de feu, c'est qu'on peut toujours se placer au centre, et les angles à cet égard n'auraient aucun besoin de réduction. Mais supposons que ne pouvant vous placer au point C pour observer l'angle ACB (fig. 90), vous ayez été forcé de vous placer en O, d'où vous avez mesuré l'angle AOB,

$$\text{ACB} = \text{AIB} - \text{CBO} = \text{AOB} + \text{CAO} - \text{CBO},$$

ou

$$\begin{aligned} \text{C} &= \text{O} + \left(\frac{\text{CO}}{\text{AC}}\right)\frac{\sin \text{COA}}{\sin 1''} - \left(\frac{\text{CO}}{\text{BC}}\right)\frac{\sin \text{BOC}}{\sin 1''} \\ &= \text{O} + \left(\frac{r}{\text{D}}\right)\frac{\sin(\text{O}+y)}{\sin 1''} - \left(\frac{r}{\text{G}}\right)\frac{\sin y}{\sin 1''}. \end{aligned}$$

On voit que C est l'angle réduit, O l'angle observé, $y = \text{BOC}$ angle qu'il est toujours possible d'observer, $\text{COA} = (\text{AOB} + \text{BOC}) = (\text{O}+y)$, r la distance au centre, $\text{AC} = \text{D}$ la distance à l'objet à droite, $\text{BC} = \text{G}$ la distance à l'objet à gauche.

Telle est la formule générale que j'ai donnée pour les réductions ; on peut la comparer aux règles nombreuses données par La Caille (*Méridienne vérifiée*, IIIe partie, p. 6). Le cercle donne les moyens d'observer l'angle de direction y, quelle que puisse être sa valeur, depuis o jusqu'à 360° ; alors on donnera aux deux sinus leurs signes algébriques. Il reste à mesurer $r = OC$, ce qui se fait directement en tendant une ficelle de O en C, si l'espace est libre : s'il ne l'est pas, on peut toujours y suppléer par des moyens trigonométriques très-simples. Voyez la *Base du Système métrique*, tom. I, Disc. prélimin., p. 128 et suiv. Il faut avoir une valeur approchée des distances AC et BC ; mais les réductions étant ordinairement de quelques secondes, on pourra les négliger d'abord pour calculer le triangle. On verra, dans l'ouvrage cité, comment on peut faire ensorte que les deux termes de correction soient égaux et se détruisent. On voit facilement qu'en faisant une double observation, l'une à droite du centre, comme dans la figure, l'autre à gauche sur le prolongement de OC, et à une distance égale, les deux termes changeraient de signe sans changer de valeur ; que la correction serait égale, mais de signe contraire, et que le milieu entre les deux observations donnerait l'angle véritable.

44. Ces détails étaient essentiellement liés à l'article des signaux qu'on fait construire et placer dans le tems où l'on est occupé du plan de l'opération. A présent, nous devons parler des bases dont la mesure est le fondement de tous les calculs géodésiques.

Il faut choisir un local qui puisse se lier facilement aux triangles de la méridienne ; on en fait aplanir les principales inégalités, quand elles sont trop subites, et qu'on n'a pas trouvé de routes à sa portée : le premier soin est alors de faire le tracé de la base. Une lunette méridienne portative ou la lunette d'un cercle vertical est alors d'un grand secours.

Soit BA (fig. 91) la base projetée qui doit joindre les axes des deux signaux AC, BD. Sur la longueur BA, choisissez vers le milieu, s'il est possible, un point M duquel vous apercevriez vos deux signaux ; portez-y votre cercle, et visez successivement à vos deux signaux. Si l'angle horizontal entre les deux signaux est de 180° juste, tant mieux, mais cela n'est pas indispensable : s'il s'en faut de quelques minutes, comme il m'est arrivé à Melun, à Perpignan, le mal ne sera pas bien grand ; mais dans ce cas, prenez exactement l'angle horizontal BMA,

qui vous sera nécessaire. Alors la lunette étant dirigée sur AC, faites planter en terre, bien perpendiculairement, une règle ou cylindre de fer *n* qui soit bien exactement coupé dans sa largeur par le fil vertical de votre lunette, et par conséquent dans la direction MA. L'épreuve étant bien faite, substituez au cylindre *n* un pieu, façonné en pyramide carrée, que vous ferez enfoncer à coups de marteau jusqu'à ce que la base carrée arrive à fleur de terre. Faites placer un second pieu de l'autre côté en *o* vers B. Transportez votre cercle sur l'un des pieux posés, comme *n*; et, par des opérations pareilles, faites placer un nouveau pieu *p*, puis un autre *q*, etc., tant qu'il sera besoin; allez ensuite en *o* pour placer le pieu *l*, en *l* pour placer le pieu *k*, et ainsi des autres, et le tracé sera fait.

45. Je suppose que préalablement à la construction des deux signaux, vous ayez fait établir au centre et en terre, un massif inébranlable de maçonnerie : marquez sur ces massifs le pied de la perpendiculaire indiqué par la pointe d'un fil à-plomb suspendu au haut du signal. De ce point comme centre, tracez plusieurs cercles concentriques; au centre commun, faites creuser un trou propre à recevoir un cylindre de cuivre dont l'axe devra passer par le centre de vos cercles. Pour vous en assurer, faites tomber de nouveau le fil à plomb, et marquez sur la face plane et supérieure du cylindre le pied de la perpendiculaire, et autour de ce pied, tracez sur le cylindre plusieurs cercles concentriques; le centre commun sera l'une des extrémités de la base. Vous en ferez autant à l'autre station : vous ferez recouvrir solidement et en pierres de taille l'assise où est logé le cylindre, en laissant un intervalle de quelques pouces qui le sépare du couvercle.

46. Parlons maintenant des règles. Pour abréger l'opération, on faisait les règles de bois, et on leur donnait la longueur d'un multiple de la toise. La Caille les faisait ordinairement de 4 toises; Lemonnier en eut de sept. Mais ces longues perches pouvaient se courber et changer de longueur; on les avait préférées au fer, parce que leur dilatation est moindre; mais l'alongement du fer est plus régulier, il peut se connaître par expérience, et l'on en tient compte dans le calcul de la longueur totale. Les Anglais ont employé des verges de métal, des cylindres de verre creux ou pleins; ils se sont arrêtés à des chaînes d'acier imaginées par Ramsden, et décrites par le major-général Roy,

dans les Transactions philosophiques. Quand on faisait les règles de bois, on les garnissait à chaque bout d'un clou à tête ronde pour avoir un point de contact plus sûr. Trois des quatre règles étaient toujours en place et dans l'alignement tracé, parallèlement à une corde tendue, tandis que l'on transportait la première règle posée qui devenait la cinquième. Ces règles étaient numérotées pour qu'on sût toujours son compte : on savait ainsi combien de fois chaque règle avait servi chaque jour, et l'on marquait à la fin de la journée l'endroit où l'on s'était arrêté, pour y reprendre la mesure le lendemain. Quelquefois on plaçait ces règles sur des espèces de trépieds qui pouvaient se hausser et se baisser pour que les règles fussent toujours horizontales; mais quand le vent venait à souffler, ces supports n'avaient plus assez de solidité, et devenaient fort incommodes.

47. On peut voir dans les différens ouvrages que nous avons cités, les divers moyens dont on s'est servi. Nous nous contenterons de décrire sommairement les règles que Borda avait fait exécuter pour la méridienne de Dunkerque. Ces règles, qui sont conservées soigneusement à l'Observatoire impérial, sont de platine; elles sont recouvertes d'une verge de laiton un peu plus courte, qui, fixée invariablement par l'une de ses extrémités, a toute liberté de s'alonger par l'autre bout, suivant sa dilatation relative qui est à peu près égale à la dilatation absolue du platine. Le laiton glisse ainsi le long d'un vernier armé d'un microscope avec lequel on lit l'excès de la dilatation qui sert à calculer, d'après des tables dressées par des expériences fort exactes, la quantité absolue dont la règle de platine s'est alongée. Ces règles composées sont placées invariablement sur un long madrier de chêne; elles ont deux toises justes de longueur; elles sont recouvertes d'un toit qui les garantit des rayons directs du soleil. Le madrier porte sur deux triangles ou doubles-équerres de fer que l'on cale avec des vis; et ces triangles de fer portent eux-mêmes sur des pièces de bois soutenues horizontalement par trois pointes de fer qui entrent dans la terre, ensorte que la règle est de fort peu au-dessus du terrain, et que l'assemblage a toute la solidité desirable.

Pour éviter cependant tout choc qui pût faire rétrograder les règles posées, on laissait entre celles-ci et la quatrième qu'on voulait ajuster, un intervalle de quelques millimètres; et pour mesurer l'intervalle, on avait enchâssé dans l'extrémité de chaque règle une languette qui glis-

sait

sait entre denx conlisses le long d'un vernier qui avait aussi son microscope : la règle étant posée, on poussait le bouton de la languette du bout du doigt, l'intervalle se remplissait et se mesurait avec exactitude, sans aucun choc dangereux.

48. Les toits des règles, peints de couleurs différentes, étaient garnis, à trois pieds de leurs extrémités, de pointes bien perpendiculaires à l'axe des règles; de sorte que qnand les quatre règles étaient placées à la suite l'une de l'autre sur le terrain, les huit pointes devaient se trouver dans une même ligne droite et dans la direction de la base, ce qu'on vérifiait en se plaçant derrière, en visant à un petit signal portatif, placé d'avance sur l'un des pieux M, *n*, *p*, *q*, de l'alignement (fig. 91).

Pour mesurer l'inclinaison des règles qui suivaient les petites inégalités du terrain, on posait snr deux pièces de métal, placées sur le toit et à égale distance du milieu de la longueur, un niveau triangulaire à alidade et à bulle d'air, qui, par le retournement et une double opération, donnait la double inclinaison, sans qu'on eût à craindre aucune erreur de collimation.

49. Deux personnes écrivaient sons ma dictée, sur des registres différens, le nnméro de chaque règle, les parties de languette, celles des thermomètres métalliques qui indiquaient la dilatation, et les deux observations de niveau. Avant d'aller plus loin, on collationnait les deux registres, et on lisait après moi aux deux microscopes. Il ne restait donc plus à la fin de la journée, qu'à additionner la somme des toises, celle des languettes, les corrections de température et d'inclinaison, et la réduction au niveau de la mer; la base ainsi corrigée, s'est trouvée, à Melun, de 6075',90338; celle de Perpignan, corrigée de même, n'était que de 6006',25545. Toutes deux formaient vers le milieu un angle; l'une de 179° 10′ 41″, et l'autre nn angle de 180° 23′ 17″.

Soient *b* et *c* les deux parties de la base brisée, *d* la ligne droite qui en joint les deux extrémités, A l'angle des deux parties,

$$d^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = (b+c)^2 - 4bc\cos^2\tfrac{1}{2}A$$
$$= (b+c)^2\left(1 - \frac{4bc\cos^2\frac{1}{2}A}{(b+c)^2}\right),$$
$$d = (b+c)\left(1 - \frac{4bc\cos^2\frac{1}{2}A}{(b+c)^2}\right)^{\frac{1}{2}} = (b+c)(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= (b+c)(1 - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{8}x^4 - \text{etc.}).$$

50. Supposons la terre sphérique, nos règles de deux toises formeront à la surface de la terre deux tangentes d'une toise chacune; il faudra donc pour chaque demi-règle ou chaque toise, chercher la différence entre l'arc dont la tangente est une toise et la tangente même. Soit A le petit arc, $A = \text{tang}\,A - \frac{1}{3}\,\text{tang}^3 A + \frac{1}{5}\,\text{tang}^5 A$, ou $\text{tang}\,A - A = \frac{1}{3}\,\text{tang}^3 A = \frac{1}{3}$, quantité qu'il faut diviser par R^2, R étant le rayon de la terre en toises, et multiplier par le nombre de toises de la base; alors on aura pour Melun, 0',00000.00001.89 à retrancher, quantité insensible, ainsi qu'on devait s'y attendre. La base mesurée peut donc passer pour un arc de grand cercle : rigoureusement elle serait un polygone dont tous les côtés seraient même dans des plans différens, si la terre est un ellipsoïde; mais j'ai prouvé que cette autre erreur serait encore insensible. *Base du Système métrique*, tom. II, p. 685.

51. Pour donner une idée de l'exactitude à laquelle on peut arriver par ces moyens, nous rapporterons ce qui nous est arrivé à la base de Perpignan. Un jour, un vent impétueux venait à chaque instant déranger nos règles, en les faisant charier sur leurs supports. Après avoir long-tems lutté contre les difficultés, nous prîmes le parti d'interrompre la mesure. Trois jours après, par un tems calme, nous recommençâmes le travail de toute cette journée : nous ne trouvâmes qu'un quart de ligne de différence entre deux mesures dont l'une nous avait pleinement satisfaits, et l'autre nous avait paru si suspecte, que nous nous étions crus obligés à la recommencer.

52. Pour commencer la mesure et poser la première règle, nous avions découvert le cylindre et fait tomber un fil à-plomb du bout de la règle sur le cylindre au centre commun des cercles; il y avait ainsi une demi-épaisseur de fil à ajouter au nombre de toises; mais à la fin de la mesure, notre dernière règle dépassait le cylindre : nous fîmes tomber de même un fil à-plomb qui conduisit la mesure un peu trop loin, c'était un demi-fil à retrancher; cette correction détruisait la première, et nous fûmes dispensés de connaître l'épaisseur de notre fil qui n'avait pas changé.

A la fin de chaque journée, avant de poser définitivement la dernière règle, nous enfoncions dans la terre, un pied au-dessous de la surface, un pieu dont la tête était carrée et recouverte d'une lame de plomb :

sur ce plomb nous marquions, par deux intersections, l'endroit où tombait un fil à-plomb abaissé de l'extrémité de la dernière règle : nous recouvrions ensuite soigneusement notre pieu, que nous pouvions retrouver le lendemain et les jours suivans; il est possible qu'ils soient encore tous à leurs places. Avec toutes ces attentions, la mesure d'une base de 6000' nous prenait environ 42 jours; c'est 1000' ou 500 règles en 7 jours, ou un peu plus de 70 règles par jour. L'alignement avait exigé trois jours à Melun, et sept à Perpignan.

53. La base ainsi mesurée avait besoin de plusieurs réductions : chaque règle, augmentée de la longueur de la languette, devait être multipliée par le cosinus de son inclinaison. Ainsi, au lieu de $(r+l)$, on avait $(r+l)\cos I = r+l-2(r+l)\sin^2\frac{1}{2}I$; il fallait tenir compte de la dilatation qui, en changeant les règles, en avait diminué le nombre et fait paraître la base trop courte; il fallait enfin réduire cette base au niveau de la mer. Soit R le rayon de la terre, H la hauteur au-dessus du niveau de la mer, B la base mesurée; la base réduite sera

$$B' = B\left(\frac{R}{R+H}\right) = B\left(\frac{1}{1+\frac{H}{R}}\right)$$
$$= B\left[1-\frac{H}{R}+\left(\frac{H}{R}\right)^2 - \text{etc.}\right] = B - \frac{B.H}{R}.$$

(Voyez *Base du Système métrique*, tom. II). Sans cette réduction, nos deux bases mesurées à des hauteurs différentes, auraient été des arcs de deux sphères de différent rayon, et n'auraient plus été comparables.

54. Passons à la mesure des angles. Pour l'observation, on arrête la lunette supérieure du cercle sur 0; on la dirige sur l'objet à droite A (fig. 90), en faisant tourner le cercle dans le plan des deux objets; on dirige la lunette inférieure sur l'objet à gauche B, et quand les fils verticaux des deux lunettes coupent exactement le signal par l'axe, l'angle est mesuré; la seconde lunette restant fixe, on fait tourner le cercle de nouveau dans le plan des objets, jusqu'à ce que la seconde lunette vienne couper exactement le premier objet. Quand on a réussi, on dégage la lunette supérieure que l'on fait glisser sur le limbe jusqu'à ce qu'elle coupe l'objet à gauche; alors l'alidade marque l'angle double. On recommence toutes les mêmes opérations, en partant de

la dernière position de la lunette, comme d'un zéro, et l'on a l'arc quadruple, et ainsi de suite. Nous nous arrêtions ordinairement au 20° ou 30° angle, du moins quand nous étions satisfaits des angles et de leur progression régulière. Mais quelque bonne que paraisse une série de ce genre, il est toujours utile de la recommencer un autre jour, à une heure différente, pour que les objets soient autrement éclairés, sans quoi l'on risquerait d'être trompé par les phases que présentent les signaux. J'ai vu plusieurs fois deux séries prises le matin, parfaitement d'accord entre elles, et différant de plusieurs secondes, de deux séries prises le soir avec un accord pareil; mais quand on obtient le même angle à des heures différentes, on peut le supposer bon.

55. Au lieu de laisser aux fils du réticule leurs positions horizontale et verticale, on peut leur donner à tous deux une position inclinée de 45° à l'horizon; alors la pointe du signal qui se peint renversée dans la lunette, vient se placer à la croisée des fils. Cette position m'a paru plus favorable en général; cependant il est des cas où l'autre position m'a semblé meilleure : c'est à l'observateur à choisir suivant les circonstances.

La lunette supérieure est concentrique à l'instrument, mais la lunette inférieure est nécessairement excentrique; l'intersection des deux lunettes ne se fait donc pas au centre de l'instrument. L'angle observé a donc besoin d'une réduction qui se déduit de ma formule (43); r est alors l'excentricité de la lunette. Quand la lunette inférieure est dirigée sur l'objet à gauche, l'angle BOC $= y$ est de 90°, et la correction $-\left(\frac{r}{G \sin 1''}\right) =$ OBC; l'angle observé est I. Quand la lunette inférieure est dirigée vers l'objet à droite, l'angle de direction est encore 90°, la correction $+\left(\frac{r}{D \sin 1''}\right)$; d'où résulte pour l'angle simple une correction $+\left(\frac{r}{D \sin 2''} - \frac{r}{G \sin 2''}\right) = \frac{r}{\sin 2''}\left(\frac{G-D}{DG}\right)$. Voyez une démonstration plus détaillée, page 100, du Discours préliminaire de la *Base du Système métrique*. Nous supposons l'excentricité à droite; les signes changeraient si elle était à gauche : rarement cette correction mérite qu'on en tienne compte; j'en ai donné des tables à l'endroit cité.

56. Si les trois points observés étaient à la surface d'une même sphère, le triangle serait sphérique, et la somme de ses trois angles

$= 180° + \left(\frac{2R^2}{\sin 1''}\right) \tang \frac{1}{2} C' \tang \frac{1}{2} C'' \sin A$ — etc. (X. 231). J'ai donné des tables de cet excès sphérique (*Base*, tome I, p. 176. Disc.); les distances zénitales de A et de B, vues de C, seraient $90° + \frac{1}{2}$ AC et $90° + \frac{1}{2}$ BC; car l'angle entre la tangente et la corde d'un arc AC est $\frac{1}{2}$ AC. Or c'est ce qui n'arrive jamais; on observe les distances zénitales ZA et ZB des deux objets A et B; l'angle observé entre A et B est l'arc AB : on connaît les trois côtés dans le triangle sphérique ABZ; l'angle Z est l'angle horizontal réduit à la surface de la sphère.

Nous avons donné (X. 226) la différence entre l'arc AB et l'angle Z; cette formule sert à calculer la correction des angles observés : cette correction s'appelle *réduction à l'horizon ;* j'en ai aussi donné des tables. Autrefois les astronomes cherchaient péniblement la valeur de l'angle Z, et le calcul exigeait une grande attention, parce que la différence cherchée est assez petite. On a plus d'exactitude, avec moins de peine, par mes tables et mes formules.

57. Quand l'arc est ainsi réduit à l'horizon, il faut le réduire au centre de la station; mais toutes ces corrections étant légères, on peut les faire dans l'ordre qu'on voudra. Soit E l'excès sphérique, calculé comme ci-dessus; si la somme de vos trois angles réduits est de $180° + E$, les observations sont exactes, ou du moins les erreurs se sont compensées; si la somme est $180° + E + F$, F sera la résultante des trois erreurs commises; vous la distribuerez également entre les trois angles, si les observations sont toutes également dignes de confiance. Si l'une des trois vous paraît moins sûre, vous pourrez lui attribuer une part plus grande de l'erreur, que vous distribuerez en raison des probabilités; et ces angles corrigés seront ceux qui serviront au calcul des côtés du triangle sphérique.

58. Voulez-vous changer votre triangle sphérique en un triangle rectiligne formé par les trois cordes, le moyen est simple. Soit ABC (*fig.* 92) le triangle mesuré : prolongez AB en M, et AC en N, de sorte que $AM = AN = 90°$, vous aurez $MN = BAC$; prolongez les deux quarts de cercle jusqu'à leur rencontre en A'. Et soit AA' le diamètre du globe : prenez $Mm = \frac{1}{2}$ AB, $Nn = \frac{1}{2}$ AC, et menez *mn*, qui mesurera l'angle des cordes des arcs AB et AC. En effet, menez les deux cordes *ab* et *ac* et les rayons K*m* et K*n* du centre K de la sphère; l'angle

$Kab = 90° - \frac{1}{2}AB$, l'angle $A'Km = A'm = A'M - Mm = 90° - \frac{1}{2}AB = Kab$; on prouverait de même que $A'Kn = Kac$; ainsi Km et Kn sont parallèles aux deux cordes, et forment un angle $mKn = bac =$ angle des cordes. Or

$$\cos mn = \cos A \sin Am \sin An + \cos Am \cos An =$$
$$\cos A \sin(90° + \tfrac{1}{2}AB)\sin(90° + \tfrac{1}{2}AC) + \cos(90° + \tfrac{1}{2}AB)\cos(90° + \tfrac{1}{2}AC)$$
$$= \cos A \cos\tfrac{1}{2}AB \cos\tfrac{1}{2}AC + \sin\tfrac{1}{2}AB \sin\tfrac{1}{2}AC.$$

Ainsi l'on aura, pour réduire l'angle horizontal à l'angle des cordes, la formule (X. 227), dont j'ai donné des tables qui ne dépendent que de l'angle horizontal A, et des arcs AB et AC en toises. Par ce moyen, le triangle sphérique sera converti en triangle rectiligne; la somme des angles devra être de 180°; le surplus sera la résultante des erreurs qu'on distribuera comme ci-dessus. A l'ordinaire, cette résultante ne doit pas passer 2″ : dans les circonstances difficiles, elle peut aller à 3 ou 4″, et même plus.

59. On peut calculer les triangles comme rectilignes ou comme sphériques.

Soit AB la base mesurée réduite au niveau de la mer, elle est sensiblement un arc de cercle. Changez cet arc en sa corde, par la formule, $\text{corde } AB = \text{arc } AB - \frac{(\text{arc } AB)^3}{24 R^2}$; vous aurez la corde, c'est-à-dire le côté d'un triangle. Vous calculerez les deux autres côtés ou cordes par l'analogie commune des triangles rectilignes,

$$\text{corde } AC = \left(\frac{\text{corde } AB}{\sin C}\right)\sin B, \quad \text{corde } BC = \left(\frac{\text{corde } AB}{\sin C}\right)\sin A.$$

Dans ce calcul, vous employez les angles des cordes, et vous allez ainsi, de triangle en triangle, jusqu'à la fin; tous les côtés ainsi conclus sont des cordes.

60. Pour calculer les triangles comme sphériques, on emploie les angles réduits à une somme de 180° + E; au lieu de changer la base en corde, vous la changez en sinus, par la formule

$$\sin AB = \text{arc } AB - \frac{(\text{arc } AB)^3}{6R^2};$$

La réduction au sinus est quadruple de la réduction à la corde. On aura dans chaque triangle le sinus d'un côté et ceux des trois angles sphériques; on calculera les deux autres côtés par la formule ordinaire

$$\sin AC = \left(\frac{\sin AB}{\sin C}\right)\sin B, \qquad \sin BC = \left(\frac{\sin AB}{\sin C}\right)\sin A;$$

et tous les côtés ainsi conclus seront des sinus, mais exprimés en mesures linéaires, telles que des mètres ou des toises, ou des fathoms, etc. Le rayon R de la terre doit être exprimé de même. Ces deux calculs sont également simples; tous les astronomes s'étaient contentés de la formule des triangles rectilignes, négligeant la différence de l'arc au sinus et l'excès sphérique qu'ils confondaient avec l'erreur des observations, et qu'ils faisaient disparaître en même tems. Ce procédé était plus exact qu'on ne croyait.

61. La somme des trois angles d'un triangle sphérique excède les 180° de $2r^2 \operatorname{tang}\frac{1}{2}C' \operatorname{tang}\frac{1}{2}C'' \sin A = 2r^2.\frac{1}{2}C'.\frac{1}{2}C'' \sin A = \frac{1}{2}r^2C'C'' \sin A$ = surface du triangle; ainsi

$$\begin{aligned} A+B+C &= 180° + \tfrac{1}{2}AB.AC.\sin A = 180° + \tfrac{1}{2}AB.CB.\sin B \\ &= 180° + \tfrac{1}{2}AC.BC.\sin C \\ &= 180° + \tfrac{1}{6}AB.AC.\sin A + \tfrac{1}{6}AB.CB.\sin B + \tfrac{1}{6}AC.BC.\sin C. \end{aligned}$$

En distribuant l'excès également, et en retranchant le tiers de chacun des angles, on faisait

$$\begin{aligned} A' &= A - \tfrac{1}{6}AB.AC.\sin A, \\ B' &= B - \tfrac{1}{6}AB.CB.\sin B, \\ C' &= C - \tfrac{1}{6}AC.BC.\sin C; \end{aligned}$$

on faisait ensuite l'analogie

$$\begin{aligned} AC &= \frac{BC \sin B'}{\sin A'} = \frac{BC \sin (B - \frac{1}{6}AB.CB.\sin B)}{\sin (A - \frac{1}{6}AB.AC.\sin A)} = \frac{BC \sin (B - \frac{1}{3}E)}{\sin (A - \frac{1}{3}E)} \\ &= \frac{BC \sin B \cos\frac{1}{3}E - BC \cos B \sin\frac{1}{3}E}{\sin A \cos\frac{1}{3}E - \cos A \sin\frac{1}{3}E} = \frac{\left(\frac{BC \sin B}{\sin A}\right) - \frac{BC \cos B \sin\frac{1}{3}E}{\sin A \cos\frac{1}{3}E}}{1 - \cot A \operatorname{tang}\frac{1}{3}E}, \end{aligned}$$

$$AC = \left(\frac{BC\sin B}{\sin A}\right)\left(\frac{1-\cot B\tang\frac{1}{3}E}{1-\cot A\tang\frac{1}{3}E}\right) = \left(\frac{BC\sin B}{\sin A}\right)(1+\tang\tfrac{1}{3}E\cot A-\tang\tfrac{1}{3}E\cot B)$$

$$= \left(\frac{AC\sin B}{\sin A}\right)(1+\tfrac{1}{6}AB.AC\sin A\cot A-\tfrac{1}{6}AB.BC\sin B\cot B)$$

$$= \left(\frac{BC\sin B}{\sin A}\right)(1+\tfrac{1}{6}AB.AC\cos A-\tfrac{1}{6}AB.BC\cos B)$$

$$= \left(\frac{BC\sin B}{\sin A}\right)(1+\tfrac{1}{6}AB.AD-\tfrac{1}{6}AB.BD) \text{ (fig. 93)}$$

$$= \left(\frac{BC\sin B}{\sin A}\right)\{1+\tfrac{1}{6}AB.(AD-BD)\}$$

$$= \left(\frac{BC\sin B}{\sin A}\right)[1+\tfrac{1}{6}(AC+BC)(AC-BC)]$$

$$= \left(\frac{BC\sin B}{\sin A}\right)[1+\tfrac{1}{6}(AC)^2-\tfrac{1}{6}(BC)^2]$$

$$= \frac{BC\sin B}{\sin A}+\frac{BC.\overline{AC}^2\sin B}{6\sin A}-\frac{(BC)^3\sin B}{6\sin A}$$

$$= \frac{BC\sin B}{\sin A}+\frac{\overline{AC}^3\sin A}{6\sin A}-\frac{\overline{BC}^3\sin B}{6\sin A}$$

$$= \left(\frac{CB\sin B}{\sin A}\right)+\tfrac{1}{6}(AC)^3-\frac{(BC)^3\sin B}{6\sin A},$$

$$AC-\tfrac{1}{6}(AC)^3 = \left(\frac{BC\sin B}{\sin A}\right)-\tfrac{1}{6}\left(\frac{\overline{BC}^3\sin B}{\sin A}\right) = [BC-\tfrac{1}{6}(BC)^3]\frac{\sin B}{\sin A},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sin AC = \frac{\sin BC\sin B}{\sin A},$$

c'est-à-dire l'analogie du triangle sphérique. L'erreur était donc nulle ou insensible; il en résulte donc qu'il faut considérer les arcs AC et BC comme des lignes droites, diminuer les angles du tiers de l'excès sphérique, et calculer le triangle comme rectiligne; théorème remarquable que M. Legendre avait donné d'abord sans démonstration, et qu'il a depuis démontré d'une manière toute différente. Voilà donc une troisième méthode pour calculer les triangles; elle est plus commode que les deux autres, tant qu'il ne s'agit que des triangles mêmes, mais elle devient plus embarrassante quand il faut en conclure les parties de la méridienne.

62. Nos triangles, soit rectilignes, soit sphériques, ont tous leurs sommets à la surface de la terre et dans la normale du lieu. La surface de

de ces triangles s'élève donc, en allant vers l'équateur, comme la surface de l'ellipsoïde terrestre. Nos bases, réduites au niveau de la mer, doivent donc s'accorder ensemble, aussi bien que sur une sphère ou sur un plan. La différence entre une base calculée par une suite de triangles fondés sur une base éloignée, ne peut donc venir que des erreurs inévitables dans une opération si compliquée. Ainsi, en continuant jusqu'à Perpignan le calcul des triangles sur la base de Melun, j'avais trouvé d'abord pour la base de Perpignan, le log. 3.77859.23288
la mesure me donnait....... 3.77860.30659
la différence est......... 1.07371

Cette différence nous indique que la base mesurée était plus longue de $0^t,14849 = 10^p\ 8^l,3 = 128^l,3$. Or il me paraît impossible que nous nous soyons trompés de 3 pouces ou 36 lignes sur chacune des bases; il restera donc au moins 55 ou 60 lignes pour l'erreur des angles de plus de 60 triangles qui ont servi à lier les deux bases. Mais comme nos bases me paraissent encore plus sûres que nos angles, j'ai supposé l'erreur des bases nulle, et j'ai distribué l'erreur de 0.00001.07371 parties du logarithme sur les triangles de jonction. Je retranchais $0'',1$ de l'angle dont le sinus était au dénominateur, et j'ajoutais $0'',05$ aux deux autres. Ces changemens sont imperceptibles en eux-mêmes; mais agissant toujours dans le même sens, ils produisirent l'effet que j'avais en vue; j'ai même été obligé, à quelque distance de Perpignan, de réduire la correction à $0'',05$ pour le dénominateur, et $0'',05$ pour le numérateur. Le troisième angle n'éprouvait aucun changement.

63. Quand tous les triangles sont calculés, il s'agit de trouver en quel sens la méridienne les traverse, et quelle est la longueur de cette méridienne; il faut pour cela observer au moins un azimut, et pour plus de sûreté, on en observe plusieurs en différentes stations, le long de l'arc. Le moyen le plus sûr serait d'avoir une lunette méridienne que l'on placerait exactement dans le méridien de l'une des stations; dans la direction de la lunette, on placerait un signal pour mesurer ensuite directement l'angle entre ce signal et l'un des sommets des triangles.

On peut déterminer les azimuts avec le cercle de Borda. On commence par bien régler sa pendule sur le tems vrai, par des hauteurs absolues du soleil. On observe une vingtaine de distances du soleil au

zénit; on les réunit quatre à quatre, en prenant le milieu soit entre les arcs observés, soit entre les momens de la pendule. Pour l'instant moyen, on calcule la distance polaire du soleil; on doit avoir aussi la distance du pôle au zénit : avec les trois côtés du triangle sphérique, on calcule l'angle au pôle que l'on convertit en tems; ce tems, comparé à celui de la pendule, donne la correction de l'horloge. Ces observations, répétées plusieurs jours de suite, mettent l'observateur en état de connaître le tems vrai et l'angle au pôle pour un instant quelconque de la journée.

Cela posé, soit G (fig. 94) le signal dont on veut connaître l'azimut; prenez vers six heures du soir ou du matin, un peu avant et un peu après, nombre de distances entre le soleil S et le signal G, dont vous connaissez la distance zénitale. Vous assemblez ces distances quatre à quatre, en prenant des moyennes, comme pour l'heure : vous observez alternativement les deux bords du soleil; la distance moyenne entre les quatre, sera une distance du centre du soleil au sommet du signal. Pour ces observations, il faut deux observateurs au moins, l'un vise au signal, et l'autre au soleil; un troisième compte à la pendule et écrit les observations.

64. Avec PZ, PS' et ZPS', vous calculez ZS' distance vraie du soleil au zénit, vous en retranchez la réfraction moins la parallaxe; vous avez ZS, ZG et SG; vous calculez SZG que vous retranchez de PZS azimut calculé du soleil, il reste PZG = azimut du signal G.

Vous traitez de même tous vos groupes de quadruples observations; le milieu entre tous les résultats sera l'azimut le plus probable.

L'exactitude de cet azimut dépend du tems; une seconde d'erreur sur le tems peut, dans nos climats, produire 10″ d'erreur sur l'azimut : dans l'expression de cette erreur entre la cotangente de l'angle horaire; à six heures, cette cotangente est zéro, et l'instant d'après elle change de signe; les erreurs se compensent et sont d'ailleurs fort légères. (Voyez *Base*, tome II, page 150). Après tout, la dernière précision n'est pas indispensable : j'ai prouvé que 23″ d'erreur sur l'azimut de Dunkerque, n'auraient pas altéré de 0ᵗ,9 la longueur de notre méridienne, qui est de 551584 toises.

65. On peut encore déterminer l'azimut par l'étoile polaire, de deux manières. Calculez l'instant où l'étoile doit se trouver dans sa plus grande digression, c'est-à-dire dans le vertical ZEn : dans le triangle

PZE, vous aurez (fig. 95)

$$\tang PE = \cos P \tang PZ = \cos P \cot H$$

et $$\cos P = \tang PE \tang H = \tang \Delta \tang H,$$

$$\cos ZE = \frac{\cos PZ}{\cos PE} = \frac{\sin H}{\cos \Delta} \quad \text{et} \quad \sin PZE = \sin Nn = \frac{\sin PE}{\sin PZ} = \frac{\sin \Delta}{\cos H}.$$

A l'heure trouvée par l'angle P, prenez la distance GE de l'étoile au signal. Dans le triangle GZE, calculez par les trois côtés l'angle GZE $= On$; alors $On + nN =$ azimut de G.

Ou bien calculez l'instant où l'étoile doit passer par le cercle horaire PEG du signal, ce qui suppose que vous avez une connaissance approchée de l'azimut. A l'instant du passage, mesurez GE, ajoutez-y PE; alors, dans le triangle PZG, par les trois côtés connus, calculez directement l'azimut PZG. Cette méthode exige quelques attentions, à cause des réfractions qui élèvent l'étoile; et si l'on mesure les distances GE avec un cercle répétiteur, toutes celles qui ont été prises avant ou après l'instant du passage, ont besoin de corrections du genre de celles qu'on fait aux distances zénitales près du méridien. (Voyez *Base*, tom. II, p. 139, ou la fin du chapitre.)

66. Si les observations n'ont point été faites au centre de la station, on les y ramène par la formule ordinaire, qui se réduit alors à un seul terme, celui qui dépend de l'objet terrestre. La distance de l'astre est trop considérable pour que l'excentricité de l'observateur produise aucun effet sensible. Mais supposons que l'observateur en O ait déterminé l'azimut d'un objet relativement à son méridien OM (fig. 96), et qu'il veuille le rapporter au méridien CN du centre C de la station; il est évident que l'azimut réduit

$$\begin{aligned} NCA = MIA = MOA + CAO &= z + \left(\frac{r}{D \sin 1''}\right) \sin AOC \quad (43) \\ &= z + \left(\frac{r}{D \sin 1''}\right) \sin (MOA + MOC) \\ &= z + \left(\frac{r}{D \sin 1''}\right) \sin (z + y). \end{aligned}$$

Nous supposons ici l'objet terrestre à la droite, c'est-à-dire à l'orient du méridien, et l'azimut compté du nord.

67. Nous avons maintenant tout ce qui est nécessaire pour calculer

la méridienne. Nous avons déjà indiqué un moyen bien simple dans la théorie, mais excessivement pénible dans la pratique, et qui même le devient encore plus quand on veut y employer les angles sphériques.

Soit MER (fig. 97) le méridien dont on veut connaître un grand arc, par exemple ici le méridien de Dunkerque; BC un côté oblique quelconque qu'il s'agit de réduire au méridien MER. Par les points B et C, menez les arcs perpendiculaires BE, CR, qui prolongés iraient se réunir en A pôle de ER; ER sera l'arc réduit.

Soit M le pôle de la terre, MBF le méridien du lieu B, et BO perpendiculaire à BE, ensorte que le point O soit le pôle de BE.

Le triangle MBE rectangle en E, donne

$$\cot MBE = \cot ABF = \text{tang}\, FBD = \cos MB\, \text{tang}\, M = \sin H\, \text{tang}\, M,$$

$$\text{tang}\, x = \text{siu latitude tang différence des longitudes},$$

$$\sin y = \sin BE = \sin MB \sin M = \cos H \sin M,$$

$$\text{tang}\, ER = \frac{\sin ABC}{\sin AB \cot BC - \cos AB \cos ABC} = \frac{\text{tang}\, BC \sin ABC}{\sin AB - \text{tang}\, BC \cos AB \cos ABC},$$

$$\text{tang}\, \delta' = \frac{\text{tang}\, \delta \cos CBD}{\cos BE - \text{tang}\, \delta \sin BE \sin CBD} = \frac{\text{tang}\, \delta \cos(z+x)}{\cos y - \text{tang}\, \delta \sin y \sin(z+x)}$$

$$= \frac{\text{tang}\, \delta\, \text{séc}\, y \cos(z+x)}{1 - \text{tang}\, \delta\, \text{tang}\, y \sin(z+x)}$$

$$= \text{tang}\, \delta\, \text{séc}\, y \cos(z+x)[1 + \text{tang}\, \delta\, \text{tang}\, y \sin(z+x) + \text{etc.}]$$

$$= \text{tang}\, \delta \cos(z+x)(1 + \tfrac{1}{2}\text{tang}^2 y)[1 + \text{taug}\, \delta\, \text{tang}\, y\, \text{siu}(z+x) + \text{etc.}]$$

$$= \text{tang}\, \delta \cos(z+x)[1 + \tfrac{1}{2}\text{tang}^2 y \quad + \text{tang}\, \delta\, \text{tang}\, y \sin(z+x) + \text{etc.}]$$

68. Négligez les termes du troisième ordre,

$$\delta' = \delta \cos(z+x) = BC \cos CBD,$$

ce qui se réduit à multiplier le côté oblique par le cosinus de l'angle qu'il fait avec la parallèle au méridien. Cette formule, incomplète et expéditive, est celle dont on s'était toujours contenté, et dont on s'est encore servi en Angleterre et aux Indes, dans les dernières mesures. Mais pour ne rien négliger, il suffit d'avoir une valeur assez approchée de la latitude et de la différence M des longitudes pour calculer y; car pour $(z+x) = CBD$, il est toujours connu par les triangles, puisqu'en les supposant rectilignes, et prolongeant CB jusqu'à la méridienne, on aura $(z+x) = CBD = CB'R$. Il vaut pourtant mieux calculer CBD au moyen de x et de z.

Ainsi, quand on a calculé le terme $\delta\cos(z+x)$, il est bien facile d'y ajouter les deux corrections

$$[\delta\cos(z+x)]\,\tfrac{1}{2}\,\text{tang}^2 y \quad\text{et}\quad [\delta\cos(z+x)]\,\text{tang}\,\delta\,\text{tang}\,y\,\sin(z+x).$$

Pour faciliter ces corrections de l'ancienne méthode, je les ai réduites en tables où on les prend à vue. (*Base du Système métrique*, tome III.)

69. Pour y, on remarquera d'abord qu'à la première station, à Dunkerque, $y=0$; c'est à la seconde que $\sin y = \cos \text{H} \sin \text{M}$; à la troisième, $y'=y+\delta\sin(z+x)$; à la quatrième, $y''=y'+\delta'\sin(z'+x')$, et ainsi de suite. Il n'en faut pas davantage pour bien connaître $\delta'=\text{ER}$; mais ensuite, pour plus d'exactitude, on fera

$$y' = \text{CR} = \text{RD} + \text{DC},$$
$$\text{tang RD} = \sin \text{OR} \,\text{tang O} = \cos \text{ER}\,\text{tang}\,y,$$
$$1 : \sin \text{O} :: \cos \text{OR} : \cos \text{D} = \sin \text{O} \cos \text{OR} = \sin y \sin \text{ER} = \sin y \sin \delta',$$
$$\sin \text{D} : \sin \text{BC} :: \sin \text{CBD} : \sin \text{CD} = \frac{\sin \text{BC} \sin \text{CBD}}{\sin \text{D}} = \frac{\sin \delta \sin (z+x)}{\sin \text{D}},$$

y et y' sont toujours les deux arcs perpendiculaires abaissés du côté oblique sur la méridienne,

$$\text{RD} = y - 2y\sin^2\tfrac{1}{2}\text{ER} = y - 2y\sin^2\tfrac{1}{2}\delta' = y - \tfrac{1}{2}y\sin^2\delta',$$
$$\sin \text{D} = (1 - \sin^2 y \sin^2\delta')^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 y \sin^2\delta',$$
$$\text{CD} = \frac{\delta \sin(z+x)}{1 - \frac{1}{2}\sin^2 y \sin^2\delta'} = \delta\sin(z+x)(1 + \tfrac{1}{2}\sin^2 y \sin^2\delta'),$$
$$\text{CR} = y - \tfrac{1}{2}y\sin^2\delta' + \delta\sin(z+x) + \delta\sin(z+x)\,.\,\tfrac{1}{2}\sin^2 y\sin^2\delta'$$
$$y' = y + \delta\sin(z+x) - \tfrac{1}{2}y\sin^2\delta'.$$

70. Il est d'autres moyens pour trouver les δ' et les y; ils dépendent de ce problème plus général : *Connaissant la longitude et la latitude d'un lieu, la distance de ce lieu à un second, et l'angle que cette distance fait avec le méridien du premier, déterminer la longitude et la latitude du second, et l'angle que la même distance y fait avec le méridien.*

Soit P le pôle (fig. 98), A le lieu connu, B le lieu observé, PAM, PBN les deux méridiens; on demande les angles P et B et le côté PB. Si l'on connaît AB en toises, on l'aura facilement en degrés de la sphère;

on aura donc pour données A, PA et AB. Le triangle sphérique donnera

$$\cos PB = \cos A \sin PA \sin AB + \cos PA \cos AB,$$

$$\sin(H + dH) = \sin\delta \cos H \cos A + \cos\delta \sin H,$$

$$\sin H \cos dH + \cos H \sin dH = \sin\delta \cos H \cos A + \sin H - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\delta \sin H,$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}dH \cos\tfrac{1}{2}dH \cos H + \sin H - 2\sin^2\tfrac{1}{2}dH \sin H$$
$$= \sin\delta \cos H \cos A + \sin H - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\delta \sin H,$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}dH \cos\tfrac{1}{2}dH - 2\sin^2\tfrac{1}{2}dH \operatorname{tang} H = \sin\delta \cos A - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\delta \operatorname{tang} H.$$

Soit

$$a = -\operatorname{tang} H, \quad b = \tfrac{1}{2}\sin\delta \cos A - \sin^2\tfrac{1}{2}\delta \operatorname{tang} H;$$

nous aurons (X. 227),

$$dH = 2b - 2ab^2 + \tfrac{4}{3}b^3 + 4a^2b^3.$$

Remettez pour a et b leurs valeurs, et remplacez $\sin\delta$ par sa valeur $\delta - \frac{1}{6}\delta^3$, vous aurez

$$dH = \delta\cos A - \tfrac{1}{2}\delta^2 \sin 1'' \sin^2 A \operatorname{tang} H$$
$$- \tfrac{1}{6}\delta^3 \sin^2 1'' \sin^2 A \cos A (1 + 3\operatorname{tang}^2 H).$$

71. Si δ est exprimé en toises, dH au lieu d'être la différence de latitude en secondes, sera l'intervalle entre les parallèles en toises; alors au lieu de $\sin 1''$, vous mettrez $\frac{1}{N}$, N étant le rayon de la terre sphérique ou la normale de la terre aplatie; δ est ici l'arc, et non plus le sinus ou la corde; mais la conversion est facile. Cette formule dépend de l'angle intérieur A = PAB : si vous voulez employer l'angle extérieur z, vous aurez

$$dH = -\delta\cos z - \tfrac{1}{2}\delta^2 \sin 1'' \sin^2 z \operatorname{tang} H$$
$$+ \tfrac{1}{6}\delta^3 \sin^2 1'' \sin^2 z \cos z (1 + 3\operatorname{tang}^2 H).$$

Voilà une méthode bien simple encore pour calculer les parties de la méridienne; elle ne suppose qu'une connaissance assez exacte de l'azimut et une valeur approchée de la hauteur du pôle; elle me paraît préférable à toutes les autres.

72. Le même triangle donne $\sin P = \frac{\sin\delta \sin z}{\cos(H + dH)}$,

formule qu'on pourrait développer, et qui deviendrait très-incommode; mais en supprimant les δ^2, on aura

$$P = \frac{\delta \sin z}{\cos H} - \frac{\delta^2 \sin 1'' \sin z \cos z \tang H}{\cos H},$$

formule qui suffira toujours.

73. Le même triangle donne $\tang \frac{1}{2}(A+B) = \frac{\cot \frac{1}{2} P \cos \frac{1}{2}(PB-PA)}{\cos \frac{1}{2}(PB+PA)}$;

$$\begin{aligned} \text{cotang}\, \tfrac{1}{2}(A+B) &= \tang [90^\circ - \tfrac{1}{2}(A+B)] \\ &= \frac{\tang \frac{1}{2} P \cos \frac{1}{2}(PB+PA)}{\cos \frac{1}{2}(PB-PA)} = \frac{\tang \frac{1}{2} P \sin (H + \frac{1}{2} dH)}{\cos \frac{1}{2} dH}, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \tang \left(\frac{180 - A}{2} - \tfrac{1}{2} B\right) &= \tang \tfrac{1}{2}(z - B) = \tang \tfrac{1}{2}(z - z') \\ &= \frac{\tang \frac{1}{2} P \sin (H + \frac{1}{2} dH)}{\cos \frac{1}{2} dH} \end{aligned}$$

formule bien simple, si l'on a déterminé P par son sinus (72), et qui deviendrait excessivement incommode, si l'on y portait la valeur de $\tang \frac{1}{2} P$ en fonction de l'arc P. Mais

$$\sin P = \frac{2 \tang \frac{1}{2} P}{1 + \tang^2 \frac{1}{2} P}, \quad \tang \tfrac{1}{2} P = \frac{\frac{1}{2} \sin P}{\cos^2 \frac{1}{2} P} \quad \text{et} \quad \cos^2 \tfrac{1}{2} P = 1 - \sin^2 \tfrac{1}{2} P,$$

d'où

$$\begin{aligned} \tang \tfrac{1}{2}(z - z') &= \frac{\sin (H + \frac{1}{2} dH)}{\cos \frac{1}{2} dH} \cdot \frac{\frac{1}{2} \sin P}{1 - \sin^2 \frac{1}{2} P} \\ &= \frac{\sin (H + \frac{1}{2} dH)}{\cos \frac{1}{2} dH} \cdot \frac{\frac{1}{2} \sin P}{(1 - \frac{1}{4} \sin^2 P)} \\ &= \frac{\sin (H + \frac{1}{2} dH)}{\cos \frac{1}{2} dH} \cdot \frac{\frac{1}{2} \sin \delta \sin z}{\cos (H + dH)\left(1 - \frac{\frac{1}{4} \sin^2 \delta \sin^2 z}{\cos^2 (H + dH)}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \sin \delta \sin z \sin (H + \frac{1}{2} dH)}{\cos (H + dH) \cos \frac{1}{2} dH}\left(1 + \frac{\frac{1}{4} \sin^2 \delta \sin^2 z}{\cos^2 (H + dH)}\right), \end{aligned}$$

d'où, en négligeant les termes du troisième ordre,

$$\begin{aligned} z - z' = \frac{\delta \sin z \sin (H + \frac{1}{2} dH)}{\cos (H + dH) \cos \frac{1}{2} dH} \quad \text{et} \quad B = z' &= z - \frac{\delta \sin z \sin (H + \frac{1}{2} dH)}{\cos (H + dH) \cos \frac{1}{2} dH} \\ &= z - \delta \sin z \left(\frac{\sin (H + dH) \cos \frac{1}{2} dH - \cos (H + dH) \sin \frac{1}{2} dH}{\cos (H + dH) \cos \frac{1}{2} dH}\right) \\ &= z - \delta \sin z [\tang (H + dH) - \tang \tfrac{1}{2} dH] \\ &= z - \delta \sin z \tang (H + dH) + \delta \sin z \tang \tfrac{1}{2} dH. \end{aligned}$$

74. Voilà le problème résolu de la manière la plus simple, et cependant avec toute l'exactitude nécessaire dans la pratique, au moins dans l'hypothèse de la sphéricité de la terre. Voulons-nous des formules régulières et d'une exactitude indéfinie, appliquons à notre problème les séries démontrées (X. 222),

$$\begin{aligned} A'' = {} & \tang \tfrac{1}{2}C''(\cot \tfrac{1}{2}C' + \tang \tfrac{1}{2}C') \sin A \\ & + \tfrac{1}{2}\tang^2 \tfrac{1}{2}C''(\cot^2 \tfrac{1}{2}C' - \tang^2 \tfrac{1}{2}C') \sin 2A \\ & + \tfrac{1}{3}\tang^3 \tfrac{1}{2}C''(\cot^3 \tfrac{1}{2}C'' + \tang^3 \tfrac{1}{2}C'') \sin 3A \\ & + \tfrac{1}{4}\tang^4 \tfrac{1}{2}C''(\cot^4 \tfrac{1}{2}C' - \tang^4 \tfrac{1}{2}C') \sin 4A + \text{etc.}, \\ A' = {} & (180^\circ - A) - \tang \tfrac{1}{2}C''(\cot \tfrac{1}{2}C' - \tang \tfrac{1}{2}C') \sin A \\ & - \tfrac{1}{2}\tang^2 \tfrac{1}{2}C''(\cot^2 \tfrac{1}{2}C' + \tang^2 \tfrac{1}{2}C') \sin 2A \\ & - \tfrac{1}{3}\tang^3 \tfrac{1}{2}C''(\cot^3 \tfrac{1}{2}C' - \tang^3 \tfrac{1}{2}C') \sin 3A \\ & - \tfrac{1}{4}\tang^4 \tfrac{1}{2}C''(\cot^4 \tfrac{1}{2}C' + \tang^4 \tfrac{1}{2}C') \sin 4A - \text{etc.}; \end{aligned}$$

A'' sera notre angle P, A' notre angle B, C'' sera δ; $C' = 90^\circ - H$; $\tang \tfrac{1}{2}C' = \tang(45^\circ - \tfrac{1}{2}H)$, et $\cot \tfrac{1}{2}C' = \tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}H)$; nous aurons

$$\begin{aligned} A'' = P = {} & \left(\frac{\tang \frac{1}{2}\delta}{\sin 1''}\right)[\tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}H) + \tang(45^\circ - \tfrac{1}{2}H)] \sin A \\ & + \left(\frac{\tang^2 \frac{1}{2}\delta}{\sin 2''}\right)[\tang^2(45^\circ + \tfrac{1}{2}H) - \tang^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}H)] \sin 2A \\ & + \left(\frac{\tang^3 \frac{1}{2}\delta}{\sin 3''}\right)[\tang^3(45^\circ + \tfrac{1}{2}H) + \tang^3(45^\circ - \tfrac{1}{2}H)] \sin 3A \\ & + \left(\frac{\tang^4 \frac{1}{2}\delta}{\sin 4''}\right)[\tang^4(45^\circ + \tfrac{1}{2}H) - \tang^4(45^\circ - \tfrac{1}{2}H)] \sin 4A + \text{etc.}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = A' = (180^\circ - A) & - \left(\frac{\tang \frac{1}{2}\delta}{\sin 1''}\right)[\tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}H) - \tang(45^\circ - \tfrac{1}{2}H)] \sin A \\ & - \left(\frac{\tang^2 \frac{1}{2}\delta}{\sin 2''}\right)[\tang^2(45^\circ + \tfrac{1}{2}H) + \tang^2(45^\circ - \tfrac{1}{2}H)] \sin 2A \\ & - \left(\frac{\tang^3 \frac{1}{2}\delta}{\sin 3''}\right)[\tang^3(45^\circ + \tfrac{1}{2}H) - \tang^3(45^\circ - \tfrac{1}{2}H)] \sin 3A \\ & - \left(\frac{\tang^4 \frac{1}{2}\delta}{\sin 4''}\right)[\tang^4(45^\circ + \tfrac{1}{2}H) + \tang^4(45^\circ - \tfrac{1}{2}H)] \sin 4A - \text{etc.} \end{aligned}$$

Mettez $z = (180^\circ - A)$, au lieu de A, dans la formule; tous les termes de numéro pair changeront de signe. Pour plus de commodité, faites

$$\begin{aligned} M = \left(\frac{\tang \frac{1}{2}\delta}{\sin 1''}\right)\tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}H)\sin z & - \left(\frac{\tang^2 \frac{1}{2}\delta}{\sin 2''}\right)\tang^2(45^\circ + \tfrac{1}{2}H)\sin 2z \\ & + \left(\frac{\tang^3 \frac{1}{2}\delta}{\sin 3''}\right)\tang^3(45^\circ + \tfrac{1}{2}H)\sin 3z - \text{etc.} \end{aligned}$$

N

$$N = \left(\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}\delta}{\sin 1''}\right)\cot(45^\circ + \tfrac{1}{2}H)\sin z + \left(\frac{\text{tang}^2\,\frac{1}{2}\delta}{\sin 2''}\right)\cot^2(45^\circ + \tfrac{1}{2}H)\sin 2z$$
$$+ \left(\frac{\text{tang}^3\,\frac{1}{2}\delta}{\sin 3''}\right)\cot^3(45^\circ + \tfrac{1}{2}H)\sin 3z + \text{etc.};$$

alors $P = M + N$ et l'azimut $= 180^\circ + B = 180^\circ + z - (M - N)$.

On voit avec quelle facilité ces deux séries se continueraient; trois termes suffiront toujours, quelquefois il suffira de deux.

75. Soit $\text{tang}\,x = \text{tang}\,\delta \cos z$, $\lambda = (H - x)$; et (X. 216)

$$y = \left(\frac{\text{tang}^2\,\frac{1}{2}P}{\sin 1''}\right)\sin 2\lambda - \left(\frac{\text{tang}^4\,\frac{1}{2}P}{\sin 2''}\right)\sin 4\lambda + \left(\frac{\text{tang}^6\,\frac{1}{2}P}{\sin 3''}\right)\sin 6\lambda - \text{etc.}$$

x sera la distance au pied de la perpendiculaire abaissée du lieu inconnu sur le méridien du lieu connu.

y sera la différence entre H' et λ, ou bien $(H + dH) = (H - x - y)$; $dH = -(x + y)$.

Il suffira d'un terme pour y.

76. Ainsi par la formule (70) vous détermineriez la différence des parallèles entre chacun de vos signaux consécutifs, tant à droite qu'à gauche de la méridienne, et vous auriez, en prenant les deux sommes de différences, deux fois la longueur de votre méridienne, sans aucune réduction; car dans cette méthode il est indifférent que les deux objets extrêmes soient sous le même méridien, ce qui n'a lieu dans aucune autre. En effet, soit PDp (fig. 99 la méridienne de Dunkerque placé en D, M Mont-Jouy, Mp la perpendiculaire abaissée de Mont-Jouy sur le méridien. Les autres méthodes donneront Dp; pour avoir l'arc intercepté entre les parallèles, du pôle P, décrivez le parallèle Mu; il faudra calculer pu et l'ajouter à Dp pour avoir l'arc du méridien. Or pu est la différence de l'hypoténuse à la base dans le triangle PpM; ainsi

$$pu = \text{tang}^2\tfrac{1}{2}P \sin 2PM - \tfrac{1}{2}\text{tang}^4\tfrac{1}{2}P \sin 4PM \text{ (X. 215)}$$
$$= \text{tang}^2\tfrac{1}{2}P\,\frac{\sin 2H}{\sin 1''} + \text{tang}^4\tfrac{1}{2}P\,\frac{\sin 4H}{\sin 2''} + \text{etc.}$$

Le premier terme suffit, mais $\sin P = \frac{\sin pM}{\sin PM} = \frac{pM \sin 1''}{\cos H}$;

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}P = \frac{\frac{1}{2}\sin P}{\cos^2\frac{1}{2}P} = \frac{\frac{1}{2}pM\sin 1''}{\cos H\cos^2\frac{1}{2}P}, \qquad \text{tang}^2\tfrac{1}{2}P = \frac{\frac{1}{4}(pM)^2\sin^2 1''}{\cos^2 H\cos^4\frac{1}{2}P};$$

$$pu \text{ en secondes} = \frac{\frac{1}{4}(pM)^2\sin 1''\sin 2H}{\cos^2 H} = \frac{\frac{1}{2}(pM)^2\sin 1''\sin H\cos H}{\cos^2 H}$$
$$= \tfrac{1}{2}(pM)^2\sin 1''\,\text{tang}\,H.$$

Cette expression suppose pM en secondes, mais il est donné en toises, c'est-à-dire qu'au lieu de $(pM)^2$ on a véritablement $(m.pM)^2$; m étant le nombre de toises contenues dans un arc de 1″; il faudrait donc diviser le second membre par m^2 pour avoir pu en secondes $= \frac{(pM)^2\sin 1''\text{tang}H}{2m^2}$; ensuite pour avoir pu en toises on multiplierait par m; ainsi pu en toises $= \frac{(pM)^2\sin 1''\text{tang}H}{2m} = 11^t,476$ pour Mont-Jouy.

77. L'équation (71), ou l'équation (73) donnera P, ou la différence de longitude entre les deux signaux; P ajoutée à la longitude du premier signal, ou retranchée selon les cas, donnera la longitude du second, comptée du méridien principal.

L'équation (73) $B = z - (M - N)$, ou l'une des équations (72), donnera l'angle B (fig. 98), c'est-à-dire l'inclinaison de la distance BA sur le méridien PB du second signal. On aura donc ainsi de proche en proche les azimuts de tous les signaux vus les uns des autres, lorsqu'ils sont réciproquement visibles. Ainsi de l'azimut de Dunkerque observé à Watteu, j'ai pu conclure l'azimut du Panthéon, vu de mon observatoire, et le comparer à celui que j'avais observé directement. J'ai trouvé l'excès du calcul $= -6'',8$; c'est tout ce qu'on peut prétendre dans une opération si compliquée. De Dunkerque à Bourges, l'excès est $+32'',6$; j'espérais mieux. De Dunkerque à Carcassonne, $+38'',6$; de Bourges à Carcassonne, $+6'',3$, ce qui va très-bien. De Dunkerque à Mont-Jouy, $+23'',4$; de Bourges à Mont-Jouy, $-9'',2$; de Carcassonne à Mont-Jouy, $-15'',5$; ces deux derniers sont de Méchain. Nous avons donné tout le soin possible aux observations; d'où viennent ces différences? c'est ce que je n'ai pu découvrir. Si les parallèles sont elliptiques comme les méridiens, les azimuts calculés dans la sphère ne peuvent s'accorder avec les azimuts sur l'ellipsoïde; mais il semble que les différences sont bien fortes pour tenir à cette cause. Quoi qu'il en soit, j'ai prouvé que l'incertitude de 23″ sur les azimuts relatifs de Dunkerque et Mont-Jouy ne pouvait produire une toise d'erreur sur

la distance des parallèles. Nos calculs pour la grandeur de l'arc du méridien n'en sont pas sensiblement affectés ; ils ne le sont pas davantage de l'ellipticité du méridien. Les angles sphéroïdiques ne diffèrent pas des angles sphériques, les cordes sont les mêmes, nous avons exactement les côtés et les arcs entre les parallèles, quelle que puisse être la figure de la terre, pourvu qu'elle ne diffère pas considérablement de la forme sphérique. L'ellipticité de la terre ne nous est nécessaire que pour changer en secondes les arcs qui ont été mesurés en toises. Voyons donc à présent quels sont les moyens de calculer les effets de l'ellipticité.

78. Nous supposerons que la terre soit un ellipsoïde de révolution, c'est-à-dire, formé par la révolution d'une demi-ellipse autour de son petit axe. Ainsi l'équateur et tous ses parallèles seront des cercles; tous les méridiens seront des demi-ellipses parfaitement semblables à la demi-ellipse génératrice ; si cette hypothèse n'est pas exactement vraie, elle ne peut avoir d'erreur sensible dans le fuseau si étroit qui renferme tous nos triangles.

Soit DE (fig. 100) le diamèt. de l'équateur, CE$=\frac{1}{2}$DE$=\frac{1}{2}$ grand axe$=m$,

DPE la moitié nord du mérid. ellipt., CP $=\frac{1}{2}$ petit axe $=n$,

DP'E le demi-cercle circonscrit, aF l'ordonnée du cercle; la partie AF sera l'ordonnée de l'ellipse, aT la tangente au point a du cercle; AT sera la tangente à l'ellipse; en effet, l'ellipse peut-être considérée comme la projection orthographique du cercle, le point A sera la projection du point a et AT la projection de aT.

Soit I l'inclinaison du cercle sur l'ellipse, nous aurons

$$\mathrm{CP}=\mathrm{CP}'\cos\mathrm{I},\ \text{ou}\ n=m\cos\mathrm{I}\ \text{et}\ \cos\mathrm{I}=\frac{n}{m}\ldots\ldots\ (1),$$

$$\sin\mathrm{I}=\text{excentricité de l'ellipse}=(1-\cos^2\mathrm{I})^{\frac{1}{2}}=\left(1-\frac{n^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}\ldots\ (2),$$

$$\mathrm{tang}^2\tfrac{1}{2}\mathrm{I}=\frac{1-\cos\mathrm{I}}{1+\cos\mathrm{I}}=\frac{1-\frac{n}{m}}{1+\frac{n}{m}}=\frac{m-n}{m+n}\ldots\ldots\ldots\ (3),$$

$$\mathrm{tang}^2\mathrm{I}=\frac{\sin^2\mathrm{I}}{\cos^2\mathrm{I}}=\frac{m^2-n^2}{m^2}\cdot\frac{m^2}{n^2}=\frac{m^2-n^2}{n^2}=\frac{m^2}{n^2}-1=\frac{(m+n)(m-n)}{n^2}\ldots\ (4).$$

Soit a l'aplatissement, 1 le demi-grand axe ; $(1-a)$ sera le petit

axe ; $1-a=\cos I$; $a=1-\cos I=2\sin^2\frac{1}{2}I$ .... (5),

$$\text{tang}^2\tfrac{1}{2}I=\frac{1-\cos I}{1+\cos I}=\frac{1-(1-a)}{1+(1-a)}=\frac{a}{2-a}=\frac{\frac{1}{2}a}{1-\frac{1}{2}a}=\frac{m-n}{m+n}=\left(\frac{1}{m+n}\right)..(6),$$

car on choisit toujours pour m et n deux nombres qui ne diffèrent que de l'unité,

$$1+\cos I=2-a=2\cos^2\tfrac{1}{2}I \quad \text{et} \quad \cos^2\tfrac{1}{2}I=1-\tfrac{1}{2}a\ldots\ldots (7),$$

$$AF=aF\cos I=aF-2aF\sin^2\tfrac{1}{2}I,\ aF-AF=aA=2aF\sin^2\tfrac{1}{2}I=a.aF.$$

79. Menons la normale ALM jusqu'à la rencontre en M avec le petit axe ; ALT sera l'inclinaison de la normale sur le plan de l'équateur, c'est-à-dire, la latitude telle qu'on l'observe au point A. Nous nommerons H cette latitude. Menons la normale aC, c'est-à-dire le rayon du cercle circonscrit ; $aCT=h$ sera la latitude ramenée au cercle circonscrit ou au cercle dont l'ellipse est la projection.

$$FT=aF\,\text{tang}FaT=AF\,\text{tang}FAT,\ \text{tang}FaT=\frac{AF}{aF}\text{tang}FAT=\cos I\,\text{tang}FAT,$$

$$\text{tang}\,aCF=\cos I\,\text{tang}\,ALF,\quad \text{ou}\quad \text{tang}\,h=\cos I\,\text{tang}H=\frac{n}{m}\text{tang}\,H,$$

et $$(H-h)=\frac{\text{tang}^2\frac{1}{2}I\sin 2H}{\sin 1''}-\frac{\text{tang}^4\frac{1}{2}I\sin 4H}{\sin 2''}+\text{etc.}\ldots (8);$$

MM. Duséjour et Legendre ont fait un grand usage de cette latitude réduite.

80. ACE est ce que je nomme la latitude géocentrique, ou réduite au centre de la terre. Soit H' cette latitude, nous aurons $\text{tang}\,H'=\text{tang}\,ACF=\frac{AF}{CF}$; mais $\text{tang}\,h=\frac{aF}{CF}$; donc $\frac{\text{tang}\,H'}{\text{tang}\,h}=\frac{AF}{aF}=\frac{aF\cos I}{aF}=\cos I$; donc $\text{tang}\,H'=\cos I\,\text{tang}\,h=\cos^2 I\,\text{tang}\,H=\frac{n^2}{m^2}\,\text{tang}\,H$, $\because$ tang H : tang h : tang H' ; les trois tangentes sont en progression géométrique. Soit $\cos^2 I=\cos\varphi$,

$$CAL=H-H'=\text{tang}^2\tfrac{1}{2}\varphi\,\frac{\sin 2H}{\sin 1''}-\text{tang}^4\tfrac{1}{2}\varphi\,\frac{\sin 4H}{\sin 2''}+\text{etc.}$$

H — H' est ce qu'on appelle l'angle de la verticale et du rayon ; on

n'en avait donné que des expressions incomplètes. On peut toujours se contenter des deux premiers termes.

81. Pour être en état de calculer les parallaxes, il faut en outre connaître le rayon CA, ou la distance de l'observateur au centre de la terre. $CA : Ca :: \sin CaA : \sin CAa :: \cos h : \cos H'$; d'où

$$\overline{CA}^2 = \frac{\cos^2 h}{\cos^2 H'} = \frac{1+\text{tang}^2 H'}{1+\text{tang}^2 h} = \frac{1+\cos^4 I\,\text{tang}^2 H}{1+\cos^2 I\,\text{tang}^2 H} = \frac{\cos^2 H(1+\cos^4 I\,\text{tang}^2 H)}{\cos^2 H+\cos^2 I\sin^2 H}$$

$$= \frac{\cos^2 H(1+\cos^4 I\,\text{tang}^2 H)}{\cos^2 H+\sin^2 H-\sin^2 I\sin^2 H} = \frac{\cos^2 H(1+\cos^4 I\,\text{tang}^2 H)}{1-\sin^2 I\sin^2 H} = \frac{\cos^2 H+\cos^4 I\sin^2 H}{1-\sin^2 I\sin^2 H}$$

$$= \frac{\cos^2 H+\sin^2 H(1-2\sin^2 I+\sin^4 I)}{1-\sin^2 I\sin^2 H} = \frac{\cos^2 H+\sin^2 H-\sin^2 H(2\sin^2 I-\sin^4 I)}{1-\sin^2 I\sin^2 H}$$

$$= \frac{1-\sin^2 H(2\sin^2 I-\sin^4 I)}{1-\sin^2 I\sin^2 H} = \frac{1-2\sin^2 I\sin^2 H+\sin^4 I\sin^2 H}{1-\sin^2 I\sin^2 H}$$

$$= \frac{1-\sin^2 I\sin^2 H-\sin^2 I\sin^2 H(1-\sin^2 I)}{1-\sin^2 I\sin^2 H} = \frac{1-\sin^2 I\sin^2 H-\sin^2 I\cos^2 I\sin^2 H}{1-\sin^2 I\sin^2 H}$$

$$= 1-\frac{\sin^2 I\cos^2 I\sin^2 H}{1-\sin^2 I\sin^2 H}, \text{ et } CA = \left(1-\frac{\sin^2 I\cos^2 I\sin^2 H}{1-\sin^2 I\sin^2 H}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$CA = 1 - \frac{\frac{1}{2}\sin^2 I\cos^2 I\sin^2 H}{1-\sin^2 I\sin^2 H} - \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{4}\sin^4 I\cos^4 I\sin^4 H}{1-2\sin^2 I\sin^2 H+\sin^4 I\sin^4 H}$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 I\cos^2 I\sin^2 H - \tfrac{1}{2}\sin^4 I\cos^2 I\sin^4 H - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}\sin^4 I\sin^4 H\cos^4 I$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 I\sin^2 H + \tfrac{1}{2}\sin^4 I\sin^2 H - \tfrac{1}{2}\sin^4 I\sin^4 H - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}\sin^4 I\sin^4 H$$

$$= 1 - \tfrac{1}{2}\sin^2 I\sin^2 H + \tfrac{1}{2}\sin^4 I\sin^2 H\cos^2 H - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{4}\sin^4 I\sin^4 H;$$

or $\frac{1}{2}\sin^2 I = a - \frac{1}{2}a^2$, $\sin^4 I = 4a^2$; donc

$$CA = 1 - (a-\tfrac{1}{2}a^2)\sin^2 H + 2a^2\sin^2 H\cos^2 H - \tfrac{1}{2}a^2\sin^4 H$$

$$= 1 - a\sin^2 H + \tfrac{1}{2}a^2\sin^2 H - \tfrac{1}{2}a^2\sin^4 H + 2a^2\sin^2 H\cos^2 H$$

$$= 1 - a\sin^2 H + \tfrac{1}{2}a^2\sin^2 H\cos^2 H + 2a^2\sin^2 H\cos^2 H$$

$$= 1 - a\sin^2 H + \tfrac{5}{2}a^2\sin^2 H\cos^2 H.$$

Je néglige partout les a^3; on pourrait sans scrupule négliger les a^2.

Ainsi la parallaxe pour le rayon 1 ou pour l'équateur étant ϖ, la parallaxe pour le point A sera

$$\varpi - a\varpi\sin^2 H + \tfrac{5}{2}a^2\varpi\sin^2 H\cos^2 H = \varpi'.$$

C'est cette parallaxe, avec la hauteur du pôle $H' = H$ — angle de la

verticale, qu'on emploiera dans tous les calculs de parallaxe, pour la terre ellipsoïdique.

82. $$\overline{CF}^2 = (Ca\cos h)^2 = \frac{(Ca)^2}{1+\cos^2 I \operatorname{tang}^2 H} = \frac{m^2\cos^2 H}{\cos^2 H + \cos^2 I \sin^2 H}$$
$$= \frac{m^2\cos^2 H}{\cos^2 H + \sin^2 H - \sin^2 I \sin^2 H} = \frac{m^2\cos^2 H}{1-\sin^2 I \sin^2 H},$$

et

$$CF = \frac{m\cos H}{(1-\sin^2 I \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} = \text{rayon du parallèle de l'observateur en A},$$

$$\log CF = \log m + \log\cos H - \tfrac{1}{2}\log(1-\sin^2 I\sin^2 H)$$
$$= \log m + \log\cos H + \tfrac{1}{2}K(\sin^2 I\sin^2 H + \tfrac{1}{2}\sin^4 I\sin^4 H + \text{etc.}).$$

Dans la sphère $\sin I = 0$, le rayon du parallèle serait $m\cos H$; le rayon du parallèle est donc plus grand, pour une même latitude, dans le sphéroïde que dans la sphère; le parallèle est aussi plus grand.

83. La seule inspection de la figure 100 donne

$$AF = CF \operatorname{tang} H' = \frac{m\cos H\cos^2 I\operatorname{tang} H}{(1-\sin^2 I\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} = \frac{m\cos^2 I\sin H}{(1-\sin^2 I\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots (1),$$

$$LF = AF \cot H = \frac{m\cos^2 I\cos H}{(1-\sin^2 I\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots (2),$$

$$AL = LF \operatorname{séc} H = \frac{m\cos^2 I}{(1-\sin^2 I\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots (3),$$

$$CL = CF - LF = \frac{m\cos H - m\cos H\cos^2 I}{(1-\sin^2 I\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} = \frac{m\sin^2 I\cos H}{(1-\sin^2 I\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} \ldots (4),$$

$$CM = CL \operatorname{tang} H = \frac{m\sin^2 I\sin H}{(1-\sin^2 I\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots (5),$$

$$LM = CL \operatorname{séc} H = \frac{m\sin^2 I}{(1-\sin^2 I\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots (6),$$

$$AM = AL + LM = \frac{m\cos^2 I + m\sin^2 I}{(1-\sin^2 I\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} = \frac{m}{(1-\sin^2 I\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots (7);$$

ainsi ce facteur $\frac{1}{(1-\sin^2 I\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$, qui se trouve dans toutes les expressions précédentes, est la normale au point A de l'ellipse, en supposant $m = 1$.

84. Le point M est celui où la normale coupe le petit axe; or CM

augmente avec le sinus de latitude; il s'ensuit que deux normales ne peuvent se rencontrer dans l'axe, si les latitudes sont différentes; et si les deux normales sont aussi dans deux méridiens différens, elles ne se rencontreront nulle part, car les plans de ces méridiens n'ont de points communs que ceux qui sont dans l'axe.

Soient (fig. 101) PM l'axe de la terre, PA, PA′ deux méridiens elliptiques; vous avez observé en A′ l'angle PA′A, vous avez mesuré ou calculé le côté AA′, vous connaissez la latitude de A′, vous avez, par les formules ci-dessus, calculé la latitude du point A; mais c'était en rapportant tout à la normale A′M′, qui n'a pu donner que la distance polaire PM′A, au lieu de la véritable, qui est PMA; la différence de ces deux angles est MAM′, dont la distance polaire calculée était trop petite, ou la latitude calculée trop grande; ainsi quand on va du nord vers l'équateur, comme de A′ en A, on trouve les latitudes trop fortes; c'est le contraire quand on va vers le nord, de A en A′, car alors on rapporte tout à la normale AM, et la correction de latitude est additive.

$$\text{MAM}' = \left(\frac{\text{MM}'}{\text{AM}}\right)\sin \text{AMM}' + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\text{MM}'}{\text{AM}}\right)^2 \sin 2\text{AMM}' + \text{etc.}$$

$$= \left(\frac{\text{CM}'-\text{CM}}{\text{AM}}\right)\sin(180°-90°+\text{H}) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\text{CM}'-\text{CM}}{\text{AM}}\right)^2 \sin(180°+2\text{H})$$

$$= \left(\frac{\text{CM}'-\text{CM}}{\text{AM}}\right)\cos \text{H} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\text{CM}'-\text{CM}}{\text{AM}}\right)^2 \sin 2\text{H}$$

Or $$\frac{\text{CM}'-\text{CM}}{\text{AM}} = \frac{m\sin^2\text{I}(\sin\text{H}'-\sin\text{H})}{(1-\sin^2\text{I}\sin^2\text{H})^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{(1-\sin^2\text{I}\sin^2\text{H})^{\frac{1}{2}}}{m}$$

$$= \sin^2\text{I}\; 2\sin\tfrac{1}{2}(\text{H}'-\text{H})\cos\tfrac{1}{2}(\text{H}'+\text{H})$$

$$= 2\sin^2\text{I}\sin\tfrac{1}{2}d\text{H}\cos(\text{H}+\tfrac{1}{2}d\text{H})$$

$$= 2\sin^2\text{I}\sin\tfrac{1}{2}d\text{H}\cos\tfrac{1}{2}d\text{H}\cos\text{H} - 2\sin^2\text{I}\sin^2\tfrac{1}{2}d\text{H}\sin\text{H}$$

$$= \sin^2\text{I}\sin d\text{H}\cos\text{H} - \tfrac{1}{2}\sin^2\text{I}\sin^2 d\text{H}\sin\text{H},$$

$$\text{MAM}' = \sin^2\text{I}\sin d\text{H}\cos^2\text{H} - \tfrac{1}{2}\sin^2\text{I}\sin^2 d\text{H}\sin\text{H}\cos\text{H}$$
$$- \tfrac{1}{2}\sin^4\text{I}\sin^2 d\text{H}\cos^2\text{H}\sin 2\text{H}$$

$$= 2a\delta\cos\text{A}'\cos^2\text{H} - a\delta^2\sin 1''\cos^2\text{A}'\sin\text{H}\cos\text{H}$$

$$= 2a\delta\cos\text{A}'\cos^2\text{H}(1-\tfrac{1}{2}\delta\sin 1''\cos\text{A}'\,\text{tang}\,\text{H});$$

car on peut toujours négliger $\sin^4\text{I}\sin^2 d\text{H}$, et même s'en tenir au premier terme, qui passe rarement 3″.

85. On trouverait une correction analogue pour l'azimut calculé;

l'expression en serait $\frac{1}{4}\sin^2 I.\delta \tang\delta \sin 2A \cos^2 H$, mais elle est du troisième ordre et toujours insensible (Voyez *Base du Système métrique*, tome II, page 672.). $\sin^2 I = e^2 = 2a$ est censé du premier ordre. L'angle P, ou la différence de longitude est le même pour les deux normales, ainsi il n'aurait besoin d'aucune correction pour l'aplatissement, si l'arc AB était donné en secondes; mais la mesure le donne en mètres ou en toises, et la conversion des toises en secondes dépend de la figure de la terre (83).

Dans la sphère, les trois normales se réuniraient au centre de la terre et ne différeraient pas du rayon; nous aurions arc $AB = \delta = R.\text{angle au centre}$, et angle au centre $= \frac{\delta}{R}$; dans le sphéroïde, les trois normales ne se réunissent nulle part (83); mais on peut supposer qu'elles se réunissent toutes trois au point M, extrémité de l'une quelconque des trois, et l'angle au sommet de la pyramide fictive sera $\frac{\delta}{\text{normale}} = \frac{\delta(1-\sin^2 I \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}{m} = \frac{\delta(1-\sin^2 I \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}{\text{rayon en toises}}$; cette expression n'est pas rigoureuse, mais j'ai prouvé qu'elle est toujours suffisante (*Base*, tome III, p. 33); on portera donc cette valeur dans toutes les expressions ci-dessus où nous avons mis δ tout simplement, parce que nous supposions δ exprimé en secondes. Il faut donc connaître le rayon en toises; mais nous verrons plus loin que tous les degrés mesurés en France ont pour valeurs extrêmes 56947 et 57083; le milieu serait 57015. Soit D cette valeur, ou une autre suivant les cas; $R.\text{arc } 1° = D$, et $R = \frac{\text{arc } 1°}{D}$; cette valeur n'a pas besoin d'être connue avec la dernière précision.

86. Soit AA' (fig. 100) l'élément de la courbe du méridien; $AA' = dA$;

$$A'u = dA \sin H = -dCF$$

$$= -d\left(\frac{m\cos H}{(1-\sin^2 I \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}\right) = -\frac{md\cos H}{(1-\sin^2 I \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{1}{2} m \cos H d(1-\sin^2 I \sin^2 H)}{(1-\sin^2 I \sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= + \frac{m \sin H dH(1-\sin^2 I \sin^2 H) - m \sin^2 I \sin H \cos^2 H dH}{(1-\sin^2 I \sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{mdH \sin H - mdH \sin^2 I \sin^3 H - m \sin H dH \sin^2 I \cos^2 H}{(1-\sin^2 I \sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{mdH \sin H(1-\sin^2 I \sin^2 H - \sin^2 I \cos^2 H)}{(1-\sin^2 I \sin^2 H)^{\frac{3}{2}}} = \frac{mdH \sin H \cos^2 I}{(1-\sin^2 I \sin^2 H)^{\frac{3}{2}}};$$

donc

donc $\frac{dA}{dH}=\frac{m\cos^2 I}{(1-\sin^2 I\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}$ = rayon de courbure du méridien.

Soit r ce rayon,

$$\log r=\log m+2\log\cos I-\tfrac{3}{2}\log(1-\sin^2 I\sin^2 H)$$
$$=\log m+2\log\cos I+\tfrac{3}{2}K(\sin^2 I\sin^2 H+\tfrac{1}{2}\sin^4 I\sin^4 H+\tfrac{1}{3}\sin^6 I\sin^6 H+\text{etc.}).$$

87. De l'équation précédente on tire $m=\left(\frac{dA}{dH}\right)\frac{(1-\sin^2 I\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}{\cos^2 I}$; c'est le rayon de l'équateur. Pour le déterminer, il suffit de connaître, à une latitude donnée H, le rapport $\frac{dA}{dH}$ de l'arc terrestre à l'arc céleste, ou le nombre de toises dA qui répond à un changement dH de latitude; on en déduit le demi-petit axe $n=m\cos I$, mais il faut aussi que l'ellipticité soit connue.

88. Si l'on développe l'expression $\frac{dA}{mdH\cos^2 I}=(1-\sin^2 I\sin^2 H)^{-\frac{3}{2}}$, on aura, en mettant e^2 pour $\sin^2 I$,

$$\frac{dA}{dH.m\cos^2 I}=1+\frac{3}{2}e^2\sin^2 H+\frac{3}{2}.\frac{5}{4}e^4\sin^4 H+\frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{7}{6}e^6\sin^6 H+\text{etc.}$$
$$=1+\frac{3}{2}.\frac{2}{1.2^2}e^2+\frac{3.5}{2.4}.\frac{4.3}{1.2.2^4}e^4+\frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{6.5.4}{1.2.3.2^6}e^6$$
$$-\left(\frac{3}{2}.\frac{1}{2}e^2+\frac{3.5}{2.4}.\frac{4}{2^3}e^4+\frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{6.5}{1.2.2^5}e^6\right)\cos 2H$$
$$+\left(\frac{3.5}{2.4}.\frac{1}{2^3}e^4+\frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{6}{2.2^5}e^6\right)\cos 4H$$
$$-\left(\frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{1}{2^5}e^6\right)\cos 6H,$$

série dont la loi est facile à reconnaître, et qu'on peut continuer à volonté. En intégrant

$$\frac{A}{\cos^2 I}=\left(1+\frac{3}{2}.\frac{2}{1.2^2}e^2+\frac{3.5}{2.4}.\frac{4.3}{1.2.2^4}e^4+\frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{6.5.4}{1.2.3.2^6}e^6\right)H$$
$$-\tfrac{1}{2}\left(\frac{3}{2}.\frac{1}{2}e^2+\frac{3.5.4}{2.4.2^3}e^4+\frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{6.5}{1.2.2^5}e^6\right)\sin 2H$$
$$+\tfrac{1}{4}\left(\frac{3.5}{2.4}.\frac{1}{2^3}e^4+\frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{6}{1.2^5}e^6\right)\sin 4H$$
$$-\tfrac{1}{6}\left(\frac{3.5.7}{2.4.6}.\frac{1}{2^5}e^6\right)\sin 6H+\text{etc.};$$

il n'y a pas de constante à ajouter, parce que A et H sont o en même tems. Cette série donnera donc la valeur d'un arc commençant à l'équateur et terminé au point où la hauteur du pôle est H; elle se réduit au premier terme, si $H = 90°$.

89. Soit, pour abréger,

$$\frac{A}{\cos^2 I} = \alpha H - \beta \sin 2H + \gamma \sin 4H - \delta \sin 6H.$$

Soit un autre arc

$$\frac{A'}{\cos^2 \frac{1}{2} I} = \alpha H' - \beta \sin 2H' + \gamma \sin 4H' - \delta \sin 6H';$$

d'où

$$\frac{A' - A}{\cos^2 I} = \alpha(H' - H) - \beta(\sin 2H' - \sin 2H) + \gamma(\sin 4H' - \sin 4H) - \delta(\sin 6H' - \sin 6H)$$

$$= \alpha(H' - H) - 2\beta \sin(H' - H)\cos(H' + H) + 2\gamma \sin 2(H' - H)\cos 2(H' + H) - 2\delta \sin 3(H' - H)\cos 3(H' + H).$$

90. Soit Q le quart du méridien, $\frac{Q}{\cos^2 I} = \alpha . 90°$; donc

$$\frac{Q}{A' - A} = \frac{Q \text{ séc}^2 I}{(A' - A)\text{ séc}^2 I}$$

$$= \frac{\alpha . 90°}{\left\{ \alpha(H' - H) - 2\beta \sin(H' - H)\cos(H' + H) + 2\gamma \sin 2(H' - H)\cos 2(H' + H) - 2\delta \sin 3(H' - H)\cos 3(H' + H) \right\}},$$

$$\alpha = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6,$$

$$\beta = \frac{3}{8}e^2 + \frac{15}{32}e^4 + \frac{525}{1024}e^6,$$

$$\gamma = \frac{15}{256}e^4 + \frac{105}{1024}e^6, \qquad \delta = \frac{35}{3072}e^6$$

$$\frac{2\beta}{\alpha} = \frac{3}{4}e^2 + \frac{3}{8}e^4 + \frac{111}{512}e^6,$$

$$\frac{2\gamma}{\alpha} = \frac{15}{128}e^4 + \frac{15}{128}e^6,$$

$$\frac{2\delta}{\alpha} = \frac{35}{1536}e^6;$$

on peut même supprimer les e^6 qui ne font pas une toise sur le quart du méridien.

$$Q=\left(\frac{A'-A}{H'-H}\right)(90^\circ)\left[\left(1+\frac{3}{4}e^2+\frac{3}{8}e^4\right)\frac{\sin(H'-H)\cos(H'-H)}{H'-H}\right.$$
$$\left.+\frac{9}{16}e^4\frac{\sin^2(H'-H)\cos^2(H'+H)}{(H'-H)^2}-\frac{15}{128}e^4\frac{\sin 2(H'-H)\cos 2(H'+H)}{(H'-H)}\right].$$

Si $(A'-A)$ est donné en toises, le quart du méridien sera pareillement en toises; pour l'avoir en lignes, il faudra le multiplier par 864; le mètre en sera la dix-millionième partie.

Soit μ le mètre en lignes,

$$\mu=\frac{0.0000864(1.5707963267 95)(A'-A)}{(H'-H)}\left[1+\left(\frac{3}{4}e^2+\frac{3}{8}e^4\right)\cos(H'+H)\frac{\sin(H'-H)}{(H'-H)}\right.$$
$$\left.+\frac{9}{16}e^4\cos^2(H'+H)\frac{\sin^2(H'-H)}{(H'-H)^2}-\frac{15}{128}e^4\cos 2(H'+H)\frac{\sin 2(H'-H)}{(H'-H)}\right].$$

91. Soit A un arc quelconque, $\sin A=A-\frac{A^3}{1.2.3}+\frac{A^5}{1.2.3.4.5}$
$$=A\left(1-\frac{A^2}{6}+\frac{A^4}{120}-\text{etc.}\right),$$

$$\frac{\sin A}{A}=1-\frac{A^2}{6}+\frac{A^4}{120}=1-\frac{A^2}{6}\left(1-\frac{A^2}{20}\right),$$

$$\log\left(\frac{\sin A}{A}\right)=\log\left(1-\frac{A^2}{6}+\frac{A^4}{120}\right)=-K\left[\tfrac{1}{6}A^2.\left(1-\frac{A^2}{20}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{A^2}{6}\right)^2\left(1-\frac{A^2}{20}\right)^2\right]$$
$$=-K\left(\tfrac{1}{6}A^2-\tfrac{1}{120}A^4+\tfrac{1}{72}A^4\right)=-K\,\tfrac{1}{6}A^2\left(1-\frac{A^2}{20}+\frac{A^2}{12}\right)$$
$$=-K.\tfrac{1}{6}A^2\left(1+\tfrac{1}{30}A^2\right)=-\tfrac{1}{6}K.A^2-\tfrac{1}{180}K.A^4;$$

mais

$$\cos A=1-\frac{A^2}{1.2}+\frac{A^4}{1.2.3.4}=1-\frac{A^2}{2}+\frac{A^4}{24}=1-\frac{A^2}{2}\left(1-\frac{A^2}{12}\right),$$

$$\log\cos A=-K\left[\frac{A^2}{2}\left(1-\frac{A^2}{12}\right)+\tfrac{1}{2}\frac{A^4}{4}\left(1-\frac{A^2}{12}\right)^2\right]=-K\left(\frac{A^2}{2}-\frac{A^4}{24}+\frac{A^4}{4}\right)$$
$$=-K\,\tfrac{1}{2}A^2\left(1+\frac{A^2}{4}-\frac{A^2}{12}\right)=-K.\tfrac{1}{2}A^2\left(1+\tfrac{1}{6}A^2\right)=-\tfrac{1}{2}K.A^2-\tfrac{1}{12}KA^4,$$

$$\tfrac{1}{3}\log\cos A=-\tfrac{1}{6}K.A^2-\tfrac{1}{36}K.A^4;$$

donc

$$\tfrac{1}{3}\log\cos A-\log\left(\frac{\sin A}{A}\right)=-\tfrac{1}{6}K.A^2-\tfrac{1}{36}K.A^4+\tfrac{1}{6}K.A^2+\tfrac{1}{180}K.A^4$$
$$=-\tfrac{1}{36}K.A^4+\tfrac{1}{180}K.A^4=-\tfrac{1}{45}KA^4;$$

on peut donc supposer $\frac{\sin A}{A} = \cos^{\frac{1}{3}} A$; on aura donc avec une exactitude suffisante, quand même $(H'-H)$ irait à 13 et 14°:

$$\mu = \frac{0.0000864(1.5707963267 95)(A'-A)}{(H'-H)} \{ 1 + (\tfrac{3}{4}e^2 + \tfrac{3}{8}e^4)\cos(H'+H)\cos^{\frac{1}{3}}(H'-H)$$
$$+ \tfrac{9}{16}e^4\cos^2(H'+H)\cos^{\frac{2}{3}}(H'-H) - \tfrac{15}{64}e^4\cos 2(H'+H) \times \ldots\ldots$$
$$\cos(H'-H)\cos^{\frac{1}{3}}(H'-H) \};$$

car

$$\frac{\sin 2(H'-H)}{(H'-H)} = \frac{2\sin(H'-H)\cos(H'-H)}{(H'-H)} = 2\cos(H'-H)\cos^{\frac{1}{3}}(H'-H).$$

92. Soit $C = 0.0000864(1.5707963267 95)$; $\log C \ldots 1.4470587.5$,

$$1 - e^2 = 1 - 2a + a^2, \quad e^2 = 2a - a^2 = a(2-a), \; e^4 = 4a^2,$$
$$\tfrac{3}{4}e^2 + \tfrac{3}{8}e^4 = \tfrac{3}{2}a - \tfrac{3}{4}a^2 + \tfrac{3}{8}.4a^2 = \tfrac{3}{2}a - \tfrac{3}{4}a^2 + \tfrac{3}{2}a^2 = \tfrac{3}{2}a + \tfrac{3}{4}a^2 = \tfrac{3}{2}a(1 + \tfrac{1}{2}a);$$
$$\mu = C.\left(\frac{A'-A}{H'-H}\right)[1 + \tfrac{3}{2}a(1+\tfrac{1}{2}a)\cos(H'+H)\cos^{\frac{1}{3}}(H'-H)$$
$$+ \tfrac{9}{4}a^2\cos^2(H'+H)\cos^{\frac{2}{3}}(H'-H)$$
$$- \tfrac{15}{16}a^2\cos 2(H'+H)\cos(H'-H)\cos^{\frac{1}{3}}(H'-H)].$$

C'est ainsi que j'ai pu calculer le mètre, en supposant un aplatissement. Si l'aplatissement est inconnu, pour le déterminer on combinera deux valeurs de mètre tirées de deux arcs mesurés à la plus grande distance qu'on pourra trouver.

En effet, développez l'équation et ordonnez suivant les puissances de a, vous aurez

$$\mu = b + ca + da^2,$$

et

$$\mu = b' + c'a + d'a^2;$$

d'où

$$0 = (b - b') + (c - c')a + (d - d')a^2.$$

Vous pouvez résoudre l'équation du second degré; mais comme a^2 est une petite fraction, soit

$$a = m - ha^2, \quad a^2 = m^2 - 2mha^2 + h^2a^4, \quad \text{et} \quad a^4 = m^4,$$
$$a = m - m^2h + 2mh^2a^2 - h^3.m^4 = m - m^2h + 2m^3h^2 + 4m^6h^3 + h^3m^4,$$
$$a = m - m.mh + m.mh.2mh.$$

93. De notre équation on tire

$$(H'-H)=\frac{(A'-A)\frac{\pi}{2Q}}{\left\{\begin{array}{l}1-(\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}a^2)\cos(H'+H)\cos^{\frac{1}{3}}(H'-H)\\ +\frac{15}{16}a^2\cos 2(H'+H)\cos(H'-H)\cos^{\frac{1}{3}}(H'-H)\end{array}\right\}}$$

$$=(A'-A)\frac{\pi}{2Q}\{1+\tfrac{3}{2}a(1+\tfrac{1}{2}a)\cos(H'+H)\cos^{\frac{1}{3}}(H'-H)$$
$$-\tfrac{15}{16}a^2\cos 2(H'+H)\cos(H'-H)\cos^{\frac{1}{3}}(H'-H)$$
$$+[\tfrac{3}{2}a(1+\tfrac{1}{2}a)\cos(H'+H)\cos^{\frac{1}{3}}(H'-H)]^2\},$$

et cette équation sert à vérifier l'amplitude par l'aplatissement, ou l'aplatissement par l'amplitude.

94. Soit $dH = 1°$; dA sera la valeur du degré du méridien, et (86)

$$dA = \frac{m.1°\cos^2 I}{(1-\sin^2 I\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}.$$

Le degré du cercle circonscrit est $m.1°$; pour avoir la latitude où le degré est égal à celui de la sphère circonscrite, il faut égaler ces deux expressions; d'où l'on tire, à cause de $e=\sin I$,

$$\cos^2 I = (1-\sin^2 I\sin^2 H)^{\frac{3}{2}},\quad (1-e^2)^{\frac{2}{3}}=1-e^2\sin^2 H,$$

$$\sin^2 H = \frac{1-(1-e^2)^{\frac{2}{3}}}{e^2} = \tfrac{2}{3}(1+\tfrac{1}{6}e^2+\tfrac{1}{6}.\tfrac{4}{9}e^4+\tfrac{1}{6}.\tfrac{4}{9}.\tfrac{7}{12}e^6);$$

ainsi cette latitude diffère peu de celle qui a pour sinus $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Veut-on le degré égal à celui de la sphère inscrite, qui est $m\cos I.1°$, on fera

$$\cos I=(1-e^2)^{\frac{1}{2}}=(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{3}{2}},\quad 1-e^2=(1-e^2\sin^2 H)^3,$$
$$(1-e^2)^{\frac{1}{3}}=1-e^2\sin^2 H,$$

$$\sin^2 H = \frac{1-(1-e^2)^{\frac{1}{3}}}{e^2} = \tfrac{1}{3}(1+\tfrac{2}{6}e^2+\tfrac{2}{6}.\tfrac{5}{9}e^4+\tfrac{2}{6}.\tfrac{5}{9}.\tfrac{8}{12}e^6+\text{etc.});$$

le sinus diffère peu de $\sqrt{\frac{1}{3}}$.

95. Nous avons (90) $Q=a\cos^2 I.90°$; le degré moyen $\left(\frac{1}{90}\right)Q = a\cos^2 I.1° = 1°.a(1-e^2) = 1°.(1-e^2)(1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6)$

$$= 1°.(1-e^2)(1-e^2\sin^2 H)^{-\frac{3}{2}};$$

égalons ces deux valeurs, nous aurons

$$(1+\tfrac{3}{4}e^2+\tfrac{45}{64}e^4+\tfrac{175}{256}e^6)^{-\frac{2}{3}}=1-e^2\sin^2 H,$$
$$e^2\sin^2 H=\tfrac{1}{2}e^2+\tfrac{5}{32}e^4+\tfrac{5}{64}e^6,$$
$$\sin^2 H=\tfrac{1}{2}+\tfrac{5}{32}e^2+\tfrac{5}{64}e^4=\sin^2 45^\circ+\tfrac{5}{32}e^2+\tfrac{5}{64}e^4,$$
$$\sin^2 H-\sin^2 45^\circ=\sin(H-45^\circ)\sin(H+45^\circ)=\tfrac{5}{32}e^2+\tfrac{5}{64}e^4=\tfrac{5}{32}e^2(1+\tfrac{1}{2}e^2);$$
$$\sin x\cos x=\tfrac{1}{2}\sin 2x=\tfrac{5}{32}e^2(1+\tfrac{1}{2}e^2),\qquad \sin 2x=\tfrac{5}{16}e^2(1+e^2),$$
$$\sin x=\tfrac{5}{16}a \text{ à fort peu près.}$$

Soit $a=\frac{1}{330}$, $x=4'20''$; $a=\frac{1}{300}$, $x=3'25''$; ainsi la latitude moyenne du degré moyen est $45^\circ\ 4'$ environ, et 90 fois ce degré serait le quart du méridien.

96. Voyons maintenant le résultat des observations. J'avais déterminé, par les hauteurs de α et β de la petite Ourse, au-dessus et au-dessous du pôle, les latitudes de Dunkerque, de Paris et d'Évaux. Méchain avait observé à Paris α et β; α seulement à Carcassonne; α, β de la petite Ourse, α du Dragon et ζ de la grande Ourse à Mont-Jouy, α, β et ζ seulement à Barcelone. Ces deux dernières stations ne diffèrent que de 59″,533 en latitude. Les observations de Barcelone, réduites au parallèle de Mont-Jouy, donnent 3″,24 de plus que les observations directes; c'est un fait constaté, mais très-singulier, car de part et d'autre les observations présentent l'accord le plus satisfaisant. De toutes ces latitudes, celle de Paris me paraît la plus sûre, celle de Dunkerque la plus douteuse. Pour la rendre inutile, j'ai calculé de nouveau les triangles du major général Roy, afin que l'arc s'étendît jusqu'à Greenwich; cet arc a depuis été prolongé par l'autre bout, jusqu'à Formentera.

	Latitudes.	Intervalles.	Interval. en toises.	Degrés.	Latitudes moyennes.	Diminut. par degré.
Greenwich...	51° 28′ 40″ 60	0° 26′ 30″ 80	25241^{T}9			
Dunkerque...	51. 2. 9,20	2. 11. 19,83	124944,8	57082^{T}63	49° 56′ 29″ 30	
Panthéon	48. 50. 49,37	2. 40. 6,83	152293,1	57069,31	47. 30. 45,91	5^{T}25
Évaux.......	46. 10. 42,54	2. 57. 48,24	168846,7	56977,80	44. 41. 48,37	32,4
Carcassonne..	43. 12. 54,30	1. 51. 9,34	105499,0	56946,67	42. 17. 19,60	12,91
Mont-Jouy..	41. 21. 44,96	2. 41. 48,85	153505,8	56999,84	40. 0. 50,0	— 2,0
Formentera..	38. 39. 56,11					

La première chose qu'on remarque, en jetant les yeux sur ce tableau, c'est qu'il n'est aucun de nos quatre arcs qui ne donne une diminution du nord au sud, c'est-à-dire, un aplatissement. Mais la diminution n'est pas assez régulière, et de Mont-Jouy à Formentera elle se change en augmentation, ce qui indique une latitude trop faible à Mont-Jouy. Si je prends le milieu entre les observations de Barcelone et de Mont-Jouy, et pour Dunkerque le milieu entre mes deux étoiles, j'aurai le tableau suivant, qui sera le résultat moyen de toutes les observations.

	Latitudes.	Intervalles.	Interval. en toises.	Degrés.	Latitudes moyennes.	Diminut. par degré.
Greenwich...	51°28′ 40″00	0°26′ 31″50	25241ᵀ9	57097ᵀ22	51°15′ 24″	
Dunkerque...	51. 2. 8,50	2.11.19,13	124944,8	57087,70	49.56.29	7ᵀ23
Panthéon	48.50.49,37	2.40. 6,83	152293,1	57069,31	47.30.46	8,41
Évaux.......	47.10.42,54	2.57.48,24	168846,7	56977,80	44.41.48	32,40
Carcassonne..	43.12.54,30	1.51. 7,72	105499,0	56960,46	42.17.21	9,36
Mont-Jouy ..	41.21.46,58	2.41.50,47	153605,8	55946,89	40. 0.52	5,03
Formentera ..	38.39.56,11					

Tous les arcs indiqueront une diminution, mais trop lente aux deux extrémités et trop rapide dans le milieu; car dans une ellipse régulière, et avec des observations parfaites, la diminution devrait être de 10 toises environ par degré.

97. On avait espéré que notre arc, partagé presqu'également par le parallèle d'Évaux, pourrait nous donner l'aplatissement; les formules prouvent que c'était demander l'impossible. Le calcul donne l'aplatissement $\frac{1}{139}$ beaucoup trop fort. Notre arc entier, comparé à celui de Bouguer, au Pérou, donnait l'aplatissement $\frac{1}{334}$ un peu faible, peut-être. En refaisant les calculs de Lacondamine, et prenant un milieu entre lui et Bouguer, je trouvai l'amplitude 3° 7′ 3″, et 176877 pour l'arc terrestre, d'où je tirai l'aplatissement $\frac{1}{309}$. Les latitudes sont $-$3° 4′ 32″ et $+$0° 2′ 31″.

98. Le principal objet de notre opération était la détermination du mètre. On voit par la formule (90), que si on avait $\cos(H'+H)=0$, ou

$H' + H = 90°$, le mètre serait à peu près indépendant de l'aplatissement. Le Panthéon et Mont-Jouy donnent $H' + H = 90° 12' 34''$; Greenwich et Formentera, $90° 8' 36''$ et $(H' - H) = 12° 48' 44''$. Cette dernière combinaison donne $\mu = 443^{li.},31008$, ou $443^{li.},3017$, selon que l'on suppose $a = 0.00324$, ou $a = \frac{1}{178}$; par d'autres combinaisons, j'ai trouvé $443^{li.}.32$. On peut donc croire le mètre suffisamment bien déterminé; mais pour qu'on juge de l'incertitude qui peut rester, j'ajouterai le tableau suivant :

Valeurs du mètre dans différentes hypothèses d'aplatissement, ou fraction décimale qu'il faut ajouter à 443 lignes, pour avoir le mètre dans ces diverses hypothèses.

a	Dunkerque. Mont-Jouy.	Dunkerque. Barcelone.	Dunkerque. Barcelone. Mont-Jouy.	Panthéon. Mont-Jouy.	Panthéon. Barcelone.	Panthéon. Barcelone. Mont-Jouy.
1:150	.24487	.2623	.2456	.25370	.2951	.2744
200	.26368	.3051	.2884	.24980	.2912	.2705
250	.28797	.3234	.3087	.24854	.2899	.2692
300	.30459	.3460	.3253	.24817	.2896	.2689
310	.30730	.3487	.3280	.24814	.2895	.2688
320	.30985	.3542	.3312	.24812	.2895	.2688
330	.31225	.3536	.3329	.24811	.2895	.2688
Sphère.	.39271	.4341	.4134	.25171	.2931	.2724

99. Le mètre adopté par la commission est de $443^{li.},295936$. Ce mètre, dans la colonne de Mont-Jouy, tombe entre $\frac{1}{250}$ et $\frac{1}{300}$ d'aplatissement; dans celle de Barcelone, entre $\frac{1}{150}$ et $\frac{1}{200}$; dans celle de Barcelone-Mont-Jouy, entre $\frac{1}{200}$ et $\frac{1}{250}$; dans celle de Panthéon-Barcelone, il s'éloigne peu de $\frac{1}{150}$. La commission supposait $\frac{1}{334}$, et faisait la latitude de Dunkerque un peu trop forte. Je crois que le plus sûr est de s'en tenir au résultat de Greenwich et de Formentera $443^{li.},31$, et mon avis avait toujours été qu'on s'en tînt à $443^{li.},3$ en nombre rond. Le mètre a été déterminé pour la température o. Pour l'alonger un peu, il suffirait d'élever la température d'un petit nombre de degrés. Borda, par ses expériences, a trouvé que pour chaque degré de Réaumur, la toise de platine s'alonge de $0^t,00001.0705.71$;

pour

pour un degré centésimal, elle s'alongera de 0.00000.85645.68; le mètre s'alonge de 0.00000.43942.57.

100. Nous avons vu que la diminution de nos degrés n'est pas celle d'une ellipse régulière; on a cherché, par différens moyens, à déterminer l'erreur qu'il faudrait supposer à nos observations, pour les ramener à une ellipse rigoureuse; je ne vois rien de plus simple et de plus commode pour cette recherche, que notre formule (93)

$$H'-H=(A'-A)\frac{\pi}{2Q}\left[1+\tfrac{3}{4}a(1+\tfrac{1}{2}a)\cos(H'+H)\cos^{\frac{1}{3}}(H'-H)\right.$$
$$\left.+(\text{terme précéd.})^2-\tfrac{15}{16}a^2\cos 2(H'+H)\cos(H'-H)\cos^{\frac{2}{3}}(H'-H)\right].$$

Si l'on suppose $a=\frac{1}{310}$, comme la quantité la plus probable, on pourra calculer $(H'-H)$ par notre formule, et comparer ce qui en résultera à la différence observée des latitudes, la différence sera la résultante des deux erreurs. Pour exemple, prenons l'arc entre Greenwich et le Panthéon. S'il y a deux latitudes sur lesquelles on puisse compter, ce sont ces deux-là. Cependant M. Pond vient de diminuer la première de 1'',5, et si l'autre a besoin d'une correction, on a lieu de croire qu'elle doit être dans le même sens, mais beaucoup plus faible. Voici le calcul, mais nous y supposerons d'abord $a=\frac{1}{180}$, parce que cet aplatissement est un de ceux qui s'accordent le mieux avec nos différens arcs.

101. La Commission des poids et mesures a trouvé le quart du méridien $Q=5130740^T$; avec un plus fort aplatissement, j'ai trouvé $5131111^T,1111$. Le premier nombre donne, pour le degré moyen, $57008^T,2222$; le second, $57012^T,3457$. La minute vaudra donc $950^T,137$, ou $950^T,2057$; la seconde, $15^T,8356173$, ou $15^T,836763$.

LogQ....	6.71018.00073	ou...........	6.71024.14191
2....	0.30102.99957	....	0.30102.99957
	7.01121.00030		7.01124.14148
$648000=\pi$....	5.81157.50059		5.81157.50059
$\log\frac{\pi}{2Q}$....	8.80036.50029	....	8.80033.35911
600000^T....	5.77815.12504	....	5.77815.12504
10° 31′ 29″,27....	4.57851.62533	10° 31′ 26″55	4.57848.48415
		29.27	

la différence pour 10° 31′ 29″ serait de .... 2.74, ou de 0″,260 par degré.

Ainsi pour conclure avec certitude, ou l'aplatissement ou l'erreur des observations, il faudrait être sûr de la valeur exacte du quart du méridien. Mais cette valeur étant tirée d'un très-grand arc coupé presqu'également par le parallèle de 45° 3 à 4', cette donnée, malgré son incertitude, est encore celle dont on a moins de sujet de se défier.

A′—A = 1501867	$\frac{\pi}{2Q}$... 8.8003336
H′ = 51.28.40.00	A′—A... 5.1766314
H = 48.50.49.37	2° 38′ 3″4200 3.9769650
H′—H = 2.37.50.63	aM — 7.1740721
2(H′—H) = 5.15.41.26	— 14.1591 — 1.1510371
H′+H = 100.19.29.37	½a... 7.4436975
2(H′+H) = 200.38.59.74.	— 0.0393 — 8.5947346
log ³⁄₂...... + 0.1760913	2.37.49.2216.
log cos(H′+H) — 9.2534063	
⅓ log cos(H′—H)... 9.9998470	3.9769650
M... — 9.4293446	a²N... 5.4319762
a = $\frac{1}{180}$...... 7.7447275	+ 0″2564 9.4089412.
aM... — 7.1740721	a²M²... 4.3481442
½...... 9.6989700	3.9769650
½a...... 7.4436975.	0.0211 8.3251092
— $\frac{15}{16}$ — 9.9719713	2.37.49.4991
cos 2(H′+H) — 9.9711618	2.37.50.63 = amplit. observ.
cos (H′—H)... 9.9995411	— 1″ 13 = excès du calcul.
⅓... 9.9998470	— 1.50 = dimin. de M. Pond.
N... + 9.9425212	+ 0.37 = excès du calcul.
a²...... 5.4894550	
a²N...... 5.4319762.	

102. Il ne s'en faut donc que de 1″,13 que l'aplatissement $\frac{1}{180}$ ne satisfasse à l'amplitude observée. Si l'on veut adopter le calcul pour bon, il faudra dire que la latitude de Greenwich est trop forte de 1″; en effet, M. Pond la diminue de 1″,5, mais on peut partager l'erreur entre

les deux latitudes. Il n'y aura que quelques logarithmes à changer pour essayer un autre aplatissement; prenons pour exemple $\frac{1}{200}$.

M —	9.4293446	N +	9.9425212
$a = \frac{1}{200}$...	7.6989700	a^2...	5.3979400
aM... —	7.1283146	a^2N...	5.3404612
2° 38′ 3″4200...	3.9769650............		3.9769650
— 12.7432 —	1.1052796	+ 0″2077	9.3174262.
$\frac{1}{2}a$...	7.3979400		
— 0.0319...	8,5032196	a^2M^2...	4.2566292
			3.9769650
2.37.50.6449		+ 0.0171	8.2335942.
		+ 0.2248	
		2.37.50.6449	
amplit. calculée =	2.37.50.8697		
amplit. observée =	2.37.50.63		
excès du calcul....	+ 0.24, ou + 1″,74 (M. Pond).		

103. On peut donc dire que l'aplatissement $\frac{1}{200}$ satisfait à cette amplitude. Un calcul semblable pour le Panthéon et Dunkerque, donne — 1″,35 pour $\frac{1}{180}$, et — 0″,27 pour $\frac{1}{200}$; ainsi l'aplatissement qui satisfait à cet arc est $\frac{1}{200}$ ou $\frac{1}{205}$ environ. En général, j'ai trouvé dans toutes les hypothèses, que la correction qu'il faudrait faire à Dunkerque devait s'appliquer de même à Greenwich.

L'aplatissement $\frac{1}{180}$ donne + 2″,84 à ajouter à l'amplitude entre Paris et Évaux, ou à retrancher de la latitude d'Évaux, si on la croit moins sûre que celle de Paris. L'aplatissement $\frac{1}{150}$ réduit l'erreur à 1″55; $\frac{1}{180}$ donnerait une erreur — 0″,34; l'aplatissement $\frac{1}{125}$ réduirait l'erreur à rien.

Pour le Panthéon et Carcassonne, $\frac{1}{180}$ donne — 2″,45; $\frac{1}{250}$ réduirait l'erreur à 1″,0, et $\frac{1}{300}$ à — 0″,39; mais (H′+H) est trop près de 90°, pour donner quelques lumières sur l'aplatissement.

Pour le Panthéon et Mont-Jouy, tout aplatissement est indifférent; notre valeur de $\frac{\pi}{2Q}$ indique une erreur — 3″,06 sur l'amplitude, par un milieu entre Barcelone et Mont-Jouy, ou 1″,44 par Barcelone seule.

Il faudrait donc augmenter Barcelone ou diminuer Paris de cette quantité, ou partager l'erreur par moitié.

Il résulte de cet examen que l'aplatissement $\frac{1}{180}$ ou $\frac{1}{200}$ réduit les erreurs dans les limites de la vraisemblance; que Paris, Dunkerque et Greenwich sont bien d'accord; que la latitude d'Évaux paraîtrait trop forte de 2 à 3", et celle de Carcassonne trop faible d'autant, ou à peu près.

104. Pour Greenwich et Évaux, $\frac{1}{180}$ donne $+1'',70$; $\frac{1}{160}$ donne $-0'',81$; $\frac{1}{166}$ ferait évanouir l'erreur. Pour Greenwich et Carcassonne, $\frac{1}{180}$ donne $-3'',57$; $\frac{1}{220}$ donne $-0'',16$. Pour Carcassonne et Mont-Jony-Barcelone, $\frac{1}{180}$ donne $-0'',83$, mais Barcelone seule donne $+0'',79$.

On voit donc qu'un aplatissement de $\frac{1}{180}$ représente très-passablement les arcs entre Greenwich et Paris, entre Dunkerque et Paris, entre Greenwich et Évaux, Greenwich et Barcelone, Carcassonne et Mont-Jouy. Il paraît donc à peu près constant que l'arc du méridien depuis Greenwich jusqu'à Barcelone indique, dans son tout et dans ses parties, un aplatissement qui diffère peu de $\frac{1}{180}$. Il est vrai que l'angle entre Paris et Évaux montre un aplatissement plus fort, et que l'arc entre Évaux et Barcelone en indiquerait encore un plus considérable, puisque $\frac{1}{180}$ donne $-5'',91$, par un milieu entre Barcelone et Mont-Jouy, et $-4'',3$ par Barcelone seule. Il faut donc qu'il y ait à Évaux quelqu'erreur dans l'observation, ou quelqu'irrégularité locale dans la densité de la terre. Or, en relisant toutes les observations que j'ai faites à Évaux (*Base du Système métr.* tome II, p. 469, etc.), il m'est impossible de concevoir une erreur $+3''$, à moins d'une erreur constante dans le cercle, et dans ce cas, pourquoi le même instrument n'aurait-il pas donné 5" de trop à la latitude de Paris? Mais quelque parti que l'on prenne, l'arc de France indique un aplatissement plus considérable que celui du globe en général, et c'est la conclusion la plus sûre qu'on puisse tirer de tout ceci.

105. Telles sont les conséquences les plus importantes qu'on déduit de la mesure des degrés. Les observations des distances zénitales réciproques des signaux ont fait remarquer une espece de réfraction qu'on désigne ordinairement sous le nom de *réfraction terrestre;* elles nous fournissent un moyen fort expéditif de connaître les hauteurs de tous nos signaux au-dessus de l'horizon de la mer.

Soit C le centre de la terre (fig. 102), A et A' les sommets de deux signaux, $ZAA'=\delta$ l'angle entre le zénit de A et le sommet A', l'angle entre le zénit de A' et le sommet de A ou $VA'A=\delta'$. Nous supposons les distances observées réduites au sommet des signaux (42).

$$\left.\begin{array}{l}ZAA'=180^\circ-CAA'\\ VA'A=180^\circ-CA'A\end{array}\right\}ZAA'+VA'A=360^\circ-CAA'-CA'A$$
$$=360^\circ-(180^\circ-C)=180^\circ+C=\delta+\delta';$$

ainsi la somme des distances zénitales réciproques de deux signaux devrait être de 180°, plus l'angle des deux normales, ou 180° + arc *ab* de distance entre les pieds des signaux sur le globe.

106. Si la terre est sphérique, deux objets seront de niveau quand ils seront à la surface de la sphère, ou dans une surface sphérique concentrique et parallèle à la surface de la mer. Dans ce cas, chacune des distances sera $90^\circ+\frac{1}{2}C$, et la somme $\delta+\delta'=180^\circ+C$.

Si la terre est un ellipsoïde, deux signaux seront de niveau à la surface même de l'ellipsoïde, ou à la surface d'un ellipsoïde semblable et concentrique. Mais si les latitudes sont différentes, les normales seront inégales, la perpendiculaire abaissée de C sur la corde ne la coupera plus en deux parties égales; mais en employant la normale moyenne, on pourra éluder l'effet de cette inégalité, dont il serait très-facile au reste de tenir compte, si elle n'était pas insensible.

107. On observe que jamais on n'a véritablement $\delta+\delta'=180^\circ+C$, la somme est toujours trop faible; c'est que la réfraction élève le signal A' en B' d'une quantité $=r$, et A en B d'une quantité r'; ensorte que

$$\delta+r+\delta'+r'=180^\circ+C;$$

d'où

$$r+r'=180^\circ-\delta-\delta'+C,$$

la route de la lumière de A en A' doit être la même que de A' en A. C'est une courbe dont les droites AB' et A'B sont les tangentes, ainsi

$$r'=r=\tfrac{1}{2}(r+r'),\quad r=90^\circ+\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{2}(\delta+\delta'),$$

et

$$\frac{r}{C}=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\delta+\delta'-180^\circ}{C}\right),$$

c'est ce qui aurait lieu si les deux observations étaient simultanées, ou

si l'état de l'atmosphère ne changeait pas dans l'intervalle des deux observations ; on aurait ainsi le rapport de la réfraction terrestre à l'intervalle des signaux.

108. Soit *ab* la corde qui joint les axes des deux signaux à la surface sphérique ou sphéroïdique des mers. A*a* et *b*A' seront les hauteurs des deux signaux au-dessus de la mer.

Soit AA'' parallèle à la corde *ab* ; $A'A''=dN$ sera la différence de niveau. Soit $AA''=K$; sur AA'', abaissons la perpendiculaire $A'd$,

$$A'd=A'A''\cos\tfrac{1}{2}C=dN\cos\tfrac{1}{2}C,\quad A''d=dN\sin\tfrac{1}{2}C,$$

$$\text{tang}\,A'AA''=\frac{A'd}{Ad}=\frac{dN\cos\frac{1}{2}C}{AA''+A''d}=\frac{dN\cos\frac{1}{2}C}{K+dN\sin\frac{1}{2}C}=\frac{dN\sin(90°-\frac{1}{2}C)}{K+dN\cos(90°-\frac{1}{2}C)},$$

$$A'AA''=\left(\frac{dN}{K}\right)\frac{\sin(90°-\frac{1}{2}C)}{\sin 1''}-\left(\frac{dN}{K}\right)^2\frac{\sin(180°-\frac{2}{2}C)}{\sin 2''}$$
$$+\left(\frac{dN}{K}\right)^3\frac{\sin(270°-\frac{3}{2}C)}{\sin 3''}.$$

$$\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta)=\left(\frac{dN}{K}\right)\frac{\cos\frac{1}{2}C}{\sin 1''}-\left(\frac{dN}{K}\right)^2\frac{\sin\frac{2}{2}C}{\sin 2''}-\left(\frac{dN}{K}\right)^3\frac{\cos\frac{3}{2}C}{\sin 3''}+\text{etc.}$$

Car $A'AA''=\frac{1}{2}(VA'A-ZAA')=\frac{1}{2}(\delta'+r'-\delta-r)=\frac{1}{2}(\delta'-\delta)$.

Cette formule servirait donc à calculer la différence des distances au zénit δ' et δ, si l'on n'en avait pu observer qu'une seule, et qu'on eût besoin de l'autre pour réduire à l'horizon un angle observé entre deux signaux inégalement élevés.

109. $A'AA''=ZAA''-ZAA'=90°+\frac{1}{2}C-\delta-r=90°-(\delta+r-\frac{1}{2}C)$

$$\text{tang}\,A'AA''=\text{tang}[90°-(\delta+r-\tfrac{1}{2}C)]=\cot(\delta+r-\tfrac{1}{2}C)=\text{tang}\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta)$$

$$A'd=Ad\,\text{tang}\,A'AA''=(K+dN\sin\tfrac{1}{2}C)\cot(\delta+r-\tfrac{1}{2}C),$$

$$dN=\frac{A'd}{\cos\frac{1}{2}C}=(K\,\text{séc}\tfrac{1}{2}C+dN\,\text{tang}\tfrac{1}{2}C)\cot(\delta+r-\tfrac{1}{2}C)$$
$$=K\,\text{séc}\tfrac{1}{2}C\cot(\delta+r-\tfrac{1}{2}C)+dN\,\text{tang}\tfrac{1}{2}C\cot(\delta+r-\tfrac{1}{2}C),$$

$$dN-dN\,\text{tang}\tfrac{1}{2}C\cot(\delta+r-\tfrac{1}{2}C)=K\,\text{séc}\tfrac{1}{2}C\cot(\delta+r-\tfrac{1}{2}C),$$

$$dN=\frac{K\,\text{séc}\frac{1}{2}C\cot(\delta+r-\frac{1}{2}C)}{1-\text{tang}\frac{1}{2}C\cot(\delta+r-\frac{1}{2}C)}=\frac{K\,\text{séc}\frac{1}{2}C\,\text{tang}\frac{1}{2}(\delta'-\delta)}{1-\text{tang}\frac{1}{2}C\,\text{tang}\frac{1}{2}(\delta'-\delta)}\ldots\ldots(1),$$

$$=K\,\text{séc}\tfrac{1}{2}C\cot(\delta+r-\tfrac{1}{2}C)+K\,\text{séc}\tfrac{1}{2}C\,\text{tang}\tfrac{1}{2}C\cot^2(\delta+r-\tfrac{1}{2}C)+\text{etc.}$$

Mais

$$\delta + r = 180° + C - \delta' - r', \quad \delta + r - \tfrac{1}{2}C = 180° + \tfrac{1}{2}C - \delta' - r'$$
$$= 180° - (\delta' + r' - \tfrac{1}{2}C)$$

$$dN = \frac{-K\,\text{séc}\,\tfrac{1}{2}C\cot(\delta' + r' - \tfrac{1}{2}C)}{1 + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}C\cot(\delta' + r' - \tfrac{1}{2}C)} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$
$$= -K\,\text{séc}\,\tfrac{1}{2}C\cot(\delta' + r' - \tfrac{1}{2}C) + K\,\text{séc}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}C\cot(\delta' + r' - \tfrac{1}{2}C) - \text{etc.}$$

La première de ces formules servira quand on voudra déterminer la différence de niveau par l'observation faite dans le lieu dont l'élévation est connue; l'autre, quand l'observation aura été faite dans le lieu dont la hauteur est inconnue. On aura égard aux signes des cotangentes. La première formule servira surtout quand on aura les deux distances δ' et δ.

110. Soit A l'horizon de la mer observé de A' et vu en B par l'effet de la réfraction. A'AC $= 90°$; car le rayon A'A est tangent à la surface de la mer; VA'A $= 90° + C = \delta' + r' = \delta' + nC$,

$$C - nC = \delta' - 90°, \quad C = \frac{\delta' - 90°}{1 - n},$$

la formule (2) devient

$$dN = -\frac{K\,\text{séc}\,\tfrac{1}{2}C\cot(90° + C - \tfrac{1}{2}C)}{1 + \text{tang}\,\tfrac{1}{2}C\cot(90° + C - \tfrac{1}{2}C)} = +\frac{K\,\text{séc}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}C}{1 - \text{tang}^2\tfrac{1}{2}C}$$
$$= \frac{2N\sin\tfrac{1}{2}C\,\text{séc}\,\tfrac{1}{2}C\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}C}{1 - \text{tang}^2\tfrac{1}{2}C} = \frac{2N\,\text{tang}^2\tfrac{1}{2}C}{1 - \text{tang}^2\tfrac{1}{2}C} = \tfrac{1}{2}N\,\text{tang}^2 C$$
$$= \frac{\tfrac{1}{2}R\,\text{tang}^2(\delta' - 90°)}{(1-n)^2(1 - \sin^2 I \sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}, \text{ sans erreur sensible.}$$

N est la normale du lieu, R le rayon de l'équateur, dN l'élévation au-dessus du niveau de la mer.

111. A Montjouy ainsi qu'à Dunkerque, nous connaissions dN par une mesure effective; nous pouvions en conclure $(1-n)^2$ et n.

Autant j'avais de signaux vus l'un de l'autre, autant de fois je pouvais déterminer $n = \frac{r}{C} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta + \delta' - 180°}{C}\right)$.

Par cette dernière formule, j'ai trouvé une seule fois n négatif et $= -0{,}0035$; une fois, $+0{,}0231$, 0,0288 et 0,0297; très-rarement, 0,05 ou 0,06, et dans l'été seulement; rarement, 0,14 et 0,15 et en hiver seulement, par des tems brumeux; plus communément, de 0,06

à 0,08 en été, de 0,08 à 0,10 en hiver; quantité moyenne, 0,07876, ou 0,08 en nombre rond; 0,0783 par 17 observations de l'horizon de la mer en été ou en automne.

112. La formule dN (109), appliquée à toutes nos observations suivant toutes leurs combinaisons binaires possibles, m'a donné les hauteurs de tous nos signaux au-dessus de la mer. Ainsi, pour le sommet du clocher de Rodez, j'ai trouvé :

Hauteur au-dessus de la Méditerranée, à Barcelone....	360ᵗ,65
Au-dessus de l'Océan (basse-mer), à Dunkerque......	361.67
Différence entre la Méditerranée et l'Océan, basse-mer..	1.02
entre la Méditerranée et l'Océan, mer moy...	0.05
Le sommet du clocher est élevé sur le sol de.........	43.5
Hauteur du sol, à Rodez..........................	317
A Amiens, le pavé de la Cathédrale est élevé de......	21
A Paris, la plate-forme de l'Observatoire.............	44
Milieu de la base de Melun........................	42
Chapelle-la-Reine, près Fontainebleau................	64
Orléans, pavé de la Cathédrale......................	60
Bourges, pavé de la Cathédrale......................	81
Évaux, pavé de l'Eglise............................	239
Herment, pavé de l'Église...........................	432
Puy-de-Dôme, sommet.............................	759
Cantal..	951
Mont-d'Or..	969
Puy-Violan.......................................	818
Puy-Mary..	851
Chapelle Saint-Jean, près Rieupeyroux................	411
Castelnaudari......................................	170
Carcassonne, pavé de la Cathédrale..................	50
Perpignan, pavé de l'Église..........................	57
Base de Perpignan, hauteur moyenne.................	11.

Ainsi le sol de la méridienne s'élève de Dunkerque jusqu'en Auvergne de 400ᵗ, et s'abaisse ensuite jusqu'à Perpiguan.

113. Pour déterminer les différences de niveau par une seule observation

vation de distance au zénit, je tire des formules précédentes, en supposant $n = 0{,}08$,

$$dN = K \cot \delta + \frac{0.00000.0198\,K^2}{\sin^2 \delta},$$

K est la distance rectiligne entre les signaux.

Mesure du Pendule.

114. La mesure du pendule est une opération qui accompagne ordinairement celle des degrés du méridien, parce qu'elle n'est pas moins propre à déterminer l'aplatissement. Dans notre opération, on avait une raison de plus pour la faire avec tout le soin possible. Avant de se déterminer à choisir le quart du méridien, ou sa quarante-millionième partie pour unité fondamentale du nouveau système métrique, on avait examiné plusieurs autres unités qui avaient été proposées anciennement par divers savans. Cassini avait parlé d'un pied géométrique qui serait la six-millième partie de la minute du grand cercle, ou bien d'une brasse de deux de ces pieds, et qui serait la dix-millionième partie du demi-diamètre de la terre. Mouton avait proposé la minute du degré qu'il appelait *mille*, et dont toutes les sous-divisions devaient être décimales; enfin on avait proposé la longueur du pendule qui bat les secondes. L'idée du pied géometrique de Cassini, celle du mille de Mouton, sont au fond les mêmes que celle de prendre le quart du méridien : mais, dans le système adopté, toutes les divisions sont décimales, au lieu que la division sexagésimale est dominante dans celui de Cassini, et mêlée avec la division décimale dans celui de Mouton. L'idée de prendre une aliquote du rayon de l'équateur n'était guère admissible que dans le cas ou la terre eût été parfaitement sphérique. On peut déterminer le quart du méridien d'une manière presque indépendante de l'aplatissement, au lieu que le demi-grand axe de l'ellipse ne peut être bien connu qu'après une détermination parfaitement exacte de l'aplatissement. En effet, nous avons trouvé pour ce rayon l'expression suivante,

$$m = \left(\frac{A' - A}{H' - H}\right) \frac{(1 - e^2 \sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}{(1 - e^2)},$$

dans laquelle, sans compter tout le reste, le développement donnera

un terme $\frac{3}{2}e^2\left(\frac{A'-A}{H'-H}\right)\sin^2 H = 3a\left(\frac{A'-A}{H'-H}\right)\sin^2 H$. Ainsi jamais on ne pourra se flatter de connaître le demi-grand axe de la terre, de manière à en faire la base d'un système métrique invariable et pris dans la nature.

115. Le pendule avait plus de partisans, mais le pendule varie avec la pesanteur à toutes les latitudes. Le pendule équatorial exigeait un voyage long et pénible. On pouvait prendre le pendule à 45°; mais ce parallèle traversant la France, on craignait que les nations qui ne posséderaient rien à cette latitude, ne repoussassent le nouveau système comme appartenant plus spécialement à la France. D'ailleurs le quart du méridien offrait un avantage particulier, c'est-à-dire un rapport simple et naturel entre les mesures géodésiques et les arcs célestes, ce qui devait faciliter la pratique du pilotage entièrement fondé sur ce rapport. On choisit donc le quart du méridien, dans lequel d'ailleurs on ne voyait rien d'hétérogène ou d'arbitraire; au lieu que le pendule à secondes supposait la division du jour en 86400″, nombre qui n'est ni purement décimal, ni purement sexagésimal. Mais pour faciliter les moyens de retrouver notre mètre, si par quelque grande révolution il venait à se perdre, on résolut de déterminer exactement le rapport du pendule au mètre, dont on savait d'ailleurs qu'il ne devait pas différer considérablement. En effet, Picard et Richer avaient déterminé la longueur du pendule qui bat les secondes à Paris; le premier l'avait trouvé de 3 pieds 0 pouces 8ˡ,5 = 440ˡ,5, le second de 440ˡ,6, et nous avons vu que le mètre est de 443ˡ,3; la différence n'est pas de 3 lignes.

116. Picard et Richer n'avaient donné aucun éclaircissement sur la manière dont ils étaient parvenus à ces résultats. Mairan recommença les observations avec des attentions nouvelles. On peut voir les différens moyens dont il se servit, dans les Mémoires de l'Académie des Sciences, pour 1735. Le résultat auquel il s'arrête, page 203, est 440ˡ,5555. Godin, vers le même tems, mais par des expériences moins nombreuses, avait trouvé 440ˡ,6444. Bouguer dit, page 525 du même volume, qu'il est difficile de répondre d'un huitième ou d'un dixième de ligne. On va se convaincre par l'examen des moyens imaginés par Borda, que l'on peut sans peine porter la précision beaucoup plus loin.

La figure 103 représente le mur contre lequel est aujourd'hui placé le mural de l'Observatoire impérial; AB est l'horloge à secondes aux oscillations de laquelle on comparait celles du pendule d'expérience FP, lequel tombait un peu en avant de l'horloge, et avait sa suspension à l'extrémité d'un bloc de pierre CDEH, posé sur la partie supérieure du mur. Le poids P du pendule faisait ses oscillations à peu près à la hauteur du centre de la lentille, et on les observait à la petite lunette O placée à six pieds de distance. L'horloge et tout l'appareil du pendule étaient renfermés dans une caisse commune, qui les mettait à l'abri des mouvemens de l'air, et qui avait des panneaux à vitre dans sa partie inférieure pour laisser voir les oscillations.

La figure 104 représente la suspension qui était *à couteau;* AB est ce couteau, CD une queue inférieure à laquelle le fil était attaché, EF une pièce montante finissant par une vis, GH un petit bouton mobile le long de la vis. C'est au moyen de ce bouton, qui servait en partie de contre-poids à la queue inférieure, qu'on réglait le mouvement oscillatoire du couteau, et qu'on parvenait à lui donner la même durée qu'à celui du pendule. Ce synchronisme une fois établi, le mouvement du pendule n'étant pas contrarié par celui du couteau, devait être le même que si la masse du couteau et celle de la monture eussent été nulles; ce dont on s'assura d'ailleurs par une expérience directe, en ajoutant un poids de 64 gros à la masse du couteau qui n'en pesait que 5; les oscillations n'en furent pas dérangées.

117. La suspension portait sur un plan MN (fig. 105), lequel était fixé sur une plaque de cuivre IKL de dix lignes d'épaisseur, attachée au bloc CDEH de la fig. 103, par trois vis qui servaient à mettre le plan MN parfaitement de niveau. Le couteau était toujours placé au milieu de l'ouverture ST, lorsqu'on observait les oscillations; on le transportait ensuite vers S, et on le remplaçait par une règle que nous décrirons bientôt. Les fils métalliques parurent préférables aux fils composés de substances végétales; et parmi les fils métalliques, Borda choisit celui de fer qui, à égalité de force, est plus léger et présente moins de surface. Le pendule avait 12 pieds de longueur, et ne faisait par conséquent ses oscillations qu'en 2″. La boule était de platine, d'environ 16 lignes $\frac{1}{2}$ de diamètre, et pesait 9911 grains, ou un peu plus de 17 onces : sa pesanteur spécifique était à celle de l'eau comme 20,71 est à 1, le thermomètre centigrade étant à 20°. La boule tenait au fil,

au moyen d'une petite calotte de cuivre (fig. 106), dont la partie inférieure UX était une portion de sphère d'un rayon égal à celui de la boule. Une légère couche de suif, mise entre la boule et la calotte, produisait une adhérence assez forte pour soutenir le poids; ce moyen donnait la facilité de suspendre la boule successivement par les points opposés de sa surface, ce qui servait à corriger les erreurs provenant de l'inégale densité et de la non-sphéricité. Le fil du pendule passait par un petit trou pratiqué dans la partie supérieure qui excédait la calotte, et y était tenu par une vis de pression. C'était aussi par une vis de pression que le bout supérieur était fixé à la queue CD du couteau. On donnait au fil une longueur telle, qu'il faisait un peu moins d'une oscillation pendant que la lentille de l'horloge en faisait deux : de cette manière, les mouvemens ne s'accordaient que par intervalles d'autant plus grands, que la durée des oscillations approchait davantage d'être double de la durée des oscillations de la lentille.

118. Au milieu de cette lentille (*fig.* 103) on avait collé un papier *e* à fond noir, sur lequel se croisaient deux lignes blanches formant avec l'horizon des angles de 45°. L'horloge étant arrêtée et le pendule également en repos, on fixait la lunette O dans la direction OP*e*, passant par le fil du pendule et l'intersection des deux lignes; et l'on plaçait à une petite distance du pendule, un écran à fond noir QRS, dont le bord vertical QS couvrait la moitié de l'épaisseur du fil du pendule. Cette disposition étant faite, on mettait le pendule et la lentille en mouvement, et l'on observait les tems où le fil et l'intersection *e* disparaissent derrière l'écran. On marquait l'instant où les deux disparitions étaient simultanées. Bientôt après, la lentille arrivait à l'écran avant le pendule, et dès qu'elle avait gagné sur lui deux oscillations, on observait un second concours, puis un troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce que les oscillations du pendule étant devenues très-petites, l'observation cessât d'être aussi certaine.

119. Le pendule mis en oscillation, conservait un mouvement bien sensible pendant 12 heures, mais on ne l'observait que pendant 4 ou 5 heures. Borda remarque que quand l'intervalle d'un concours à l'autre était de 50', et que les oscillations n'étaient pas trop petites, l'incertitude sur l'instant du concours n'était pas de 30''; d'où il résulte que la discordance était sensible aux yeux de l'observateur, lorsqu'un des

deux objets passait à la verticale $\frac{1}{50}$ de seconde avant l'autre ; ainsi la durée de la comparaison étant de 4 heures, la marche du pendule était déterminée à un trois cent-soixante millième près.

120. Comme la durée des oscillations augmente suivant la grandeur des arcs que décrit le pendule, et qu'il fallait réduire cette durée à celle des arcs infiniment petits ; pour mesurer l'amplitude des arcs, on avait placé à une petite distance du pendule, une règle MN divisée en minutes de degré (fig. 103); chaque minute occupant sur la règle une étendue d'une demi-ligne à peu près. Le pendule ayant été mis en oscillation de manière à décrire des arcs de 120′ de part et d'autre de la verticale, une heure après, l'arc n'était plus que de 61′,2; 2^h après, 35′,4; 3^h après, 21′,9; 4^h, 14′,1; 5^h, 9′,4; 6^h, 6′,3; 7^h, 4′,1; 8^h, 2′,7; 9^h, 1′,8; 10^h, 1′,2; 11^h, 0′,8; 12^h, 0′,5 : 20 heures après, les oscillations duraient encore, mais elles n'étaient plus visibles qu'au microscope.

121. La règle qui servait à mesurer la longueur du pendule ressemblait à beaucoup d'égards à celles qui ont servi à la mesure des bases ; elle avait un peu plus de 12 pieds de longueur ; elle était de platine, recouverte d'une autre règle de cuivre de 11 pieds $\frac{1}{2}$, arrêtée vers l'extrémité supérieure MN (fig. 107) par trois vis. L'extrémité inférieure glissait librement sur le platine par son excès de dilatation qui était indiqué par un vernier ST fixé sur le platine, et vu au microscope par une ouverture rectangulaire PR ménagée dans le cuivre. L'extrémité inférieure de la règle portait une languette que l'on poussait en appuyant légérement sur un bouton E ; alors le vernier indiquait la partie saillante de la languette ; les deux verniers donnaient les cent-millièmes de toise.

La règle à son extrémité supérieure était terminée par une traverse ABCD, qui servait à la suspendre à la place du couteau de la fig. 103. La surface inférieure avait été dressée avec soin sur un marbre.

122. Lorsqu'après avoir achevé une observation, on voulait mesurer la longueur du pendule, on commençait par le mettre en repos ; on élevait, au moyen de sa vis, le petit plan III de la fig. 104, jusqu'à ce qu'il vînt toucher la partie inférieure de la boule, ce qui s'observait avec une grande précision, à cause de la lenteur du rappel ; alors,

écartant le couteau du milieu OP, fig. 105, on y amenait la règle qui était suspendue en QR; alors la règle ayant pris la place du pendule, sa languette tombait sur le plan IH, et marquait par sa division la longueur de ce pendule, depuis le point de suspension jusqu'au-dessous de la boule. Par des expériences exactes, on avait remarqué que la règle étant suspendue, s'alongeait par son poids moyen de $\frac{30}{100}$ pour la partie qui était en platine, et $\frac{27}{100}$ pour celle de cuivre.

123. Voici le détail de la première expérience faite le 1er juin.

1er concours	à 7h 45′ 56″	arc décrit 64′	Therm. inf.	15°2	Therm. sup.	16°5
2e..........	8.59.10	32		15.4		16.0
3e..........	10.12.40	19		15.4		16.9
4e..........	11.26.29	11.5		15.4		16.8
5e..........	12.39. 3	7.0		15.6		17.0.

Longueur mesurée 203952,2 parties. Therm. métallique 181,3 parties.

L'horloge avançait de 13″,4 par jour sur les fixes. Le baromètre était à 28 pouces 3 lignes. L'intervalle entre le premier et le deuxième concours a été de 73′ 14″ = 4394″; la moitié 2197″ — 1 = 2196, est le nombre des oscillations du pendule qui en faisait deux de moins que l'horloge entre deux concours. L'horloge avançait de 13″,4 par jour sur les fixes; elle faisait donc 86413″,4 oscillations pendant un jour sidéral, ou 86650″ pendant un jour solaire moyen :

$$4394 : 2196'' :: 86650'' : 43305'',28.$$

Le quatrième terme de cette proportion sera le nombre d'oscillations du pendule en un jour solaire moyen. En faisant des calculs pareils pour les autres intervalles, on aura les nombres

$$43305'',35, \quad 43305'',44 \quad \text{ou} \quad 43305'',14.$$

124. Pour faire à ces nombres les corrections relatives à l'amplitude des arcs, soit a l'arc décrit au commencement d'un intervalle, b l'arc décrit à la fin; M le nombre d'oscillations, μ le module des tables $= 2.30258509$; la correction sera

$$+\frac{\text{M} \sin(a+b) \sin(a-b)}{32\,\mu \log\left(\frac{a}{b}\right)}.$$

(M. Biot a démontré cette formule dans son Astronomie physique, tome III. Additions, p. 170).

Borda trouve ainsi les corrections + 0,51, 0,14, 0,05, 0,02, terme moyen 0,18; ainsi le résultat moyen sera 43505",48. Les corrections sont généralement au-dessous de l'erreur des observations.

La longueur du pendule était.............	203952,2 parties.
Ajoutez pour l'alongement $\frac{3}{10}$ de partie......	0,3
	203952,5

Un fil de fer s'alonge d'un 70000ᵉ pour un degré de Réaumur et de 87500ᵉ pour un degré centésimal, ce qui, pour la longueur du pendule d'expérience, ferait environ 2,33 parties. Pendant les oscillations, les thermomètres marquaient 16°,12; pendant la mesure, ils marquaient 16°,3, différence 0°,18. La correction sera 2,33 × 0,18 = 0,42; il restera donc 203952,08.

C'est la distance depuis le point de suspension; il faut en ôter 937 parties pour le demi-diamètre de la boule; il restera 203015,08.

125. Il faut avoir égard à la pesanteur du fil et à celle de la calotte qui porte la boule. Soit la distance depuis le point de suspension jusqu'au centre de la boule = A, la longueur de la queue CD (fig. 104), par laquelle le fil est soutenu = B, le rayon de la boule = R, la distance depuis le centre de la boule jusqu'au centre de gravité de la calotte UX = D, le poids du fil Π, celui de la calotte = φ; et celui de la boule P; on trouvera que la distance depuis le point de suspension jusqu'au centre d'oscillation, ou la longueur du pendule,

$$= A - \frac{\frac{\varpi}{6P}\left(A + B + R + \frac{2BR - 2BB - 2RR}{4A}\right) + \frac{\varphi}{\varpi}\left(D - \frac{DD}{A}\right)}{1 + \frac{\varpi}{2P}\left(1 + \frac{B - R}{A}\right) + \frac{\varphi}{P}\left(1 - \frac{D}{A}\right)}.$$

M. Biot avertit que cette formule pourrait être insuffisante, si le pendule était moins long. Or

Π = 13,79 grains, φ = 37,82 grains, P = 9911 grains,
B = 17 lignes = 1968 parties,

et D = R; car le centre de gravité de la calotte était sensiblement à la surface de la boule,

	A =	203015,28
		— 51,08
longueur corrigée....	=	202964,10.

126. Les longueurs des pendules sont en raison inverse des carrés des nombres d'oscillations,

$(86400)^2 : (43305,48)^2 :: 202964,1 : 50989,55 =$ longueur du pendule à secondes.

Pour la réduire à ce qu'elle serait dans le vide, d'après la pesanteur spécifique rapportée ci-dessus, Borda conclut que les pesanteurs spécifiques de l'air et de la boule sont :: 1 : 17044, et qu'ainsi l'action de la gravité dans le vide serait plus forte de $\frac{1}{17000}$ environ, et qu'il faut en conséquence augmenter de 3,02 parties la longueur ci-dessus. Mais cette réduction suppose le baromètre à 28 pouces, et le thermomètre de Réaumur à 16 $\frac{3}{4}$, ou le thermomètre centésimal à 21; elle doit être plus grande de $\frac{1}{336}$ pour une ligne de plus dans le baromètre, et de $\frac{1}{270}$ pour un degré du thermomètre centésimal; elle devient donc 3,10, et la longueur pour le vide, 50992,65.

Le thermomètre métallique marquait 181,5; le terme de la glace est à 151, ou 30,5 plus bas. Pour une partie du thermomètre, la règle s'alongeait de $\frac{1}{216000}$; elle était donc alongée de $\frac{30,5}{216000} = 7,15$ parties; la longueur sera.......................... 50999,8

Par d'autres expériences, Borda trouve.....	50999,11
	50999,44
	50998,91
	50999,54
	50999,33
terme moyen........................	50999,35

Prenant ensuite la différence entre deux séries où la boule avait été suspendue par les points opposés, il trouve qu'il faut ajouter 0,34 pour les inégalités de la boule, et il s'arrête à 50999,6, après beaucoup d'autres expériences.

Comparant ces résultats entre eux, il trouve que celui qui diffère le plus du terme moyen ne s'en écarte pourtant que de quantités qui ne feraient que $\frac{1}{300}$ de ligne sur la longueur du pendule à secondes. Multipliez 50999,6 par $\frac{864}{100000}$, le pendule en ligne sera 440^{li},636544, ce qui diffère très-peu du résultat de Mairan, réduit au terme de la glace. Borda trouve définitivement 440^{li},5593 pour 13 $\frac{3}{4}$ de Réaumur.

127.

127. Nous dirons enfin que la longueur du pendule exprimée en parties du mètre est $0^m,993977$, ce qui fournit un moyen facile de retrouver le mètre en tout tems, puisqu'il suffira de mesurer avec exactitude la longueur du pendule qui bat les secondes à Paris; cette évaluation se rapporte au mètre de la Commission, qui est de $443^{li},296$.

128. Soit h la hauteur du lieu de l'observation, R le rayon de la terre; la longueur du pendule doit encore être multipliée par

$$\left(\frac{R+h}{R}\right)^2=\left(1+\frac{2Rh+h^2}{R^2}\right)=1+\frac{2h}{R}.$$

Soit L la longueur du pendule à l'équateur; pour une autre latitude, elle sera $L+a\sin^2H$, de sorte que a est l'excès du pendule polaire sur le pendule équatorial, H étant la hauteur du pôle.

Soit m et n deux pendules observés à deux latitudes très-différentes,

$$m=L+a\sin^2H,$$
$$n=L+a\sin^2H',$$
$$m-n=a(\sin^2H-\sin^2H')=a\sin(H-H')\sin(H+H'),$$

d'où
$$a=\frac{m-n}{\sin(H-H')\sin(H+H')}.$$

Si vous avez un plus grand nombre d'équations pareilles, mettez dans chacune la valeur en nombre de $\sin^2H$, et vous déterminerez les deux constantes L et a par la totalité des observations, en employant, si vous le jugez à propos, la méthode des moindres carrés.

Or on prouve que l'aplatissement $=0.00865-\frac{a}{L}$; vous aurez donc une valeur de l'aplatissement que vous pourrez comparer à celle des degrés. C'est ainsi que M. Mathieu a trouvé l'aplatissement de $\frac{1}{298,2}$ par les six mesures absolues du pendule qui ont été faites sur la méridienne, depuis Dunkerque jusqu'à Formentera.

Supplément pour les latitudes et les azimuts.

129. Nous n'avons rien dit (33 et 96) de la manière de déterminer la hauteur du pôle, par les passages des étoiles circompolaires au méridien supérieur et inférieur; nous avions épuisé cette matière (XXIV. 24).

Nous avons glissé rapidement sur celle d'observer les azimuts (63); voici encore quelques détails qui pourront quelquefois être utiles.

Avant l'invention des cercles répétiteurs, on ne déterminait l'amplitude d'un arc terrestre que par l'observation des étoiles qui passent fort près du zénit des stations extrêmes; on était plus indépendant de la réfraction. Mais l'incertitude qui peut rester à cet égard est assez peu de chose, et j'ai trouvé qu'il n'en résulte pas 0″,6 d'erreur sur notre arc, qui est de 10° environ; elle ne serait guères différente pour l'arc entre Greenwich et Formentera, qui est de 12° 48′; elle serait moindre encore si la température était la même aux deux stations.

On pensait assez généralement que les grands secteurs pouvaient mériter la préférence, mais les degrés d'Angleterre ont rendu la chose fort problématique. Les grands instrumens peuvent être sujets à des flexions et à des changemens de figure qui leur font perdre les avantages qui doivent résulter d'un rayon plus grand et d'une moindre distance zénitale. Les cercles répétiteurs sont d'un usage plus général, ils seront toujours plus communs. C'est d'après ces considérations que nous allons revenir sur la manière de les employer à déterminer la hauteur du pôle et les azimuts.

130. Le moyen le plus direct et le plus sûr pour déterminer la hauteur du pôle, est certainement l'observation des distances zénitales vers les passages supérieurs et inférieurs; mais on peut encore la vérifier et la rectifier par l'observation des distances zénitales vers les plus grandes digressions.

On a observé une distance $ZB = N'$ vers la digression; il est aisé de la réduire à la distance zénitale $ZA = N$, qui avait lieu à la digression même. En effet, les triangles ZBP et ZPA (fig. 108) donnent

$$\cos N' = \cos(P-\alpha)\sin\Delta\sin h + \cos\Delta\cos h, \qquad ZPA = P;$$

$$\cos N = \cos P\sin\Delta\sin h + \cos\Delta\cos h, \qquad APB = \alpha,$$

$$\cos N' - \cos N = 2\sin\tfrac{1}{2}(N-N')\sin\tfrac{1}{2}(N+N')$$

$$= [\cos(P-\alpha) - \cos P]\sin\Delta\sin h,$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}x\sin(N-\tfrac{1}{2}x) = 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x\sin N - 2\sin^2\tfrac{1}{2}x\cos N$$

$$= 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\sin(P-\tfrac{1}{2}\alpha)\sin\Delta\sin h,$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x - 2\sin^2\tfrac{1}{2}x\cot N = (2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha\sin P - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\cos P)\left(\frac{\sin\Delta\sin h}{\sin N}\right),$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x - 2\sin^2\tfrac{1}{2}x\left(\frac{\cot P}{\sin\Delta}\right) = (2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\cot P)\left(\frac{\sin\Delta\sin h\sin P}{\sin N}\right)$$

$$= (2\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\tfrac{1}{2}\alpha - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\cot P)\sin\Delta;$$

car le triangle rectangle ZPA donne $\cot N = \frac{\cot P}{\sin N}$ et $\sin h \sin P = \sin N$.

Comparons cette formule, terme à terme, à la formule (X. 226); nous aurons

$$a = -\left(\frac{\cot P}{\sin \Delta}\right), \quad \text{et} \quad b = \sin \Delta \left(\sin \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\alpha - \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha \cot P\right),$$

$$\begin{aligned} x &= 2b - 2ab^2 + \tfrac{4}{3}b^3 + 4a^2b^3 + \text{etc.} \\ &= \sin \Delta \sin \alpha - 2 \sin \Delta \cot P \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha + \frac{2\cot P}{\sin \Delta} \sin^2 \Delta \left(\sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha \right. \\ &\qquad \left. - 2 \sin^3 \tfrac{1}{2}\alpha \cos \tfrac{1}{2}\alpha \cot P + \sin^4 \tfrac{1}{2}\alpha \cot^2 P\right) \\ &\qquad + \tfrac{4}{3} \sin^3 \Delta \sin^3 \tfrac{1}{2}\alpha \cos^3 \tfrac{1}{2}\alpha + \frac{4\cot^2 P}{\sin^2 \Delta} \sin^3 \Delta \sin^3 \tfrac{1}{2}\alpha \cos^3 \tfrac{1}{2}\alpha \\ &= \sin \alpha \sin \Delta - 2\cot P \sin \Delta \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha + 2\cot P \sin \Delta \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha - 2\cot P \sin \Delta \sin^4 \tfrac{1}{2}\alpha \\ &\qquad - 4\cot^2 P \sin \Delta \sin^3 \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{4}{3} \sin^3 \Delta \sin^3 \tfrac{1}{2}\alpha + 4\cot^2 P \sin \Delta \sin^3 \tfrac{1}{2}\alpha \\ &= \sin \alpha \sin \Delta + \tfrac{4}{3} \sin^3 \Delta \sin^3 \tfrac{1}{2}\alpha, \end{aligned}$$

expression fort simple, qui ne néglige que $\sin^4 \frac{1}{2}\alpha \sin \Delta$, toujours insensible.

Mettons les arcs α au lieu des sinus,

$$\begin{aligned} x &= \alpha \sin \Delta - \tfrac{1}{6}\alpha^3 \sin \Delta + \tfrac{4}{3 \cdot 8}\alpha^3 \sin^3 \Delta = \alpha \sin \Delta - \tfrac{1}{6}\alpha^3 \sin \Delta \,(1 - \sin^2 \Delta) \\ &= \alpha \sin \Delta - \tfrac{1}{6}\alpha^3 \sin \Delta \cos^2 \Delta \sin^2 1''; \end{aligned}$$

il peut être plus commode d'exprimer les α en tems, en faisant $\alpha = 15t$,

$$x = (15 \sin \Delta)t - \left(\frac{15^3 \sin^2 1'' \sin \Delta \cos^2 \Delta}{6}\right) t^3 = mt - nt^3.$$

131. Nous connaîtrons donc $N = N' + \alpha \sin \Delta - \frac{1}{6}\alpha^3 \sin \Delta \cos^2 \Delta \sin^2 1''$, et nous remarquerons que x et α sont négatifs si B est plus loin du zénit que le point A, ou si l'angle ZPB > ZPA.

Nous aurons ensuite

$$\begin{aligned} \cos h &= \cos N \cos \Delta = \cos N - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}\Delta \cos N, \\ \cos N - \cos h &= 2\sin \tfrac{1}{2}(h - N) \sin \tfrac{1}{2}(h + N) = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}\Delta \cos N, \\ 2\sin \tfrac{1}{2}y \cos \tfrac{1}{2}y &+ 2\sin^2 \tfrac{1}{2}y \cot N = 2\sin^2 \tfrac{1}{2}\Delta \cot N, \\ a &= \cot N \quad \text{et} \quad b = \sin^2 \tfrac{1}{2}\Delta \cot N \quad (\text{X. } 226), \\ y &= 2\sin^2 \tfrac{1}{2}\Delta \cot N - 2\sin^4 \tfrac{1}{2}\Delta \cot^3 N + \tfrac{4}{3} \sin^6 \tfrac{1}{2}\Delta \cot^3 N \\ &\qquad + 4\sin^6 \tfrac{1}{2}\Delta \cot^5 N + \text{etc.}; \end{aligned}$$

expression générale de la différence entre l'hypoténuse et le côté moyen, en fonction de ce côté moyen et du petit côté.

Enfin, $90^\circ - H = h = N + y = N' + x + y$, et le problème est résolu.

152. Ces équations seraient exactes au-delà des centièmes de seconde, pour la polaire, si l'on connaissait rigoureusement les quantités Δ, AR et h, qui sont nécessaires pour calculer α et x; supposons que α et Δ aient besoin des corrections $d\alpha$ et $d\Delta$, notre équation deviendra

$$N = N' + \alpha \sin\Delta - \tfrac{1}{6}\alpha^3 \sin^2 1'' \sin\Delta \cos^2\Delta + d\alpha \sin\Delta + \alpha \sin 1'' \cos\Delta d\Delta.$$

Je néglige les différentielles du petit terme $\frac{1}{6}\alpha^3 \sin^2 1'' \sin\Delta \cos^2\Delta$; il nous reste à mettre pour α les différentes valeurs qu'il peut avoir, suivant les circonstances.

153. *Avant la digression orientale.* $\alpha = AR - M - P$ et $d\alpha = dAR - dM - dP = dAR$, et $-d\alpha = -dAR$, car $dM = 0$; l'ascension droite M du milieu du ciel est censée bien connue, et je me suis assuré que dP est insensible quand $d\Delta$ et dh sont d'un petit nombre de secondes. Notre équation deviendra donc, à cause de α négatif,

$$N = N' - \alpha \sin\Delta + \tfrac{1}{6}\alpha^3 \sin^2 1'' \sin\Delta \cos^2\Delta - dAR \sin\Delta - \alpha \sin 1'' \cos\Delta d\Delta$$
$$= A' - dAR \sin\Delta' - b' d\Delta \ldots\ldots (1).$$

Après la digression orientale. $\alpha = P - AR + M$, $d\alpha = -dAR$, et à cause de α additif,

$$N = N' + \alpha \sin\Delta - \tfrac{1}{6}\alpha^3 \sin^2 1'' \sin\Delta \cos^2\Delta - dAR \sin\Delta + \alpha \sin^2 1'' \cos\Delta d\Delta$$
$$= A'' - dAR \sin\Delta'' + b'' d\Delta \ldots\ldots (2).$$

Avant la digression occidentale. $\alpha = P - M + AR$, $d\alpha = dAR$, et à cause de α additif,

$$N = N' + \alpha \sin\Delta - \tfrac{1}{6}\alpha^3 \sin^2 1'' \sin\Delta \cos^2\Delta + dAR \sin\Delta + \alpha \sin^2 1'' \cos\Delta d\Delta$$
$$= A''' + dAR \sin\Delta''' + b''' d\Delta \ldots\ldots (3).$$

Après la digression occidentale. $\alpha = M - AR - P$, $d\alpha = -dAR$ et $-d\alpha = +dAR$, et à cause de α soustractif,

$$N = N' - \alpha \sin\Delta + \tfrac{1}{6}\alpha^3 \sin^2 1'' \sin\Delta \cos^2\Delta + dAR \sin\Delta - \alpha \sin^2 1'' \cos\Delta d\Delta$$
$$= A^{\text{iv}} + dAR \sin\Delta^{\text{iv}} - b^{\text{iv}} d\Delta \ldots\ldots (4).$$

154. Nous avons quatre équations pour trois inconnues; car, ou les observations seront du même jour, et alors N sera une constante,

ainsi que $d\AE$ et $d\Delta$, ou bien elles seront de jours différens, mais alors nous saurons calculer de combien N aura dû changer dans l'intervalle; δN sera connu pour chacune des trois dernières équations, et il ne restera que les trois inconnues constantes N, $d\AE$ et $d\Delta$. En effet, l'équation $\cos h = \cos\Delta \cos N$ donne

$$o = -\delta\Delta \sin\Delta \cos N - \delta N \sin N \cos\Delta \quad \text{et} \quad \delta N = -\delta\Delta \,\text{tang}\,\Delta \cot N;$$

$\delta\Delta$ est le changement de la distance polaire, dans l'intervalle des observations.

Supposons, pour plus de simplicité, que les équations (1) et (2) soient du même jour, ce qui aura toujours lieu, alors nous aurons

$$o = (A'' - A') + (b' + b'')d\Delta \quad \text{et} \quad d\Delta = \left(\frac{A' - A''}{b' + b''}\right).$$

Supposons aussi que les équations (3) et (4) soient d'un même jour, mais autre que le premier; nous aurons de même

$$o = (A''' - A^{\text{iv}}) + (b''' + b^{\text{iv}})d\Delta \quad \text{et} \quad d\Delta = \left(\frac{A^{\text{iv}} - A'''}{b^{\text{iv}} + b'''}\right).$$

Voilà donc deux manières pour connaître la correction $d\Delta$ de la distance supposée; après quoi (2) et (3) nous donneront, en les supposant de différens jours,

$$\delta N = (A''' - A'') + d\AE(\sin\Delta''' + \sin\Delta'') + (b''' - b'')d\Delta,$$

et

$$d\AE = \frac{(A'' - A''') + \delta N + (b'' - b''')d\Delta}{2\sin\frac{1}{2}(\Delta'' + \Delta''')\cos\frac{1}{2}(\Delta'' - \Delta''')};$$

les équations (1) et (4) donneront de même

$$\delta N = (A^{\text{iv}} - A') + d\AE(\sin\Delta^{\text{iv}} + \sin\Delta') + (b' - b^{\text{iv}})d\Delta,$$

et

$$d\AE = \frac{(A' - A^{\text{iv}}) + \delta N' + (b^{\text{iv}} - b')d\Delta}{2\sin\frac{1}{2}(\Delta^{\text{iv}} + \Delta')\cos\frac{1}{2}(\Delta^{\text{iv}} - \Delta')};$$

voilà donc aussi deux manières de trouver $d\AE$.

Si les quatre observations sont du même jour, $\delta N = o$, $\Delta' = \Delta'' = \Delta''' = \Delta^{\text{iv}}$.

Au lieu de quatre observations, ou de trois, qui suffisent, à la rigueur, on aura le plus souvent deux séries complètes qui compren-

dront des observations faites avant et après la digression; chaque observation isolée fournira son équation; on formera quatre sommes de ces équations, en réunissant en une même somme celles qui seront de même forme, et l'on obtiendra le résultat le plus probable pour $d\Delta$ et $d\text{Æ}$; après quoi, connaissant N, Δ et Æ, on en conclura $h = N + y$ et $H = 90° - h$; mais de ces quatre corrections il n'y a guères que celles de N et de h sur lesquelles on puisse compter avec quelque certitude,

135. On peut rapporter les observations à la distance N qui a lieu dans le cercle de 6ʰ; P est alors un angle droit, A est un angle oblique;

$$\sin A = \frac{\sin h}{\sin N} = \frac{1}{(1 + \sin^2 \Delta \cot^2 h)^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos N = \cos h \cos \Delta,$$

$$\cos h = \frac{\cos N}{\cos \Delta} = \cos N + \text{tang}\,\Delta\, \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\Delta \cos N,$$

$$\cos h - \cos N = \text{tang}\,\Delta\, \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\Delta \cos N,$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}(N-h)\sin\tfrac{1}{2}(N+h) = 2\sin\tfrac{1}{2}u\sin(N-\tfrac{1}{2}u) = 2\sin\tfrac{1}{2}u\cos\tfrac{1}{2}u\sin N$$
$$-2\sin^2\tfrac{1}{2}u\cos N = \text{tang}\,\Delta\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\Delta\cos N,$$
$$2\sin\tfrac{1}{2}u\cos\tfrac{1}{2}u - 2\sin^2\tfrac{1}{2}u\cot N = \text{tang}\,\Delta\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\Delta\cot N,$$
$$a = -\cot N, \qquad b = \tfrac{1}{2}\,\text{tang}\,\Delta\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\Delta\cot N,$$

$$N - h = u = \text{tang}\,\Delta\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\Delta\cot N + \tfrac{1}{2}\text{tang}^2\Delta\,\text{tang}^2\tfrac{1}{2}\Delta\cot^3 N$$
$$+ \tfrac{1}{6}\text{tang}^3\Delta\,\text{tang}^3\tfrac{1}{2}\Delta\cot^3 N + \tfrac{1}{2}\text{tang}^3\Delta\,\text{tang}^3\tfrac{1}{2}\Delta\cot^5 N + \text{etc.}$$
$$= \tfrac{1}{2}\cot N\,\text{tang}^2\Delta + \tfrac{1}{4}\cot 2N\cot^2 N\,\text{tang}^4\Delta + \tfrac{1}{12}\cot^3 N\,\text{tang}^6\Delta$$
$$+ \tfrac{1}{4}\cot^2 2N\cot^3 N\,\text{tang}^6\Delta + \text{etc.}$$

Ce sont deux expressions de la différence entre l'hypoténuse et le côté moyen, en fonction de l'hypoténuse et du petit côté.

$$\text{Cos}\,N' = \sin\alpha\sin\Delta\sin h + \cos\Delta\cos h = \sin\alpha\sin\Delta\sin h + \cos N,$$
$$\cos N' - \cos N = 2\sin\tfrac{1}{2}(N-N')\sin\tfrac{1}{2}(N+N') = 2\sin\tfrac{1}{2}x\sin(N-\tfrac{1}{2}x)$$
$$= \sin\alpha\sin\Delta\sin h;$$

développez cette expression, en y substituant les valeurs ci-dessus et celle de $\cot N = \cos\Delta\cot h\sin A$, vous aurez

$$N = N' + \left(\frac{\sin\alpha\sin\Delta}{\sin 1''}\right) + \left(\frac{\cot h}{\sin 2''}\right)\sin\alpha\sin^2\Delta - \left(\frac{\cot^2 h}{\sin 2''}\right)\sin\alpha\sin^3\Delta$$
$$+ \left(\frac{\sin\alpha\sin\Delta}{\sin 1''}\right)\left(\frac{\sin^2 1''}{6}\right)(1 + 3\cot^2 h).$$

136. On peut rapporter les observations directement au complément h de la latitude, par la formule

$$\cos N' = \sin\alpha \sin\Delta \sin h + \cos\Delta \cos h = \sin\alpha \sin\Delta \sin h + \cos h - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta \cos h;$$

d'où

$$h = N' + \left(\frac{\sin\Delta \sin\alpha}{\sin 1''}\right) - \left(\frac{2\cot h}{\sin 1''}\right)\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta \cos^2\alpha - \left(\frac{4\cot^2 h}{\sin 1''}\right)\sin^3\tfrac{1}{2}\Delta \sin\alpha \cos^2\alpha$$
$$+ \left(\frac{\sin\Delta \sin\alpha}{\sin 1''}\right)^3 \left(\frac{\sin^2 1''}{6}\right) + \left(\frac{2\cot^3 h}{\sin 1''}\right)\sin^4\tfrac{1}{2}\Delta + \text{etc.};$$

les $\sin^2\frac{1}{2}\Delta$ suffiront le plus souvent; mais rien de tout cela ne me paraît aussi commode que la première solution, qui n'a aucun terme qui dépende des carrés ni de $\cot h$.

C'est par des formules équivalentes, que MM. Biot et Arago ont vérifié leur latitude à Formentera, et que M. Mathieu, en calculant les observations de la polaire qu'il a faites avec M. Arago, vient de confirmer les résultats précédemment obtenus, pour la hauteur du pôle, à l'Observatoire impérial. Il trouve 48° 50′ 13″,16 par les passages au méridien, et 48° 50′ 12″,76 par les digressions; nous avions trouvé, Méchain et moi, 40° 50′ 13″,25. Voyez la Connaissance des Tems de 1816.

137. On peut, par des moyens analogues, déterminer l'azimut d'un signal, par la plus courte distance à l'étoile polaire. Soit Z le zénit (fig. 109), S le signal, ZS sa distance apparente au zénit, P le pôle, *bac* le parallèle de la polaire, Sa = D la plus courte distance, Sb=D′ une distance observée un peu avant ou après la plus courte.

On conçoit qu'en suivant l'étoile pendant quelque tems, on peut reconnaître à très-peu près quelle est cette plus courte distance Sa; alors on aura approximativement Sa, et SP = Sa + aP = (D + Δ); dans le triangle PZS on aura les trois côtés; on pourra calculer une première valeur de l'azimut PZS et de l'angle horaire ZPS; on connaîtra à fort peu près l'heure de la plus courte distance.

On pourra même, pour une distance quelconque Sb, calculer Zb et bZP, car on suppose connu l'angle bPZ, alors le triangle bZS donnera l'azimut relatif bZS; on en conclura PZS = PZb + bZS; alors dans le triangle PZS on aura ZPS à fort peu près. On aura le tems sidéral du passage par le cercle horaire du signal; on aura donc

très-passablement l'intervalle entre ce passage et une observation quelconque de distance. Pour corriger ces premières déterminations, vous ferez

138. $$\begin{aligned}\cos D' &= \cos Sb = \cos bPS \sin Pb \sin PS + \cos Pb \cos PS\\ &= \cos\alpha \sin\Delta \sin(D+\Delta) + \cos\Delta \cos(D+\Delta)\\ &= \cos\Delta\cos(D+\Delta) + \sin\Delta\sin(D+\Delta) - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\sin\Delta\sin(D+\Delta)\end{aligned}$$

$$\cos D' = \cos D - 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha \sin\Delta \sin(D+\Delta),$$

$$\cos D - \cos D' = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha \sin\Delta \sin(D+\Delta),$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}(D'-D)\sin\tfrac{1}{2}(D'+D) = 2\sin\tfrac{1}{2}u \sin(D+\tfrac{1}{2}u)$$

$$= 2\sin\tfrac{1}{2}u\cos\tfrac{1}{2}u\sin D + 2\sin^2\tfrac{1}{2}u\cos D = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha \sin\Delta \sin(D+\Delta);$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}u\cos\tfrac{1}{2}u + 2\sin^2\tfrac{1}{2}u\cot D = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\sin\Delta\,\frac{\sin(D+\Delta)}{\sin D}$$

$$= \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\sin\Delta(\cos\Delta + \sin\Delta\cot D);$$

$$a = \cot D, \quad b = \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\sin\Delta\cos\Delta + \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha\sin^2\Delta\cot D,$$

$$\begin{aligned}u &= \sin 2\Delta \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha + 2\sin^2\Delta\cot D\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha - 2\cot D\sin^2\Delta\cos^2\Delta\sin^4\tfrac{1}{2}\alpha\\ &\quad - 4\sin^3\Delta\cos\Delta\cot^2 D\sin^4\tfrac{1}{2}\alpha\\ &= \sin 2\Delta\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha + 2\sin^2\Delta\cot D\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha,\end{aligned}$$

car les $\sin^4\tfrac{1}{2}\alpha$ sont insensibles; on aura donc

$$D = D' - u = D' - \frac{\sin 2\Delta\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha}{\sin 1''} - \frac{2\sin^2\Delta\cot D\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha}{\sin 1''};$$

changez le signe du terme $\sin 2\Delta$, et la formule servira pour la plus grande distance, quand l'étoile et le signal seront, l'un à l'est et l'autre à l'ouest du méridien.

La distance Δ et l'angle α peuvent avoir besoin des corrections $d\alpha$ et $d\Delta$; il faudra ajouter à la formule les différentielles du terme principal. On aura ainsi

$$\begin{aligned}D &= D' - \left(\frac{\sin 2\Delta}{\sin 1''}\right)\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha - 2\sin^2\Delta\cot D\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{1}{2}\sin 2\Delta\sin\alpha d\alpha\\ &\quad - 2d\Delta\cos 2\Delta\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha = D' - m\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha - b'd\alpha - c'd\Delta.\end{aligned}$$

L'angle α change de signe au passage par la plus courte ou la plus grande distance; si les angles ont été faits trop petits avant ce passage, ils seront trop grands après. Si les distances prises avant le passage ont donné l'équation

$$D = A' - b'da - c'd\Delta,$$

les

les distances prises après donneront

$$D = A'' + b''d\alpha - c''d\Delta;$$

d'où

$$o = (A''-A') + (b''+b')d\alpha + (c'-c'')d\Delta,$$

et $d\alpha = \frac{(A'-A'')+(c''-c')d\Delta}{(b'+b'')}$; le terme $\frac{(c''-c')d\Delta}{(b'+b'')}$ s'évanouira presqu'entièrement, si l'on compare des observations à égales distances, à peu près avant et après le passage; on aura donc $d\alpha$ assez exactement, mais il n'est pas besoin de le connaître; car en comparant deux équations également distantes, on aura

$$2D = (A'+A'') - (c'+c'')d\Delta, \quad \text{et} \quad D = \tfrac{1}{2}(A'+A'') - \tfrac{1}{2}(c'+c'')d\Delta;$$

pour faire évanouir $d\Delta$, il faudrait comparer des observations également éloignées de la plus courte et de la plus grande distance; mais $d\Delta$ est peu de chose.

139. Ainsi quand on n'aurait aucune idée de l'azimut, il suffirait toujours d'observer une longue série de distances, avant ou après la plus courte ou la plus grande distance, cette série renfermerait tout ce qui serait nécessaire au calcul de l'azimut, et si les résultats partiels offraient des différences un peu sensibles, on ne ferait usage que des observations correspondantes ou qui seraient à peu près à même distance du passage par le cercle horaire du signal.

140. Dans tout ceci nous avons négligé la réfraction qui élève l'étoile; il est aisé d'en tenir compte.

Soit Sb une distance vraie (fig. 110); la réfraction élève l'étoile de b en c, ensorte que $bc = 57''\,\text{tang}\,Zb$; on observe donc réellement

$Sc = D''$ au lieu de $Sb = D'$; mais $\cos Sc = \cos Sbc \sin bc \sin bS + \cos bc \cos bS$,

$$\begin{aligned}\cos D'' &= \cos Sbc \sin(57''\,\text{tang}\,Zb)\sin D' + \cos(57''\,\text{tang}\,Zb)\cos D' \\ &= \cos b \sin 57''\,\text{tang}\,Zb \sin D' + \cos D', \text{ sans erreur sensible,}\end{aligned}$$

$$\cos D'' - \cos D' = 2\sin\tfrac{1}{2}(D'-D'')\sin\tfrac{1}{2}(D'+D'') = \cos b \sin 57''\,\text{tang}\,Zb \sin D',$$

$$\begin{aligned}y = 57''\,\text{tang}\,Zb\cos b &= 57''\,\text{tang}\,Zb\left(\frac{\cos SZ - \cos bS \cos bZ}{\sin bS \sin bZ}\right) \\ &= \frac{57''}{\cos Zb}\left(\frac{\cos ZS}{\sin D'} - \cos bZ \cot D'\right) = \frac{57''\cos ZS}{\sin D' \cos Zb} - 57''\cot D' \\ &= \frac{57''\cos ZS}{\sin D'(\cos P \sin\Delta \sin h + \cos\Delta \cos h)} - 57''\cot D'.\end{aligned}$$

On commencera donc par changer D″ en $D'=D''+y$; cette correction est presque constante, il suffira de la calculer pour l'observation du milieu et pour les deux extrêmes; et l'on aura enfin $D=D''+y-u$. On aura ensuite l'azimut par le triangle ZPS, où l'on connaîtra les trois côtés. Ce triangle, d'ailleurs, donne

$$\sin ZS : \sin ZPS :: \sin PS : \sin PZS, \text{ ou } \sin N : \sin P :: \sin(D+\Delta) : \sin Z,$$
$$\sin N \sin Z = \sin P \sin(D+\Delta),$$
$$dZ \cos Z \sin N = dP \cos P \sin(D+\Delta) + d(D+\Delta)\cos(D+\Delta)\sin P,$$
$$dZ = \frac{dP \cos P \sin(D+\Delta)}{\cos Z \sin N} + \frac{d(D+\Delta)\cos(D+\Delta)\sin P}{\cos Z \sin N},$$

ou

$$dZ = \frac{dP \cos P \sin Z}{\cos Z \sin P} - \frac{d(D+\Delta)\cos(D+\Delta)\sin Z}{\cos Z \sin(D+\Delta)}$$
$$= dP \operatorname{tang} Z \cot P + d(D+\Delta)\operatorname{tang} Z \cot(D+\Delta).$$

On voit que dZ sera peu de chose à cause de tang Z, qui peut toujours être une petite fraction; il suffira pour cela de placer le signal S à peu près dans le premier vertical; il en résulterait encore cet avantage, que $\cot(D+\Delta)$ serait aussi une petite fraction, ainsi que cot P.

Il est visible, au reste, que ces méthodes de corrections ne sont que des généralisations de la méthode des passages, qui donne h et Δ, et de la méthode des hauteurs correspondantes, qui donne les ascensions droites. Il sera toujours plus sûr d'en revenir aux méthodes fondamentales; mais en cas de besoin et faute d'autres moyens, ceux que nous venons d'exposer offrent des ressources utiles.

CHAPITRE XXXVI.

Astronomie Nautique.

1. L'Astronomie donne des moyens certains pour déterminer les latitudes et les longitudes des lieux. Transportez un astronome dans un désert de l'Afrique ou de l'Amérique, ou dans une île au milieu de l'Océan : s'il a ses instrumens et ses tables astronomiques, il aura bientôt connu la position du point qu'il occupe. L'Astronomie donnerait de même aux navigateurs la position de leur vaisseau chaque jour et à chaque instant; et nous n'aurions presque rien à dire de particulier sur l'Astronomie nautique, si l'on pouvait établir un observatoire sur un vaisseau et s'y servir des mêmes instrumens.

2. Mais l'agitation continuelle du bâtiment ne permet l'usage ni du fil à-plomb, ni du niveau; l'astre qu'on amène avec peine dans la lunette en sort presqu'aussitôt, et n'y est jamais fixe : on ne peut donc tirer aucun parti des quarts de cercle, ni des instrumens des passages, ni des pendules astronomiques, ni presque des lunettes. On n'a cependant que les astres pour se diriger et se reconnaître quand on ne voit que le ciel et la mer; il a donc fallu imaginer de nouveaux instrumens pour un observatoire mobile.

3. Les pendules ont été remplacées par les montres marines. Harrison chez les Anglais, F. Berthoud et Leroi chez les Français, fabriquèrent d'abord des horloges dont la marche, une fois réglée dans le port où l'on s'embarquait, conservait assez de régularité, malgré l'agitation du vaisseau, pour donner pendant une longue traversée l'heure du port avec toute l'exactitude nécessaire; ainsi, pour connaître à chaque instant la longitude du vaisseau, il ne restait plus qu'à observer l'heure qu'on y comptait. Ces machines étaient lourdes et embarrassantes. Arnold, Émery, Mudge, L. Berthoud et enfin Bréguet parvinrent en assez peu

de tems à faire des montres de poche au moins aussi exactes que les horloges dont nous venons de parler. Par des compensations ingénieuses, ils ont réussi à corriger les effets de la dilatation; la marche des montres est presque aussi sûre que celle des pendules astronomiques. Bréguet, en renfermant deux mouvemens dans la même boîte, et les régularisant l'un par l'autre, nous donne lieu d'espérer une marche plus indépendante des secousses du navire, ensorte qu'à cet égard les marins n'auraient plus rien à desirer. Harrison, F. Berthoud ont imprimé des descriptions de leurs horloges. Les artistes qui ont fait des montres, n'ont rien écrit sur leur art; ils faisaient même un secret de leurs moyens; on ne pouvait ouvrir les montres qu'ils livrèrent d'abord, ni par conséquent en examiner le mécanisme. Cependant ces moyens sont presque tous connus aujourd'hui, mais il n'entre pas dans notre plan de les exposer ici : l'astronome navigateur n'en a aucun besoin; il n'a qu'à bien déterminer la marche de la montre avant de s'embarquer, et la manière la meilleure est d'y employer les moyens ordinaires, c'est-à-dire les passages au méridien et les hauteurs correspondantes ou absolues.

Nous supposerons donc dans tout ce qui va suivre, que le navigateur connaissait, à l'instant du départ, l'avance ou le retard de sa montre sur le tems moyen, et de combien cette avance ou ce retard augmentait ou diminuait dans un tems donné. En supposant que cette marche continue la même, il sera en état de savoir à tous les instans d'une navigation de plusieurs mois, l'heure que l'on compte en ces instans au lieu de départ; mais comme toute machine a ses irrégularités, il aura soin dans tous les lieux connus où il abordera, de déterminer par des observations précises l'erreur actuelle de sa montre, et de combien la marche diurne aura changé. Avec ces connaissances nouvelles, il pourra rectifier jusqu'à un certain point les longitudes qu'il avait d'abord déterminées sur sa route, dans la supposition d'une régularité constante dans sa montre. Nous n'en dirons pas davantage sur cet objet, et nous renverrons aux voyages de Borda, Fleurieu, Humboldt et de Rossel.

4. L'observation la plus fréquente et la plus facile est celle de la latitude; il suffit de prendre à midi la hauteur du soleil dont on connaît la déclinaison par les tables ou par l'Éphéméride nautique. Pour observer la hauteur du soleil, on se servait anciennement de l'*arbalestrille*, espèce de croix, dont le croisillon, appelé *marteau*, glissait

le long de la pièce la plus longue, qu'on appelait *flèche*. On mettait l'œil au bout de cette flèche; on dirigeait le bout inférieur du croisillon à l'horizon de la mer, et par l'autre bout on visait au soleil. On approchait le marteau de l'œil jusqu'à ce qu'il soutendît exactement l'angle entre le soleil et l'horizon; alors les divisions de la flèche indiquaient la hauteur du soleil. En effet, soit MS le marteau (fig. 111), MO la flèche, OH le rayon visuel dirigé à l'horizon de la mer, OS le rayon visuel dirigé au soleil en L, LOH sera la hauteur du soleil, MOH = MOS la moitié de cette hauteur; on avait MO = MH tang OHM = MH cot MOH = $\frac{1}{2}$ marteau cot $\frac{1}{2}$ hauteur du soleil. Mais comme il était incommode de viser directement au soleil, on plaçait l'œil en H au bas du marteau; on dirigeait le bout O de la flèche à l'horizon : à ce point O était une pièce pour recevoir l'ombre du point S du marteau, et l'on avait de même la hauteur du soleil. Malgré cette amélioration, on conçoit qu'un pareil instrument ne pouvait donner aucune précision; il n'était pas même fort ancien, on n'en trouve aucune mention avant le milieu du quinzième siècle. Cet instrument servait de même à mesurer la distance de deux astres.

5. Il fut remplacé par le quartier anglais, composé de deux arcs de cercle concentriques, mais d'un rayon inégal et dans un même plan. Au centre était une pinnule à travers laquelle on visait à l'horizon de la mer. Au plus grand des deux arcs de cercle, on fixait une pinnule à laquelle on appliquait l'œil. Au petit arc était une troisième pinnule, mais mobile, qu'on haussait ou baissait jusqu'à ce que l'image du soleil qu'elle transmettait à la pinnule centrale, fût réfléchie à la pinnule oculaire, ou que l'ombre de la pinnule supérieure tombât sur le milieu de la pinnule centrale. C'était même pour rendre cette ombre moins diffuse et moins mal terminée, qu'on avait fait l'arc supérieur d'un rayon plus petit que l'arc inférieur. La somme des deux arcs interceptés était la hauteur du soleil; et comme la somme des deux arcs totaux était de 90°, la somme des deux arcs restans était la distance au zénit. Voyez le Traité de Navigation de Bouguer père, p. 100 et suiv.

Ces instrumens sont abandonnés; ils ont été remplacés avec avantage par les instrumens de réflexion dont la première idée est due à Newton.

6. Ce fut Hadley qui le premier les mit en usage, en présentant en 1731, à la Société royale de Londres, un Mémoire où il donnait la description de deux octans.

Imaginez deux rayons CA et CD (fig. 112) enfermant un arc AD de 45°. Au rayon CD est attachée une lunette O. Sur le rayon CA est un miroir *m*R*n*, à moitié étamé, pour réfléchir l'image des objets ; la moitié R*n*, qui est transparente, laisse passer les images directes qui viennent à la lunette, dans la direction HRO.

Autour du centre C tourne une alidade CD avec son vernier; elle porte un autre miroir CM, appelé le *grand miroir*, et qui est parallèle au petit miroir *m*R*n*, quand le vernier marque zéro.

Dans cette position, l'observateur vise avec la lunette à l'horizon H de la mer, et l'aperçoit sur le rayon ORH, à travers la partie non-étamée R*n*. Cet horizon envoie au même instant un autre rayon IC sur le grand miroir qui le réfléchit suivant CR; le petit miroir à son tour le réfléchit suivant RO, car $MCI = RCO$ par la loi de réflexion, et $RCO = ARm = HRn = ICM$.

L'observateur voit donc une double image de l'horizon, l'une directe HRO, et l'autre doublement réfléchie, qui a suivi le chemin ICRO.

7. Donnez un mouvement DE à l'alidade, le miroir CM prendra la position CM′, ensorte que $MCM' = DCE = DE$; la perpendiculaire CL suivra le mouvement de l'alidade, et prendra la position CL′, et l'on aura $L'CL = DCE = DE$. Menez CS, tel que $L'CS = L'CR = LCR + DE$; un rayon SC qui viendrait tomber sur le miroir CM′, ferait donc avec la perpendiculaire LC′ un angle L′CR ; il serait donc réfléchi suivant CR, comme l'était précédemment le rayon IC : donc le point S sera vu dans la lunette sur le rayon OH ; il paraîtra donc à l'horizon. Donc si le soleil est en S, il sera vu à l'horizon, mais sa hauteur sur l'horizon sera $ICS = L'CS - L'CI = L'CR - CL'R = L'CR - (CLR - LCL') = L'CL + LCR - CLR + L'CL = 2L'CL = 2DE$; car par construction, $L'CR = L'CS$, et dans le triangle LCR, on a $LCR = 45° = CLR$; donc la hauteur du soleil est le double du mouvement DE donné à l'alidade pour rencontrer le rayon SC, de manière à le réfléchir dans la lunette; donc, en doublant DE, on aura la hauteur du soleil. Pour plus de simplicité, on a divisé l'arc AD, qui n'est que de 45°, en 90 demi-degrés qui vaudront des degrés. Tous les instrumens de réflexion sont ainsi divisés en demi-degrés qui équivalent à des degrés entiers. Pour juger du contact des images de l'horizon et du soleil, il n'est pas nécessaire que les images restent fixes dans la lunette, il suffit qu'ils la traversent, et le contact se juge au passage.

8. Tel est l'avantage des octans ; mais voulez-vous en général que le rayon IC, après deux réflexions, devienne RO ; il faut que IC soit réfléchi d'abord suivant CR, puis suivant RO. Menez CL qui partage en deux également l'angle ICR ; et pour cela, prenez RL = RC, et menez CL ; par construction, RLC = RCL ; mais, à cause des parallèles, on a RLC = LCI = LCR. Placez le miroir CM perpendiculairement à CL, et le miroir *mRn* parallèle à CM ; l'angle d'incidence ICM = 90° — ICL = 90° — LCR = RCD = ACD = angle de réflexion. Prolongez MC et CR en D et en A, et décrivez AD, ce sera l'arc du secteur qui vous réunira les images du point I de l'horizon, quand son alidade CD sera sur zéro ; car, à raison du parallélisme, le rayon CR fera les mêmes angles sur les deux miroirs.

Donnez à l'alidade un mouvement DE, la perpendiculaire CL deviendra CL′ et LCL′ = DE ; prenez L′CS = L′CR, les rayons SC et CR feront des angles égaux avec la perpendiculaire CL′. Si SC est un rayon incident, CR sera le rayon réfléchi ; et CR tombant sur le petit miroir, comme faisait IC réfléchi, sera réfléchi de même en RO ; ainsi le point S ou l'astre qui est sur le rayon CS, sera vu en R avec H, comme on y voyait I précédemment.

9. La hauteur de l'astre S sera encore h = ICS = 2DE, car la démonstration précédente ne dépend nullement de l'angle ACD, mais seulement de l'angle RCI que nous avions d'abord supposé de 90° ; alors nous avions

$$LCR = \tfrac{1}{2}\,ICL = 45^\circ,\quad ACD = LCD - LCR = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ;$$

ainsi l'arc AD est de 45°, l'instrument prend alors le nom d'*octant*. Mais si nous diminuons l'angle ICR, nous aurons des instrumens d'une plus grande étendue ; ainsi LCD étant toujours un angle droit,

que $\quad ICR = 60^\circ,\quad LCR = 30^\circ,\quad ACD = 60^\circ,$

et vous aurez un sextant qui pourra mesurer des angles de 120° ;

que $\quad ICR = 50,\quad LCR = 25,\quad ACD = 65,$

l'instrument mesurera un angle de 130° ;

que $\quad ICR = 40,\quad LCR = 20,\quad ACD = 70,$

vous pourrez mesurer 140°;

que ICR $= 30$, LCR $= 15$, ACD $= 75$,

vous mesurerez des angles de 150°;

que ICR $= 0$, LCR $= 0$, ACD $= 90$,

vous aurez un quart de cercle qui pourra mesurer 180°.

En général, l'arc ACD $= 90° - \frac{1}{2}$(ICR); et si au lieu d'un quart de cercle qui suffirait à toutes les mesures, vous prenez un cercle entier, par quelque point que vous commenciez, vous pourrez toujours mesurer des angles entre 0 et 180°; vous pourrez successivement promener votre mesure sur toutes les parties du limbe; vous pourrez prendre des angles multiples, avantage que n'ont ni les sextans, ni les octans.

Mais si l'on mettait deux miroirs sur la même ligne pour avoir LCR $= 0$, ils pourraient se gêner l'un l'autre; vous les mettrez sur deux lignes parallèles très-voisines. Ainsi le grand miroir M sera placé au centre sur l'alidade AM (fig. 113), et le petit miroir *m* sera en travers, sur une alilade un peu excentrique qui portera la lunette HO, ensorte que les miroirs seront parallèles quand les deux alidades formeront un angle de 90°. C'est la construction de Borda. (*Description et usage du Cercle de réflexion.* Paris, 1787.)

10. Au lieu de mesurer la hauteur d'un astre, c'est-à-dire la plus courte distance entre l'astre et l'horizon, il est évident qu'on peut de même mesurer la plus courte entre deux astres ou deux objets quelconques; au lieu de diriger la lunette à l'horizon, on la dirigera sur l'un des deux objets. On amènera le plan de l'instrument dans le plan du grand cercle qui passe par les deux objets, et il ne restera plus qu'à tourner l'alidade centrale jusqu'à ce que l'image réfléchie du second objet arrive au centre de la lunette.

Supposons qu'il faille mesurer la distance angulaire entre le soleil et la lune; fixez l'alidade du grand miroir sur zéro, et la lunette étant libre sur le limbe, dirigez-la vers la lune. Quand la lune sera dans la lunette, tenez cette lunette de la main gauche, et de la droite faites tourner l'instrument dans son plan et autour du manche qui lui sert d'axe, jusqu'à ce que l'image du soleil entre dans la lunette, et

s'y

s'y trouve en contact avec la lune; alors fixez la lunette sur le limbe, et mettez en liberté l'alidade du grand miroir.

Faites tourner le cercle autour de l'axe de la lunette dirigée à la lune, l'alidade MA prendra la position MK; l'angle AMS, qui était AML + dist. ☾ au ☉, deviendra KML — dist. ☾ au ☉. Pour ramener le soleil dans la lunette, il faudra donner à l'alidade un mouvement égal à la différence de ces deux angles ou à la double distance de la lune au soleil. Cette alidade était sur zéro; le mouvement qu'elle aura fait marquera donc sur le limbe la distance double de celle qu'on devait mesurer.

Fixez le grand miroir et dégagez la lunette, vous pourrez mesurer de même une double distance qui se comptera du point où l'alidade était arrivée après la première; vous obtiendrez de la même manière les distances quadruples, sextuples, et ainsi de deux en deux.

11. Quand la lune est à droite, l'on commence par tenir l'instrument par le manche, la division regardant le ciel; pour l'observation paire, on renverse l'instrument, le manche en dessus, et la division regardant la terre.

Quand la lune est à gauche, on commence par le manche en dessus pour l'observation impaire; on le tient en dessous pour l'observation paire.

C'est toujours le plus brillant des deux objets qu'on observe par réflexion; on vise directement à l'autre.

12. Pour que deux images du même objet soient en contact, il faut que les miroirs soient parallèles quand les deux alidades sont à angle droit, c'est-à-dire à 180 parties de la division. Mais s'il y a un petit défaut de parallélisme, il ne sera d'aucune conséquence dans les observations doubles; il sera corrigé par le renversement, comme dans tous les instrumens astronomiques. On n'a donc aucune erreur de collimation à craindre ni à calculer. Mais si l'on veut employer le cercle de réflexion à mesurer des angles simples, alors il faut rectifier le parallélisme; on fera coïncider les deux images de l'horizon, en faisant tourner le grand miroir; et c'est du point qu'il marquera pour lors qu'il faudra compter les hauteurs, et non plus du zéro.

13. En général, pour mesurer une hauteur avec un instrument de

réflexion quelconque (fig. 112), il suffit de viser directement à l'horizon, et de faire avancer l'alidade jusqu'à ce que le bord du soleil vienne toucher l'horizon, et l'alidade marquera la hauteur. Ainsi, on n'a plus besoin ni de niveau, ni de fil à plomb; et l'on peut observer malgré le mouvement du vaisseau.

Dès qu'on est arrivé à faire coïncider à peu près les images de l'horizon et du soleil, on fixe l'alidade sur le limbe avec sa vis de pression, et l'on achève avec la vis de rappel. Il faut que le contact se fasse au centre de la lunette. Pour que le centre soit plus libre, on n'y met aucun fil; mais à égale distance du centre, on place deux fils parallèles entre eux et au plan de l'instrument, et c'est au milieu de l'intervalle qu'on opère le contact. On juge assez exactement ce milieu ou la quantité dont les astres en contact ont pu s'en écarter; le calcul corrige ensuite la petite erreur.

14. Les octans et les sextans n'ont pas seulement 45 ou 60°, on ajoute quelques degrés de plus aux extrémités de l'arc pour l'usage du vernier; ainsi les sextans de Throughton, au lieu de s'étendre depuis 0° jusqu'à 120 demi-degrés, vont d'un côté jusqu'à 140, et de l'autre, ils ont 5° par-delà le zéro; ce qui est utile pour déterminer l'erreur de l'instrument quand le parallélisme ne répond pas tout-à-fait au zéro de la division. Ces sextans sont divisés de 10 en 10'; le vernier les soudivise en soixantièmes qui valent 10".

15. Un octant ne pourrait mesurer que des angles de 90° tout au plus, cela suffit pour les hauteurs et non pour les distances. Par un changement léger, on les a rendus propres à mesurer des arcs de 180°, ou à fort peu près. Transportez la lunette en O'R' sur le rayon CA; qu'un second petit miroir soit en $m'R'n'$ perpendiculairement à CD, l'horizon I auquel on tourne le dos vient se peindre en C dans le grand miroir; il est réfléchi en CR, et de là en R'O', car tous les angles de la figure sont de 45 ou de 90°. On voit donc directement l'horizon H' et le point opposé I par réflexion. Ainsi vous ferez coïncider des points qui sont à 180° l'un de l'autre, et vous pourrez mesurer l'angle SCH', qu'un astre auquel vous tournerez le dos fait avec l'horizon H' que vous avez devant vous; vous pourrez mesurer l'angle SCH' de deux astres quelconques S et H'.

16. Dans cette observation *par-derrière*, vous tirez à vous l'alidade

CD de D en E; au lieu que dans l'observatiou *par-devant*, vous éloigniez de vons l'alidade, mais toujours de D vers A.

Pour ce double usage, on place sur l'octant denx petits miroirs à quelque distance l'uu de l'autre, et réciproquement perpendiculaires l'ün à l'autre, sur une pièce de cuivre attachée au rayon CA. Uue même lunette suffit pour les denx geures d'observations; on la visse tantôt au rayou CD, et tantôt au rayon CA.

Nous avons supposé que l'alidade étant sur o, les deux images de l'horizon coïncident : si pour obtenir cette coïncidence, il fallait donner un mouvement à l'alidade, la quantité de ce mouvement serait une erreur constante dont il faudrait corriger les observatious; si le lieu de la coïucidence est en a sur DA, toutes les distauces observées devront être dimiuuées de Da; si la coïncideuce est en a' sur le prolongement de l'arc, la correction sera additive aux distances observées.

17. Ceci suppose encore que l'œil est à la surface de la mer, et que la surface de la mer est plane, rien de tout cela n'est exactement vrai; l'œil est toujours plus ou moins élevé au-dessus de la surface de la mer, et cette surface est courbe; il en résulte que l'horizon de la mer est tonjours à plns de 90° du zéuit. Nous avons vu (XXXV. 110) que la différence de niveau au-dessus de la mer, a pour expression

$$dN = \frac{\frac{1}{2}R\,\text{tang}^2(\delta - 90^\circ)}{(1-n)^2},$$

d'où

$$\text{tang}^2(\delta - 90^\circ) = \frac{2dN(1-n)^2}{R} = \left(\frac{2dN}{R}\right)(1-n)^2.$$

Soit I l'inclinaison de l'horizon de la mer,

$$\text{tang}\,I = \text{tang}(\delta - 90^\circ) = (1-n)\left(\frac{2dN}{R}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0.92124\left(\frac{2dN}{R}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$I = \left(\frac{0.92124}{\sin 45^\circ}\right)\left(\frac{dN}{3271200'}\right)^{\frac{1}{2}}\text{cotang}\,1'' = 148'',68(dN)^{\frac{1}{2}},$$

en négligeant ce qui est insensible.

Si vous exprimez R et dN en mètres, vous aurez

$$I = 106'',51\,(dN)^{\frac{1}{2}}.$$

C'est sur ces deux formules que j'ai calculé les deux tables ci-jointes pour les hauteurs en pieds et pouces, mètres ou centimètres au-dessus de la mer. Supposons donc que la lunette soit exactement à l'horizon de la mer, et le grand miroir un pouce plus haut, l'inclinaison sera 17'',5; il faudra donc pour faire coïncider les images que l'alidade, au lieu de marquer o, soit à droite et en a', ensorte que $Da' = 17'',5$: s'il y avait deux pouces de différence entre les deux miroirs, la correction serait de 24'',7.

Mais supposez l'œil à 24 pieds, l'inclinaison sera de 4' 57'',4 : à cette hauteur, un pied de plus ne fait que 6'',1 de différence; un pouce ne fera que 0'',5. Plus l'œil s'élevera, moins la différence de hauteur des deux miroirs sera sensible; car à 72 pieds, une différence d'un pouce ne produit plus que 0'',33. En tout cas, pour trouver la correction, ce n'est pas la hauteur de l'œil qu'il faut prendre pour argument de la table, mais la hauteur du plus élevé des deux miroirs; ce sera celle du grand miroir dans les octans et les sextans, ce sera celle du petit miroir dans le cercle de Borda.

18. Il suit de là que pour vérifier le parallélisme des miroirs, il faut s'élever le plus qu'on pourra; en effet, plus on s'élève, plus on voit loin, plus l'horizon s'éloigne, moins grand est l'angle qui a pour base la distance des miroirs, et pour sommet le point de l'horizon auquel on vise. On tire la même conséquence de la formule $I^2 = CdN$, d'où $2IdI = Cd(dN)$ et $dI = \frac{Cd(dN)}{2I}$; ainsi plus I est considérable, moins dI sera sensible pour un même changement $d(dN)$ dans la hauteur.

I se retranche de la hauteur observée *par-devant;* il s'ajoute à la distance observée *par-derrière*.

La distance des deux miroirs est de nul effet quand on mesure l'angle entre deux astres, à cause de la distance des astres à la terre, en comparaison de laquelle celle des miroirs n'est qu'un point.

TABLE Ire.

Pour les pieds et les pouces.

Haut. de l'œil.	Inclinaison	Diff.	Haut de l'œil.	Inclinaison	Diff.
0p 0p	0' 0"0	17"5	40p 0p	6' 23"9	4"8
1	0.17.5	7.2	41. 0	6.28.7	4.7
2	0.24.7	5.7	42. 0	6.33.4	4.6
0. 3	0.30.4	4.6	43. 0	6.38.0	4.6
4	0.35.0	4.1	44. 0	6.42.6	4.6
5	0.39.1	3.8	45. 0	6.47.2	4.5
0. 6	0.42.9	3.5	46. 0	6.51.7	4.4
7	0.46.4	3.2	47. 0	6.56.1	4.4
8	0.49.6	3.0	48. 0	7. 0.5	4.4
0. 9	0.52.6	2.8	49. 0	7. 4.9	4.3
10	0.55.4	2.7	50. 0	7. 9.2	4.3
0. 11	0.58.1	2.6	51. 0	7.13.5	4.2
1. 0	1. 0.7	25.1	52. 0	7.17.7	4.2
2. 0	1.25.8	19.3	53. 0	7.21.9	4.1
3. 0	1.45.1	16.3	54. 0	7.26.0	4.1
4. 0	2. 1.4	14.3	55. 0	7.30.1	4.1
5. 0	2.15.7	13.0	56. 0	7.34.2	4.1
6. 0	2.28.7	11.9	57. 0	7.38.3	4.0
7. 0	2.40.6	11.1	58. 0	7.42.3	4.0
8. 0	2.51.7	10.4	59. 0	7.46.3	3.9
9. 0	3. 2.1	9.8	60. 0	7.50.2	3.9
10. 0	3.11.9	9.4	61. 0	7.54.1	3.9
11. 0	3.21.3	9.0	62. 0	7.58.0	3.8
12. 0	3.30.3	8.5	63. 0	8. 1.8	3.8
13. 0	3.38.8	8.3	64. 0	8. 5.6	3.8
14. 0	3.47.1	8.0	65. 0	8. 9.4	3.7
15. 0	3.55.1	7.7	66. 0	8.13.1	3.7
16. 0	4. 2.8	7.5	67. 0	8.16.8	3.7
17. 0	4.10.3	7.2	68. 0	8.20.5	3.7
18. 0	4.17.5	7.1	69. 0	8.24.2	3.6
19. 0	4.24.6	6.9	70. 0	8.27.8	3.6
20. 0	4.31.5	6.7	71. 0	8.31.4	3.6
21. 0	4.38.2	6.5	72. 0	8.35.0	3.6
22. 0	4.44.7	6.4	73. 0	8.38.6	3.5
23. 0	4.51.1	6.3	74. 0	8.42.1	3.5
24. 0	4.57.4	6.1	75. 0	8.45.6	3.5
25. 0	5. 3.5	6.0	76. 0	8.49.1	3.5
26. 0	5. 9.5	5.9	77. 0	8.52.6	3.5
27. 0	5.15.4	5.8	78. 0	8.56.1	3.4
28. 0	5.21.2	5.7	79. 0	8.59.5	3.4
29. 0	5.26.9	5.5	80. 0	9. 2.9	3.4
30. 0	5.32.4	5.6	81. 0	9. 6.3	3.4
31. 0	5.38.0	5.4	82. 0	9. 9.7	3.3
32. 0	5.43.4	5.3	83. 0	9.13.0	3.3
33. 0	5.48.7	5.2	84. 0	9.16.3	3.3
34. 0	5.53.9	5.2	85. 0	9.19.6	3.3
35. 0	5.59.1	5.1	86. 0	9.22.9	3.3
36. 0	6. 4.2	5.0	87. 0	9.26.2	3.2
37. 0	6. 9.2	5.0	88. 0	9.29.4	3.2
38. 0	6.14.2	4.9	89. 0	9.32.6	3.2
39. 0	6.19.1	4.8	90. 0	9.35.8	3.2
40. 0	6.23.9		91. 0	9.39.0	

TABLE II.

Pour les mètres et centimètres.

Haut. de l'œil.	Inclinaison.	Diff.	Haut. de l'œil.	Inclinaison.	Diff.	Haut. de l'œil.	Inclinaison.	Diff.	Haut. de l'œil.	Inclinaison.	Diff.
0m00	0' 0"0		0m52	1' 16"8	1"5	2m20	2' 38"0	1"4	5m04	3' 59"1	1"4
0.01	0.10.6	4"3	0.54	1.18.3	1.4	2.24	2.39.4	1.4	5.10	4. 0.5	1.4
0.02	0.14.9	3.5	0.56	1.19.7	1.4	2.28	2.40.8	1.4	5.16	4. 1.9	1.4
0.03	0.18.4	2.9	0.58	1.21.1	1.4	2.32	2.42.2	1.4	5.22	4. 3.3	1.4
0.04	0.21.3	2.5	0.60	1.22.5	1.4	2.36	2.43.6	1.4	5.28	4. 4.7	1.9
0.05	0.23.8	2.3	0.62	1.23.9	1.3	2.40	2.45.0	1.4	5.36	4. 6.6	1.8
0.06	0.26.1	2.1	0.64	1.25.2	1.3	2.44	2.46.4	1.4	5.44	4. 8.4	1.8
0.07	0.28.2	2.0	0.66	1.26.5	1.3	2.48	2.47.8	1.3	5.52	4.10.2	1.8
0.08	0.30.2	1.8	0.68	1.27.8	1.3	2.52	2.49.1	1.3	5.60	4.12.0	1.8
0.09	0.32.0	1.7	0.70	1.29.1	1.3	2.56	2.50.4	1.3	5.68	4.13.8	1.8
0.10	0.33.7	1.6	0.72	1.30.4	1.2	2.60	2.51.7	1.3	5.76	4.15.6	1.8
0.11	0.35.3	1.6	0.74	1.31.6	1.2	2.64	2.53.0	2.0	5.84	4.17.4	1.8
0.12	0.36.9	1.5	0.76	1.32.8	1.2	2.70	2.55.0	1.9	5.92	4.19.2	1.7
0.13	0.38.4	1.4	0.78	1.34.0	1.2	2.76	2.56.9	1.9	6.00	4.20.9	1.7
0.14	0.39.8	1.4	0.80	1.35.2	1.2	2.82	2.58.8	1.9	6.08	4.22.6	1.7
0.15	0.41.2	1.4	0.82	1.36.4	1.2	2.88	3. 0.7	1.9	6.16	4.24.3	1.7
0.16	0.42.6	1.3	0.84	1.37.6	1.2	2.94	3. 2.6	1.9	6.24	4.26.0	1.7
0.17	0.43.9	1.3	0.86	1.38.8	1.2	3.00	3. 4.5	1.8	6.32	4.27.7	1.7
0.18	0.45.2	1.2	0.88	1.40.0	2.2	3.06	3. 6.3	1.8	6.40	4.29.4	1.7
0.19	0.46.4	1.2	0.92	1.42.2	2.2	3.12	3. 8.1	1.8	6.48	4.31.1	1.7
0.20	0.47.6	1.2	0.96	1.44.4	2.1	3.18	3. 9.9	1.8	6.56	4.32.8	1.7
0.21	0.48.8	1.2	1.00	1.46.5	2.1	3.24	3.11.7	1.8	6.64	4.34.5	1.6
0.22	0.50.0	1.1	1.04	1.48.6	2.1	3.30	3.13.5	1.8	6.72	4.36.1	1.6
0.23	0.51.1	1.1	1.08	1.50.7	2.0	3.36	3.15.3	1.7	6.80	4.37.7	1.6
0.24	0.52.2	1.1	1.12	1.52.7	2.0	3.42	3.17.0	1.7	6.88	4.39.3	1.6
0.25	0.53.3	1.1	1.16	1.54.7	2.0	3.48	3.18.7	1.7	6.96	4.40.9	1.6
0.26	0.54.4	1.0	1.20	1.56.7	1.9	3.54	3.20.4	1.7	7.04	4.42.5	1.6
0.27	0.55.4	1.0	1.24	1.58.6	1.9	3.60	3.22.1	1.7	7.12	4.44.1	1.6
0.28	0.56.4	1.0	1.28	2. 0.5	1.9	3.66	3.23.8	1.7	7.20	4.45.7	1.6
0.29	0.57.4	1.0	1.32	2. 2.4	1.8	3.72	3.25.5	1.6	7.28	4.47.3	1.6
0.30	0.58.4	1.0	1.36	2. 4.2	1.8	3.78	3.27.1	1.6	7.36	4.48.9	1.6
0.31	0.59.4	0.9	1.40	2. 6.0	1.8	3.84	3.28.7	1.6	7.44	4.50.5	1.6
0.32	1. 0.3	0.9	1.44	2. 7.8	1.8	3.90	3.30.3	1.6	7.52	4.52.1	1.6
0.33	1. 1.2	0.9	1.48	2. 9.6	1.7	3.96	3.31.9	1.6	7.60	4.53.7	1.5
0.34	1. 2.1	0.9	1.52	2.11.3	1.7	4.02	3.33.5	1.6	7.68	4.55.2	1.5
0.35	1. 3.0	0.9	1.56	2.13.0	1.7	4.08	3.35.1	1.6	7.76	4.56.7	1.5
0.36	1. 3.9	0.9	1.60	2.14.7	1.7	4.14	3.36.7	1.6	7.84	4.58.2	1.5
0.37	1. 4.8	0.9	1.64	2.16.4	1.7	4.20	3.38.3	1.6	7.92	4.59.7	1.5
0.38	1. 5.7	0.9	1.68	2.18.1	1.6	4.26	3.39.9	1.5	8.00	5. 1.2	1.5
0.39	1. 6.6	0.8	1.72	2.19.7	1.6	4.32	3.41.4	1.5	8.08	5. 2.7	1.5
0.40	1. 7.4	0.8	1.76	2.21.3	1.6	4.38	3.42.9	1.5	8.16	5. 4.2	1.5
0.41	1. 8.2	0.8	1.80	2.22.9	1.6	4.44	3.44.4	1.5	8.24	5. 5.7	1.5
0.42	1. 9.0	0.8	1.84	2.24.5	1.6	4.50	3.45.9	1.5	8.32	5. 7.2	1.5
0.43	1. 9.8	0.8	1.88	2.26.1	1.5	4.56	3.47.4	1.5	8.40	5. 8.7	1.5
0.44	1.10.6	0.8	1.92	2.27.6	1.5	4.62	3.48.9	1.5	8.48	5.10.2	1.5
0.45	1.11.4	0.8	1.96	2.29.1	1.5	4.68	3.50.4	1.5	8.56	5.11.7	1.5
0.46	1.12.2	0.8	2.00	2.30.6	1.5	4.74	3.51.9	1.4	8.64	5.13.2	1.4
0.47	1.13.0	0.8	2.04	2.32.1	1.5	4.80	3.53.3	1.5	8.72	5.14.6	1.4
0.48	1.13.8	0.8	2.08	2.33.6	1.5	4.86	3.54.8	1.4	8.80	5.16.0	1.4
0.49	1.14.6	0.7	2.12	2.35.1	1.5	4.92	3.56.3	1.5	8.88	5.17.4	1.4
0.50	1.15.3	1.5	2.16	2.36.6	1.4	4.98	3.57.7	1.4	8.96	5.18.8	1.4
0.52	1.16.8		2.20	2.38.0		5.04	3.59.1		9.04	5.20.2	

SUITE DE LA TABLE II.

Pour les mètres et centimètres.

Haut. de l'œil.	Incli-naison.	Diff.	Haut. de l'œil.	Incli-naison.	Diff.	Haut. de l'œil.	Incli-naison.	Diff.	Haut. de l'œil.	Incli-naison.	Diff.	Haut. de l'œil.	Incli-naison.	Diff.
9m04	5' 20" 2	1"8	14m16	6' 40" 7	1"7	20m66	8' 4.1	1"6	28m64	9' 29" 9	1"8	38m46	11' 0" 5	1"7
9.14	5.22.0	1.8	14.28	6.42.4	1.7	20.80	8. 5.7	1.6	28.82	9.31.7	1.8	38.66	11. 2.2	1.7
9.24	5.23.8	1.8	14.40	6.44.1	1.7	20.94	8. 7.3	1.6	29. 0	9.33.5	1.8	38.86	11. 3.9	1.7
9.34	5.25.6	1.7	14.52	6.45.8	1.7	21.08	8. 8.9	1.6	29.18	9.35.3	1.8	39.06	11. 5.6	1.7
9.44	5.27.3	1.7	14.64	6.47.5	1.7	21.22	8.10.5	1.6	29.36	9.37.1	1.8	39.26	11. 7.3	1.7
9.54	5.29.0	1.7	14.76	6.49.2	1.7	21.36	8.12.1	1.6	29.54	9.38.9	1.8	39.46	11. 9.0	1.7
9.64	5.30.7	1.7	14.88	6.50.9	1.7	21.50	8.13.7	1.6	29.72	9.40.7	1.8	39.66	11.10.7	1.7
9.74	5.32.4	1.7	15.00	6.52.6	1.7	21.64	8.15.3	1.6	29.90	9.42.5	1.8	39.86	11.12.4	1.7
9.84	5.34.1	1.7	15.12	6.54.2	1.6	21.78	8.16.9	1.6	30.08	9.44.3	1.7	40.06	11.14.1	1.7
9.94	5.35.8	1.7	15.24	6.55.8	1.6	21.92	8.18.5	1.6	30.26	9.46.0	1.7	40.26	11.15.8	1.9
10.04	5.37.5	1.7	15.36	6.57.4	1.6	22.06	8.20.1	1.6	30.44	9.47.7	1.7	40.48	11.17.7	1.8
10.14	5.39.2	1.7	15.48	6.59.0	1.6	22.20	8.21.7	1.6	30.62	9.49.4	1.7	40.70	11.19.5	1.8
10.24	5.40.9	1.7	15.60	7. 0.6	1.6	22.34	8.23.3	1.6	30.80	9.51.1	1.7	40.92	11.21.3	1.8
10.34	5.42.6	1.6	15.72	7. 2.2	1.6	22.48	8.24.9	1.6	30.98	9.52.8	1.7	41.14	11.23.1	1.8
10.44	5.44.2	1.6	15.84	7. 3.8	1.6	22.62	8.26.5	1.6	31.16	9.54.5	1.7	41.36	11.24.9	1.8
10.54	5.45.8	1.6	15.96	7. 5.4	1.6	22.76	8.28.1	1.6	31.34	9.56.2	1.7	41.58	11.26.7	1.8
10.64	5.47.4	1.6	16.08	7. 7.0	1.6	22.90	8.29.7	1.6	31.52	9.57.9	1.7	41.80	11.28.5	1.8
10.74	5.49.0	1.6	16.20	7. 8.6	1.6	23.04	8.31.3	1.6	31.70	9.59.6	1.7	42.02	11.30.3	1.8
10.84	5.50.6	1.6	16.32	7.10.2	1.6	23.18	8.32.9	1.5	31.88	10. 1.3	1.7	42.24	11.32.1	1.8
10.94	5.52.2	1.6	16.44	7.11.8	1.6	23.32	8.34.4	1.5	32.06	10. 3.0	1.9	42.46	11.33.9	1.8
11.04	5.53.8	1.6	16.56	7.13.4	1.6	23.46	8.35.9	1.5	32.26	10. 4.9	1.9	42.68	11.35.7	1.8
11.14	5.55.4	1.6	16.68	7.15.0	1.6	23.60	8.37.4	1.8	32.46	10. 6.8	1.9	42.90	11.37.5	1.8
11.24	5.57.0	1.6	16.80	7.16.6	1.6	23.76	8.39.2	1.8	32.66	10. 8.7	1.9	43.12	11.39.3	1.8
11.34	5.58.6	1.6	16.92	7.18.2	1.6	23.92	8.41.0	1.7	32.86	10.10.6	1.9	43.34	11.41.1	1.8
11.44	6. 0.2	1.6	17.04	7.19.8	1.5	24.08	8.42.7	1.7	33.06	10.12.5	1.8	43.56	11.42.9	1.8
11.54	6. 1.8	1.6	17.16	7.21.3	1.5	24.24	8.44.4	1.7	33.26	10.14.3	1.8	43.78	11.44.7	1.8
11.64	6. 3.4	1.6	17.28	7.22.8	1.5	24.40	8.46.1	1.7	33.46	10.16.1	1.8	44.00	11.46.5	1.8
11.74	6. 5.0	1.6	17.40	7.24.3	1.5	24.56	8.47.8	1.7	33.66	10.17.9	1.8	44.22	11.48.3	1.8
11.84	6. 6.6	1.5	17.52	7.25.8	1.5	24.72	8.49.5	1.7	33.86	10.19.7	1.8	44.44	11.50.1	1.8
11.94	6. 8.1	1.5	17.64	7.27.3	1.5	24.88	8.51.2	1.7	34.06	10.21.5	1.8	44.66	11.51.9	1.8
12.04	6. 9.6	1.5	17.76	7.28.8	1.5	25.04	8.52.9	1.7	34.26	10.23.3	1.8	44.88	11.53.7	1.7
12.14	6.11.1	1.5	17.88	7.30.3	1.5	25.20	8.54.6	1.7	33.46	10.25.1	1.8	45.10	11.55.4	1.7
12.24	6.12.6	1.5	18.00	7.31.8	1.8	25.36	8.56.3	1.7	33.66	10.26.9	1.8	45.32	11.57.1	1.7
12.34	6.14.1	1.5	18.14	7.33.6	1.8	25.52	8.58.0	1.7	34.86	10.28.7	1.8	45.54	11.58.8	1.7
12.44	6.15.6	1.5	18.28	7.35.4	1.8	25.68	8.59.7	1.7	35.06	10.30.5	1.8	45.76	12. 0.5	1.7
12.54	6.17.1	1.5	18.42	7.37.2	1.7	25.84	9. 1.4	1.7	35.26	10.32.3	1.8	45.98	12. 2.2	1.7
12.64	6.18.6	1.5	18.56	7.38.9	1.7	26.00	9. 3.1	1.7	35.46	10.34.1	1.8	46.20	12. 3.9	1.7
12.74	6.20.1	1.5	18.70	7.40.6	1.7	26.16	9. 4.8	1.6	35.66	10.35.9	1.8	46.42	12. 5.6	1.7
12.84	6.21.6	1.5	18.84	7.42.3	1.7	26.32	9. 6.4	1.6	35.86	10.37.7	1.8	46.64	12. 7.3	1.7
12.94	6.23.1	1.5	18.98	7.44.0	1.7	26.48	9. 8.0	1.9	36.06	10.39.5	1.8	46.86	12. 9.0	1.7
13.04	6.24.6	1.5	19.12	7.45.7	1.7	26.66	9. 9.9	1.9	36.26	10.41.3	1.8	47.08	12.10.7	1.7
13.14	6.26.1	1.5	19.26	7.47.4	1.7	26.84	9.11.8	1.9	36.46	10.43.1	1.8	47.30	12.12.4	1.7
13.24	6.27.6	1.5	19.40	7.49.1	1.7	27.02	9.13.7	1.8	36.66	10.44.9	1.8	47.52	12.14.1	1.7
13.34	6.29.1	1.4	19.54	7.50.8	1.7	27.20	9.15.5	1.8	36.86	10.46.7	1.8	47.74	12.15.8	1.7
13.44	6.30.5	1.4	19.68	7.52.5	1.7	27.38	9.17.3	1.8	37.06	10.48.5	1.8	47.96	12.17.5	1.7
13.54	6.31.9	1.4	19.82	7.54.2	1.7	27.56	9.19.1	1.8	37.26	10.50.3	1.7	48.18	12.19.2	1.7
13.64	6.33.3	1.4	19.96	7.55.9	1.7	27.74	9.20.9	1.8	37.46	10.52.0	1.7	48.40	12.20.9	1.7
13.74	6.34.7	1.4	20.10	7.57.6	1.7	27.92	9.22.7	1.8	37.66	10.53.7	1.7	48.62	12.22.6	1.7
13.84	6.36.1	1.4	20.24	7.59.3	1.6	28.10	9.24.5	1.8	37.86	10.55.4	1.7	48.84	12.24.3	1.7
13.94	6.37.5	1.4	20.38	8. 0.9	1.6	28.28	9.26.3	1.8	38.06	10.57.1	1.7	49.06	12.26.0	
14.04	6.38.9	1.8	20.52	8. 2.5	1.6	28.46	9.28.1	1.8	38.26	10.58.8	1.7			
14.16	6.40.7		20.66	8. 4.1		28.64	9.29.9		38.46	11. 0.5				

19. Si le contact des deux images n'a pu se faire à égale distance entre les deux fils, on tâche d'estimer au moins de combien il s'est fait plus près d'un fil que de l'autre; et comme on connait la distance des deux fils, on en conclut la quantité de la *déviation*, c'est-à-dire la distance entre le point de contact et le centre de la lunette.

Pour corriger l'erreur qui en résulte, soit BC (fig. 114) le plan de l'instrument, EC = FB la déviation ou la hauteur du contact au-dessus du plan; CB sera l'angle marqué par le limbe, EF la véritable distance. Abaissons l'arc PG perpendiculaire sur le milieu de FE,

$$\sin EG = \sin\tfrac{1}{2}EF = \sin PE \sin\tfrac{1}{2}BC \quad \text{ou} \quad \sin\tfrac{1}{2}(A - dA) = \cos D \sin\tfrac{1}{2}A$$
$$\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}dA - \cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}dA = \sin\tfrac{1}{2}A - 2\sin^2\tfrac{1}{2}D\sin\tfrac{1}{2}A$$
$$\sin\tfrac{1}{2}A - 2\sin^2\tfrac{1}{4}dA\sin\tfrac{1}{2}A - \cos\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}dA = \sin\tfrac{1}{2}A - 2\sin^2\tfrac{1}{2}D\sin\tfrac{1}{2}A$$
$$\sin\tfrac{1}{2}dA + 2\sin^2\tfrac{1}{4}dA\,\text{tang}\tfrac{1}{2}A = 2\sin^2\tfrac{1}{2}D\,\text{tang}\tfrac{1}{2}A$$
$$\sin\tfrac{1}{2}dA = 2\sin^2\tfrac{1}{2}D\,\text{tang}\tfrac{1}{2}A - 2\sin^2\tfrac{1}{4}dA\,\text{tang}\tfrac{1}{2}A$$
$$\sin\tfrac{1}{2}dA = (2\sin^2\tfrac{1}{2}D - 2\sin^2\tfrac{1}{4}dA)\,\text{tang}\tfrac{1}{2}A$$
$$= 2\,\text{tang}\tfrac{1}{2}A\sin\tfrac{1}{2}(D - \tfrac{1}{2}dA)\sin\tfrac{1}{2}(D + \tfrac{1}{2}dA)\ldots\ldots \quad (F)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}dA = 2\sin^2\tfrac{1}{2}D\,\text{tang}\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}(4\sin^4\tfrac{1}{2}D\,\text{tang}^2\tfrac{1}{2}A)\,\text{tang}\tfrac{1}{2}A$$
$$= 2\sin^2\tfrac{1}{2}D\,\text{tang}\tfrac{1}{2}A - 2\sin^4\tfrac{1}{2}D\,\text{tang}^3\tfrac{1}{2}A$$
$$= 2\sin^2\tfrac{1}{2}D\,\text{tang}\tfrac{1}{2}A(1 - \sin^2\tfrac{1}{2}D\,\text{tang}^2\tfrac{1}{2}A).$$

Cette formule servirait généralement à corriger les arcs mesurés avec un instrument dont la lunette ne serait pas parfaitement parallèle au plan du limbe; D serait la déviation, ou, ce qui revient au même, l'inclinaison de l'axe optique de la lunette. Mais si l'instrument avait deux lunettes, comme le cercle de Borda, et que chacune des deux lunettes eût son inclinaison particulière H et h; alors la formule de correction serait la même que celle qu'on emploie pour réduire à l'horizon les angles observés dans des plans inclinés (XXXV. 56).

La formule $dA = \frac{4\sin^2\frac{1}{2}D\,\text{tang}\frac{1}{2}A}{\sin 1''}(1 - \sin^2\tfrac{1}{2}D\,\text{tang}^2\tfrac{1}{2}A)$ sera suffisante jusqu'à 169°. Si A ne passe pas 130°, le premier terme suffira toujours, du moins tant que D ne passera pas 1°.

On trouve des tables de cette correction dans tous les livres de navigation. On peut calculer cette correction par les différences logarithmiques, ainsi qu'on va voir.

Soit

D = 2°, A = 120°, $\frac{1}{2}$A = 60, compl. ar. log cos(D = 2°)... 0.0002645;
doublez et ajoutez un zéro............ 52900.

Cherchez la différence logarithmique de sin $\frac{1}{2}A = 60°$ pour 10″, vous trouverez 121 ou 122. Supposons 121,5,

$$\frac{52900}{121.5} = \frac{105800}{243} = \frac{11755}{27} = \frac{3918}{9} = 435'',37 = 7'\ 15'',37.$$

La table de M. Mendoza donne 7′ 16″ à retrancher de l'arc observé 120°. La formule finie (F) ne donne que 7′.14.″,87.

20. Pour les observations de hauteurs, il faudrait que l'horizon fût bien net, et il est souvent embrumé; c'est ce qui a fait imaginer les horizons artificiels, qui sont d'ailleurs indispensables pour les observations qu'on fait à terre; car alors on n'a plus d'horizon naturel sur lequel on puisse compter.

Ces horizons artificiels sont des miroirs dont les surfaces sont parfaitement planes et parallèles. On les place dans une position bien horizontale, en avant de l'instrument et dans le vertical de l'astre.

L'astre A (fig. 115), en même tems qu'il envoie un rayon Ac au centre de l'instrument, envoie un rayon Ab au miroir horizontal; ce rayon se réfléchit suivant bc, et fait voir l'astre en A′. Il est évident que l'angle AbA' est le double de la hauteur de l'astre, $AcA' = AbA' - bAc$; ainsi la double hauteur $AbA' = AcA' + bAc$, hauteur $= \frac{\text{hauteur observée} + bAc}{2} = \frac{1}{2}$ angle observé $+ \frac{1}{2}bAc$. Ce petit terme est insensible; ainsi, quand on a fait coïncider les deux images de l'astre, on a le double de la hauteur.

21. Ces horizons, fort bons sur terre, ne seraient d'aucun usage sur un vaisseau qui est toujours en mouvement. Robertson, au premier volume de ses *Élémens de Navigation*, pag. 524, parle d'une toupie imaginée par Serson, et perfectionnée par Smeaton. Serson avait remarqué qu'une toupie, animée d'un mouvement rapide de rotation, conserve la situation verticale malgré le mouvement du plan qui la supporte. La toupie de Serson avait un miroir plan à sa surface supérieure; la pointe inférieure de l'axe était placée dans une coquille où elle pouvait tourner sans changer de place.

La toupie de Smeaton est un miroir de métal bien poli, de $3\frac{1}{2}$ pouces de diamètre, enchâssé dans une bordure de cuivre, et le tout est disposé de manière que le centre de gravité est très-voisin de la pointe de l'axe d'acier autour duquel tourne la toupie. La coquille était d'une agate polie

polie, placée sur un petit pilier, au fond d'un vase garni d'un couvercle de verre à surfaces bien parallèles. La toupie une fois montée, peut tourner 12 ou 15'. Si l'observation devait durer davantage, il faudrait interrompre pour la remonter. Cette toupie coûte cinq guinées.

22. Tels sont les instrumens qu'on a imaginés pour l'Astronomie nautique ; il en est d'autres qui sont destinés aux opérations du pilotage. L'un des principaux est la boussole qui sert à diriger la route du vaisseau, et à faire que cette route coupe sous un angle constant tous les méridiens qu'elle traverse. On a donné le nom de *Loxodromie* à la courbe que décrit ainsi le vaisseau. La boussole est composée d'une aiguille aimantée posée en équilibre sur une pointe d'agate ; elle porte un cercle découpé qui présente 32 pointes par lesquelles la circonférence est divisée en 32 parties égales appelées *rumbs*. Le cercle s'appelle *rose des vents*. Les quatre pointes principales désignent les points cardinaux de l'horizon, le Nord, l'Est, le Sud et l'Ouest. Quatre pointes intermédiaires portent les noms composés de *nord-ouest*, *nord-est*, *sud-est* et *sud-ouest*. Ces huit rumbs divisent la circonférence en autant d'arcs de 45° que l'on partage en arcs de 22° $\frac{1}{2}$, et ces nouveaux points ont les noms de composition ternaire N.N.E, N.N.O, S.S.E, S.S.O, E.S.E, E.N.E, O.S.O, O.N.O ; enfin ces 16 arcs, divisés chacun en deux également, ont les dénominations N.$\frac{1}{4}$N.E, N.$\frac{1}{4}$N.O, etc.

Tout cela est assez incommode et surtout d'une exactitude bien médiocre; mais les marins y sont accoutumés et s'en contentent. Ces divisions ont du moins l'avantage de frapper aisément les yeux. Rien n'empêche au reste qu'à cette division on n'ajoute celle de 360°, qui serait utile surtout pour observer la déclinaison de la boussole ; pour cela, il suffit d'examiner à quel rumb ou à quel degré correspond le soleil levant ou couchant. On calcule l'azimut, et la différence entre ce calcul et l'observation est la déclinaison de l'aiguille aimantée ou l'angle qu'elle fait avec le méridien. Cet angle varie suivant le point où se trouve le vaisseau ; il varie avec le tems et même aux diverses heures du jour.

23. L'angle que la route fait avec le méridien est donc toujours connu par la boussole ; il ne reste qu'à mesurer la longueur absolue du chemin parcouru pour en conclure par le calcul d'un triangle rectangle, les changemens de longitude et de latitude. La base du triangle est à fort peu près le chemin fait sur le méridien. Si l'on considère la route

AB comme une ligne droite, $AB \cos A = AD$ sera un peu plus grand que le changement en latitude; car (fig. 116)

$$DE = \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} P \sin 2PB - \tfrac{1}{2} \text{tang}^4 \tfrac{1}{2} P \sin 4PB.$$

On néglige cette différence; $BD = AB \sin A$ est au contraire plus petit que l'arc $BE = P \sin PB$; $P = \frac{BE}{\sin PB} = \frac{AB \sin A}{\sin PB}$; AD et BD sont ainsi connus en toises; on les change en minutes et secondes de degré par les formules (XXXV. 84 et 93). Si AB est trop grand pour être considéré comme une ligne droite, on le partage en deux ou trois parties que l'on emploie séparément à trouver les changemens partiels de la longitude et de la latitude.

24. Il ne reste donc plus qu'à trouver le moyen de mesurer AB; c'est dans cette vue qu'on a imaginé le loch (fig. 117).

ABC est un morceau de bois qui a la figure d'un triangle isoscèle; au milieu de sa base est un poids P, qui fait que tout le système s'enfonce dans l'eau jusqu'à son sommet B; en B est une longue corde BG à laquelle se réunit une corde beaucoup plus courte CF, qui fait que BF demeure presque parallèle à la surface de la mer. On jette la machine à l'eau; elle s'y enfonce, et y reste sensiblement immobile; car à mesure que le vaisseau s'éloigne, on lâche la corde EG. Cette corde est divisée de distance en distance par des nœnds. On compte le nombre des nœuds qui passent en 30″, en une ou plusieurs minutes, et l'on a la vitesse du vaisseau, ou son chemin en un tems donné; on en conclut le chemin en un tems quelconque. On réitère l'expérience plusieurs fois par jour, et chaque fois qu'on a lieu de craindre que la vitesse n'ait changé.

Pour compter ces nœnds, on a une ampoulette formée de deux cônes de verre opposés par le sommet (fig. 118); quand l'ampoulette a été un certain tems sur sa base AB, tout le sable qu'elle renferme est tombé dans le cône inférieur. On retourne l'ampoulette sur la base opposée DE, à l'instant où passe le premier nœud; le sable commence à couler dans le cône DE, et cet écoulement dure 30″. Tel est l'instrument des pilotes. Mais aujourd'hui que les montres à secondes sont plus communes, on obtiendrait plus de précision, en comptant à la montre le nombre de secondes qui répondent à un certain nombre de

nœuds; on pourrait prolonger l'expérience un peu plus long-tems, et elle serait moins inexacte.

25. Cette manière de mesurer, ou plutôt de conjecturer la route du vaisseau, s'appelle *estime;* on sent combien elle doit être incertaine; elle a besoin d'être sans cesse corrigée par des méthodes moins défectueuses; elle fournit au moins des données indispensables pour procéder à des calculs moins grossiers.

On suppose que le loch reste immobile à l'endroit où il est tombé; mais s'il est dans un courant, on ne peut avoir que la vitesse relative du vaisseau, car on n'a aucun moyen de mesurer la vitesse, ni la direction du courant.

On suppose que le vaisseau suit toujours un même rumb, mais le vent le fait *dériver* à droite ou à gauche, d'une quantité difficile à estimer : c'est la matière d'un problème qui n'a pas encore été bien résolu. Mais notre plan n'étant pas de faire un Traité de Navigation, nous allons revenir à ce qui constitue plus particulièrement l'Astronomie nautique.

26. Tous les jours, à midi, on prend la hauteur du soleil pour en conclure la latitude; on corrige cette hauteur de l'erreur de l'instrument, de l'inclinaison de l'horizon de la mer, de la réfraction, de la parallaxe, et enfin du demi-diamètre du soleil. On prend dans une Éphéméride, la déclinaison du soleil pour l'instant de l'observation, ce qui suppose une connaissance approchée de la longitude. Soit D cette déclinaison, A la hauteur corrigée, E la hauteur de l'équateur, on a $E+D=A$ et $E=90°-H=A-D$, $H=90°+D-A$. On fait D négatif quand la déclinaison est australe; et si H tiré de cette formule est négatif, c'est que le vaisseau est dans l'hémisphère austral.

27. On pourrait déterminer la latitude par les hauteurs des étoiles, on n'aurait alors aucun besoin de la longitude du vaisseau; mais les marins ont trouvé l'observation moins précise, par la difficulté de distinguer dans la nuit l'horizon de la mer. Cependant La Caille pense qu'on peut en prendre l'habitude, *si l'on a soin de tenir l'œil dans une obscurité parfaite pendant quelques minutes avant l'observation.* Si ce moyen lui a réussi, c'est probablement par l'habitude qu'il avait contractée de tenir fermé l'œil qu'il réservait pour l'observation; il lisait, il écrivait avec l'autre, rarement il éclairait sa lunette; il avait peint

en noir les murs de son observatoire. Aucun autre astronome, que je sache, n'a su se former à une pratique aussi difficile.

28. On détermine encore la latitude par les hauteurs circomméridiennes, et l'on corrige les observations, comme celles que l'on fait à terre avec le cercle de Borda, auquel on substitue le cercle de réflexion, le sextant ou l'octant; mais, outre les corrections ordinaires, on aurait encore à tenir compte du changement de latitude qui se porte tout entier sur la hauteur. Quand la brume empêche d'observer le soleil au méridien, on y supplée par des moyens plus longs, moins directs et moins sûrs, dont nous parlerons bientôt.

29. L'observation la plus habituelle, après celle de la latitude, est celle qu'on fait pour avoir l'heure du vaisseau par les hauteurs observées, autant qu'on le peut, dans le voisinage du premier vertical; à la réserve de la correction due à l'inclinaison de l'horizon de la mer, les calculs sont tous semblables à ceux qu'on ferait à terre.

30. Mais l'observation la plus compliquée, la plus longue à réduire et à calculer, est celle des distances de la lune au soleil ou aux étoiles pour en conclure la longitude du vaisseau.

La différence de longitude est en général l'arc de l'équateur compris entre les méridiens de deux lieux terrestres, l'angle au pôle entre ces deux méridiens, ou enfin la différence des tems que l'on compte au même instant dans les deux lieux, puisque cette différence est toujours un quinzième de l'angle au pôle. Nous venons de voir comment on trouve l'heure du vaisseau; il ne reste plus qu'à savoir quelle heure on compte sous un méridien connu, tel que celui de Paris, de Brest, ou celui du lieu où l'on s'est embarqué. Les montres marines donneraient la solution la plus commode, si l'on pouvait compter sur une régularité parfaite dans leurs mouvemens. Mais on ne connaît jamais bien rigoureusement la marche de ces machines, l'erreur s'accumule journellement; et d'ailleurs cette marche est exposée à changer par les variations de température, par les mouvemens irréguliers du vaisseau, et peut-être par d'autres causes qu'on ne peut ni prévoir, ni calculer. Il faut donc recourir aux mouvemens célestes.

31. Pour connaître l'heure de Paris ou d'un méridien connu, on aurait les éclipses de soleil, de lune ou d'étoiles; mais elles sont si rares, qu'elles seraient d'un médiocre secours. Les satellites de Jupiter

s'éclipsent presque tous les jours; il ne faut pourtant pas compter deux mois environ chaque année, où Jupiter et ses satellites sont invisibles, parce qu'ils sont trop voisins du soleil. D'ailleurs le mouvement continuel du vaisseau fait à chaque instant sortir Jupiter hors de la lunette; et pour ces observations, on a besoin que la lunette soit stable; et, même à terre, elles ne réussissent que médiocrement, pour peu que le vent agite la lunette. On a fait jusqu'ici des efforts inutiles pour garantir l'observateur ou l'observation des mouvemens du vaisseau; il faut donc un phénomène que l'on puisse observer avec les instrumens de réflexion que nous avons décrits. Il faut un astre dont le mouvement soit rapide et assez bien connu, pour que l'on puisse d'avance calculer la place qu'il occupera chaque jour et d'heure en heure, du méridien de Paris, par exemple : il faut que le navigateur puisse observer le lieu de cet astre, et le comparer au lieu calculé; il en conclura l'heure de Paris et la longitude du vaisseau.

32. De tous les astres la lune est, sans aucune comparaison, celui dont le mouvement géocentrique est le plus rapide. Son mouvement diurne est de 13° 11′ par rapport aux étoiles, et de 12° 11′ par rapport au soleil.

Supposons que la lune et une étoile aient passé ensemble au méridien un certain jour, le lendemain il y aura 52′ de différence entre les deux passages. Si nous supposons le mouvement uniforme, l'ascension droite aura augmenté de 0^h 52′ entre ces deux passages au même méridien. Pour le méridien qui est à 180° du premier vers l'ouest, la lune aura passé 26′ après l'étoile; il n'y aurait eu que 13′ de plus en ascension pour le méridien qui est à égale distance entre les deux autres, ou 90° à l'ouest du premier. Ainsi 52′ répondent aux 360° de la sphère et de la terre, et aux 24 heures de longitude terrestre; 26′, à 180° ou 12^h; 13′, à 90° ou 6^h; 2′ 10″ ou 130″ de tems, à 15° ou une heure, et 2″ 10‴ à une minute. Ainsi, pour avoir la différence des méridiens à 1′ près en tems, il faudrait ne pas se tromper de 2″ 10‴ sur le passage au méridien; on aurait la longitude à 6″ de tems près, si l'on observait les passages à 0″,2 près dans les deux endroits : c'est tout ce qu'on pourrait faire dans deux observatoires, tels que ceux de Paris et de Greenwich; cependant, par un nombre considérable de comparaisons de ce genre, on n'a pu encore obtenir cette médiocre précision d'une manière bien incontestable.

53. On est moins exigeant sur mer, où les observations sont bien plus incertaines; on y peut observer les distances de la lune au soleil ou aux étoiles. Ces distances sont calculées pour chaque jour, de trois en trois heures pour le méridien de Paris, dans la Connaissance des Tems. En trois heures, le mouvement est assez uniforme pour que, par une simple règle de trois, on puisse en conclure la distance pour un moment quelconque, ou savoir à quelle heure, quelle minute et quelle seconde du tems de Paris, répond une distance donnée. On choisit des étoiles brillantes et peu éloignées de l'écliptique, afin que l'observation soit plus facile, et le mouvement relatif plus uniforme.

54. En théorie, rien de plus simple et de plus exact tout-à-la-fois : aussi cette idée est-elle déjà fort ancienne; il y a deux cents ans qu'elle a été proposée pour la première fois; mais il fallait des tables lunaires et solaires auxquelles on pût se fier; ce n'est pas quand la distance calculée pouvait différer de 10′ ou plus d'avec l'observation, que l'on pouvait employer cette méthode avec sûreté.

Il fallait des instrumens qui pussent mesurer exactement ces distances; on paraît y être enfin parvenu depuis quelques années; et cependant avec les meilleurs instrumens, les navigateurs les plus exercés trouvent encore des anomalies dont ils ne peuvent rendre raison. Les tables lunaires se perfectionnent de jour en jour; cependant avec les meilleures tables il est encore difficile de répondre toujours de 20″ sur une distance, et 20″ de degré font déjà 40″ de tems. A cette erreur possible de la théorie, il faut joindre celle de l'observation qui peut encore être plus considérable; on peut donc craindre encore des erreurs de 80″ de tems qui équivaudront à 20′ ou $\frac{1}{3}$ de degré. Ce devrait être le *maximum* de l'erreur; et le plus souvent cette précision serait suffisante. Au reste, on obtient quelquefois bien mieux, qu'un tiers ou un quart de degré, mais on ne peut en répondre.

55. Les calculs sont assez longs; les distances observées sont altérées par les effets de la parallaxe et de la réfraction qui varient suivant la position de l'observateur, et qu'on ne peut calculer d'avance. Ainsi, quand le navigateur a mesuré une distance et marqué l'heure de sa montre, il faut qu'il corrige la distance apparente de ces divers effets; pour ces corrections il a besoin de connaître les hauteurs des deux astres à l'instant marqué.

36. L'observation se compose donc de trois parties, et les auteurs demandent qu'elle soit partagée entre trois observateurs. Le plus habile observe plusieurs distances de la lune au soleil ou à l'étoile; il prend ces distances le plus promptement qu'il lui est possible, afin de pouvoir prendre un milieu entre toutes, et supposer sans erreur sensible que cette moyenne répond à l'instant qui tient aussi le milieu entre tous, ce qui revient à supposer que le changement de distance est uniforme pendant tout le tems qu'a duré l'observation.

Un second observateur doit mesurer les hauteurs de la lune de la même manière, pour que l'on puisse également en prendre la moyenne; le troisième en fait de même pour le soleil ou l'étoile.

Si l'observateur est seul, il observe alternativement des distances et des hauteurs, ensorte que chaque distance soit précédée et suivie des observations de hauteur. Mais les tables sont maintenant assez exactes pour qu'avec la longitude estimée, on puisse calculer les deux hauteurs avec autant de précision pour le moins qu'en donnerait l'observation.

37. Supposons la distance observée, les deux hauteurs observées ou calculées; cherchons les moyens de convertir la distance apparente en distance vraie. On a pour ce problème un grand nombre de méthodes, mais auparavant voyons la méthode trigonométrique dont toutes les autres ne sont que des modifications.

Soit Z (fig. 119) le zénit, L le lieu apparent de la lune, S celui du soleil ou de l'étoile, LS la distance apparente. Le triangle ZSL donne

$$\cos Z = \frac{\cos SL - \cos ZL \cos ZS}{\sin ZL \sin ZS} = \frac{\cos D - \sin H \sin H'}{\cos H \cos H'},$$

en nommant D la distance apparente SL, $H = 90° - ZS =$ hauteur apparente du soleil, $H' = 90° - ZL =$ hauteur apparente de la lune.

La hauteur apparente du soleil surpasse toujours la hauteur vraie, car la réfraction élève le soleil plus que la parallaxe ne l'abaisse; pour une étoile la parallaxe serait nulle; ainsi le lieu vrai du soleil ou de l'étoile sera toujours quelque part en O au-dessous de S.

La lune, au contraire, est plus abaissée par la parallaxe qu'elle n'est élevée par la réfraction; ainsi la lune sera quelque part en V au-dessus du lieu apparent L; la distance vraie sera donc OV, qui coupera toujours la distance apparente SL en un point I, tantôt plus loin, tantôt

plus près du lieu du soleil, mais toujours plus près du soleil que de la lune, car OS est plus petit que LV, à moins que les deux astres ne fussent tout près de l'horizon, où l'on se garde bien de les observer.

Le triangle OZV donne

$$\cos OV = \cos ZO \cos ZV + \sin ZO \sin ZV \cos Z.$$

Soit $OV = d$; $h = 90° - ZO$; $h' = 90° - ZV$; nous aurons

$$\cos d = \sin h \sin h' + \cos h \cos h' \left(\frac{\cos D - \sin H \sin H'}{\cos H \cos H'}\right)$$
$$= \sin h \sin h' + \frac{\cos h \cos h'}{\cos H \cos H'} (\cos D - \sin H \sin H').$$

On connaît $h = H - r + p$ et $h' = H' - r' + p'$; c'est-à-dire qu'il faut diminuer d'abord les deux hauteurs de la réfraction qui convient à ces hauteurs, telles qu'elles ont été déduites de l'observation; ensuite avec les hauteurs ainsi corrigées, c'est-à-dire avec les hauteurs $(H - r)$ et $(H' - r')$, on calcule $p = \varpi \cos(H - r)$ et $p' = \varpi' \cos(H' - r')$.

Tout sera donc connu dans le second membre; on aura donc la distance vraie d.

58. Ce problème est, comme on voit, l'un des plus simples que présente l'Astronomie pratique; cependant les calculs qu'il exige effraient la plupart des navigateurs, moins familiarisés que les astronomes avec l'usage des tables; et au fond, la solution, quoique facile, est encore assez longue et le problème assez usuel, pour que les astronomes se soient efforcés à l'envi de l'abréger et de la faciliter. On a voulu surtout affranchir le calculateur de l'embarras des signes algébriques de $\cos D$ et $\cos d$.

D'abord plusieurs astronomes ou navigateurs avaient donné des formules particulières accompagnées quelquefois de tables subsidiaires de plus d'une espèce. Considérant le problème d'une manière plus générale, j'avais tiré de la formule ci-dessus dix-huit formules dont Cagnoli faisait mention dans la première édition de sa Trigonométrie. Je m'étais borné à l'usage des sinus, cosinus et tangentes, soit naturels, soit logarithmiques; depuis ce tems MM. Lévêque et Mendoza, en admettant les sinus verses tant des arcs eux-mêmes que de leurs complémens et supplémens, ont varié les expressions bien au-delà des besoins, et M. Mendoza a fait choix de celle qui lui a paru la plus commode pour la mettre en tables.

Nous

Nous nous attacherons principalement aux formules qui n'emploient que les tables qui sont entre les mains de tous les calculateurs.

39. Nos deux triangles donnent

$$\cos Z = \frac{\cos D - \sin H \sin H'}{\cos H \cos H'} = \frac{\cos d - \sin h \sin h'}{\cos h \cos h'};$$

mais

$$\sin H \sin H' = \cos H \cos H' - \cos(H + H')$$

et

$$\sin h \sin h' = \cos h \cos h' - \cos(h + h'),$$

d'où

$$\cos Z = \frac{\cos D + \cos(H+H') - \cos H \cos H'}{\cos H \cos H'} = \frac{\cos d + \cos(h+h') - \cos h \cos h'}{\cos h \cos h'};$$

ou supprimant d'une part $\frac{\cos H \cos H'}{\cos H \cos H'} = 1$, et de l'autre, $\frac{\cos h \cos h'}{\cos h \cos h'} = 1$,

$$\frac{\cos D + \cos(H + H')}{\cos H \cos H'} = \frac{\cos d + \cos(h + h')}{\cos h \cos h'} \;\ldots\ldots\ldots\; (A)$$

$$\frac{2\cos\frac{1}{2}(H + H' - D)\cos\frac{1}{2}(H + H' + D)}{\cos H \cos H'} = \frac{1 - 2\sin^2\frac{1}{2}d + 2\cos^2\frac{1}{2}(h+h') - 1}{\cos h \cos h'};$$

$$\left(\frac{\cos h \cos h'}{\cos H \cos H'}\right)\cos\left(\frac{D+H+H'}{2} - D\right)\cos\left(\frac{D+H+H'}{2}\right)$$
$$= -\sin^2\tfrac{1}{2}d + \cos^2\tfrac{1}{2}(h+h');$$

ou soit pour abréger $S = \left(\frac{D+H+H'}{2}\right)$.

$$\cos S \cos(S - D)\frac{\cos h \cos h'}{\cos H \cos H'} = -\sin^2\tfrac{1}{2}d + \cos^2\tfrac{1}{2}(h + h'),$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}d = \cos^2\tfrac{1}{2}(h+h') - \frac{\cos S \cos(S-D)\cos h \cos h'}{\cos H \cos H'}$$

$$= \cos^2\tfrac{1}{2}(h + h')\left(1 - \frac{\cos S \cos(S-D)\cos h \cos h'}{\cos H \cos H' \cos^2\frac{1}{2}(h+h')}\right)$$

$$= \cos^2\tfrac{1}{2}(h+h')(1 - \sin^2\varphi) = \cos^2\tfrac{1}{2}(h+h')\cos^2\varphi$$

et

$$\sin\tfrac{1}{2}d = \cos\tfrac{1}{2}(h+h')\cos\varphi \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

quand on a fait

$$\sin\varphi = \frac{\left(\cos S \cos(S-D)\frac{\cos h \cos h'}{\cos H \cos H'}\right)^{\frac{1}{2}}}{\cos\frac{1}{2}(h+h')}.$$

C'est la formule de Borda, qui n'est sujette à aucun changement de signe, à aucun embarras d'aucune espèce.

40. $\cos^2\frac{1}{2}d = 1 - \sin^2\frac{1}{2}d = 1 - \cos^2\frac{1}{2}(h+h') + \frac{\cos S \cos(S-D)\cos h \cos h'}{\cos H \cos H'}$

$$= \sin^2\tfrac{1}{2}(h+h') + \frac{\cos S \cos(S-D)\cos h\cos h'}{\cos H\cos H'}$$

$$= \sin^2\tfrac{1}{2}(h+h')\left(1+\frac{\cos S\cos(S-D)\cos h\cos h'}{\cos H\cos H'\sin^2\frac{1}{2}(h+h')}\right)$$

$$= \sin^2\tfrac{1}{2}(h+h')\,(1+\text{tang}^2\psi) = \frac{\sin^2\frac{1}{2}(h+h')}{\cos^2\psi};$$

soit donc

$$\text{tang}\,\psi = \frac{[\cos S\cos(S-D)\cos h\cos h'\,\text{séc}\,H\,\text{séc}\,H']^{\frac{1}{2}}}{\sin\frac{1}{2}(h+h')}$$

et

$$\cos\tfrac{1}{2}d = \frac{\sin\frac{1}{2}(h+h')}{\cos\psi}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2).$$

41. On a encore

$$\sin H\sin H' = \cos(H-H') - \cos H\cos H'$$

et

$$\sin h\sin h' = \cos(h-h') - \cos h\cos h',$$

$$\frac{\cos D - \cos(H-H') + \cos H\cos H'}{\cos H\cos H'} = \frac{\cos d - \cos(h-h') + \cos h\cos h'}{\cos h\cos h'},$$

$$\frac{\cos(H-H') - \cos D}{\cos H\cos H'} = \frac{\cos(h-h') - \cos d}{\cos h\cos h'}.$$

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(D-H+H')\sin\frac{1}{2}(D+H-H')}{\cos H\cos H'} = \frac{2\cos^2\frac{1}{2}(h-h') - 1 - 2\cos^2\frac{1}{2}d + 1}{\cos h\cos h'};$$

$$\sin(S-H)\sin(S-H')\frac{\cos h\cos h'}{\cos H\cos H'} = \cos^2\tfrac{1}{2}(h-h') - \cos^2\tfrac{1}{2}d,$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}d = \cos^2\tfrac{1}{2}(h-h') - \frac{\sin(S-H)\sin(S-H')\cos h\cos h'}{\cos H\cos H'}\ldots\ldots\ (B)$$

$$= \cos^2\tfrac{1}{2}(h-h')\left(1-\frac{\sin(S-H)\sin(S-H')\cos h\cos h'}{\cos H\cos H'\cos^2\frac{1}{2}(h-h')}\right)$$

$$= \cos^2\tfrac{1}{2}(h-h')\,(1-\sin^2\varphi) = \cos^2\tfrac{1}{2}(h-h')\cos^2\varphi;$$

soit donc

$$\sin\varphi = \frac{[\sin(S-H)\sin(S-H')\cos h\cos h'\,\text{séc}\,H\,\text{séc}\,H']^{\frac{1}{2}}}{\cos\frac{1}{2}(h-h')}$$

et

$$\cos\tfrac{1}{2}d = \cos\tfrac{1}{2}(h-h')\cos\varphi\ldots\ldots\ldots\ldots\ (3).$$

42. $\sin^2\frac{1}{2}d = 1 - \cos^2\frac{1}{2}d = 1 - \cos^2\frac{1}{2}(h-h') + \frac{\sin(S-H)\sin(S-H')\cos h\cos h'}{\cos H\cos H'}$

$$= \sin^2\tfrac{1}{2}(h-h')\left(1+\frac{\sin(S-H)\sin(S-H')\cos h\cos h'}{\cos H\cos H'\sin^2\frac{1}{2}(h-h')}\right)$$

$$= \sin^2\tfrac{1}{2}(h-h')\,(1+\text{tang}^2\psi) = \frac{\sin^2\frac{1}{2}(h-h')}{\cos^2\psi};$$

soit donc

$$\tang \psi = \frac{\{\sin(S-H)\sin(S-H')\cos h\cos h' \text{séc} H \text{séc} H'\}^{\frac{1}{2}}}{\sin\frac{1}{2}(h-h')}$$

et

$$\sin\tfrac{1}{2}d = \frac{\sin\frac{1}{2}(h-h')}{\cos\psi} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4).$$

43. L'équation (A) donne par une simple transposition

$$\cos d = \frac{2\cos h\cos h'\cos S\cos(S-D)}{\cos H\cos H'} - \cos(h+h') \dots\dots \quad (5)$$

et l'équation (B), en mettant $\frac{1+\cos d}{2}$ et $\frac{1+\cos(h-h')}{2}$ à la place de $\cos^2\frac{1}{2}d$ et $\cos^2\frac{1}{2}(h-h')$,

$$\cos d = \cos(h-h') - \frac{2\cos h\cos h'\sin(S-H)\sin(S-H')}{\cos H\cos H'} \dots\dots\dots \quad (6).$$

44. Soit $\frac{\cos h\cos h'}{\cos H\cos H'} = 2\cos M$, vous aurez (A)

$$\cos d = 2\cos D\cos M + 2\cos(H+H')\cos M - \cos(h+h')$$

ou

$$\cos d = \cos(D+M) + \cos(D-M) + \cos(H+H'+M)$$
$$+ \cos(H+H'-M) - \cos(h+h') \dots\dots \quad (7),$$

vous auriez de même

$$\cos d = \cos(h-h') + 2\cos D\cos M - 2\cos(H-H')\cos M$$
$$= \cos(h-h') + \cos(D+M) + \cos(D-M) - \cos(H-H'+M)$$
$$- \cos(H-H'+M) \dots\dots \quad (8).$$

45. Les quatre premières formules n'emploient que les logarithmes, les formules (7) et (8) n'emploient que des cosinus en nombres naturels qu'il suffit de combiner par addition ou soustraction; les formules (5) et (6) exigent à-la-fois les sinus logarithmiques et naturels.

Dans les formules 7 et 8 on peut mettre les sinus verses en place des cosinus. Ainsi la formule (7) devient

$$1 - \sin v.d = 1 - \sin v.(D+M) + 1 - \sin v(D-M) + 1 - \sin v(H+H'+M)$$
$$+ 1 - \sin v(H+H'-M) - 1 + \sin v(h+h')$$
$$\sin v.d = \sin v\,(D+M) + \sin v.\,(D-M) + \sin v(H+H'+M)$$
$$+ \sin v\,(H+H'-M) - \sin v\,(h+h') - 2$$
$$= \sin v.(D+M) + \sin v\,(D-M) + \sin v\,(H+H'+M)$$
$$+ \sin v.(H+H'-M) + \sin v.\,\text{suppl.}\,(h+h') - 4 \dots\dots \quad (9)$$

par ce moyen tout est additif, à l'exception d'une constante, et c'est sur cette formule que M. Mendoza a construit des tables fort commodes; on pourrait faire le même usage de la formule (8).

46. On pourrait encore donner bien d'autres formes à la formule des distances vraies, j'ai choisi les plus commodes et celles dont le calcul est plus court ou plus facile.

Au lieu de chercher la distance vraie qui est toujours un grand arc qui exige une grande attention aux parties proportionnelles, on peut chercher la différence entre les distances vraie et apparente qui n'est souvent que de quelques minutes; les formules de correction ont cet avantage, qu'elles exigent moins de soins et de précision dans les calculs.

Les formules primitives sont

$$\cos D = \cos Z \cos H \cos H' + \sin H \sin H'$$

$$\cos(D+x) = \cos Z \cos h \cos h' + \sin h \sin h'$$

$$\begin{aligned}
\cos D - \cos(D+x) &= \cos Z(\cos H \cos H' - \cos h \cos h') + \sin H \sin H' \\
&\qquad - \sin h \sin h' \ldots\ldots (C) \\
&= \cos H \cos H' + \sin H \sin H' - \cos h \cos h' - \sin h \sin h' \\
&\qquad - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} Z (\cos H \cos H' - \cos h \cos h') \\
&= \cos(H - H') - \cos(h - h') \\
&\qquad - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} Z (\cos H \cos H' - \cos h \cos h') \\
&= 2\sin \tfrac{1}{2}(h - h' - H + H') \sin \tfrac{1}{2}(h - h' + H - H') \\
&\qquad - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} Z \cos H \cos H' \left(1 - \frac{\cos h \cos h'}{\cos H \cos H'}\right) \\
&= 2\sin \tfrac{1}{2}(H - m - H' - n - H + H') \times \\
&\qquad \sin \tfrac{1}{2}(H - m - H' - n + H - H') - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} Z \text{ etc.} \\
&= -2\sin\left(\frac{n+m}{2}\right) \sin\left(H - H' - \frac{n+m}{2}\right) \\
&\qquad - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} Z \cos H \cos H' \left(1 - \frac{\cos h \cos h'}{\cos H \cos H'}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\sin \tfrac{1}{2}x \sin(D + \tfrac{1}{2}x) &= +2\sin\left(\frac{n+m}{2}\right) \sin\left(H' - H + \frac{n+m}{2}\right) \\
&\qquad - 2\sin(S - H)\sin(S - H')\left(1 - \frac{\cos h \cos h'}{\cos H \cos H'}\right) \ldots (10).
\end{aligned}$$

47. La formule (C) donne encore

$$2\sin\tfrac{1}{2}x\sin(D+\tfrac{1}{2}x)=2\cos^2\tfrac{1}{2}Z(\cos H\cos H'-\cos h\cos h')-\cos H\cos H'$$
$$+\sin H\sin H'+\cos h\cos h'-\sin h\sin h'$$
$$=2\cos^2\tfrac{1}{2}Z\cos H\cos H'\left(1-\frac{\cos h\cos h'}{\cos H\cos H'}\right)-\cos(H+H')$$
$$+\cos(h+h')$$
$$=2\cos S\cos(S-D)\left(1-\frac{\cos h\cos h'}{\cos H\cos H'}\right)$$
$$-2\sin\tfrac{1}{2}(h+h'-H-H')\sin\tfrac{1}{2}(h+h'+H+H')$$
$$=2\cos S\cos(S-D)\left(1-\frac{\cos h\cos h'}{\cos H\cos H'}\right)$$
$$-2\sin\tfrac{1}{2}(H-m+H'+n-H-H')\times$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(H-m+H'+n+H+H')$$
$$=2\cos S\cos(S-D)\left(1-\frac{\cos h\cos h'}{\cos H\cos H'}\right)$$
$$-2\sin\tfrac{1}{2}(n-m)\sin\left(H+H'+\frac{n-m}{2}\right)\ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

48. Mais $\frac{\cos h\cos h'}{\cos H\cos H'}=\frac{\cos(H-m)\cos(H'+n)}{\cos H\cos H'}$

$$=\left(\frac{\cos H\cos m+\sin H\sin m}{\cos H}\right)\left(\frac{\cos H'\cos n-\sin H'\sin n}{\cos H'}\right)$$
$$=(\cos m+\sin m\,\text{tang}H)(\cos n-\sin n\,\text{tang}H')$$
$$=\cos m\cos n+\sin m\cos n\,\text{tang}H-\sin n\cos m\,\text{tang}H'$$
$$-\sin m\sin n.\,\text{tang}H\,\text{tang}H'$$
$$=1-2\sin^2\tfrac{1}{2}m-2\sin^2\tfrac{1}{2}n+4\sin^2\tfrac{1}{2}m\sin^2\tfrac{1}{2}n$$
$$+\sin m\cos n\,\text{tang}H-\sin n\cos m\,\text{tang}H'$$
$$-\sin m\sin n\,\text{tang}H\,\text{tang}H';$$

donc

$$1-\frac{\cos h\cos h'}{\cos H\cos H'}=+2\sin^2\tfrac{1}{2}m+2\sin^2\tfrac{1}{2}n-4\sin^2\tfrac{1}{2}m\sin^2\tfrac{1}{2}n-\sin m\cos n\,\text{tang}H$$
$$+\sin n\cos m\,\text{tang}H'+\sin m\sin n\,\text{tang}H\,\text{tang}H'.$$

49. Substituons cette valeur dans les formules (10) et (11); nous aurons, en négligeant les termes du quatrième ordre,

$$2\sin\tfrac{1}{2}x\sin(D+\tfrac{1}{2}x)=2\sin\tfrac{1}{2}(n+m)\sin\left(H'-H+\frac{n+m}{2}\right)$$
$$-2\sin S\sin(S-H')(\sin n\cos m\,\text{tang}H-\sin m\cos n\,\text{tang}H'$$
$$+\sin m\sin n\,\text{tang}H\,\text{tang}H'+2\sin^2\tfrac{1}{2}n+2\sin^2\tfrac{1}{2}m)\ldots\ldots (12)$$
$$=-2\sin\tfrac{1}{2}(n-m)\sin\left(H+H'+\frac{n-m}{2}\right)+2\cos S\cos(S-D)$$
$$(\sin n\cos m\,\text{tang}H'-\sin m\cos n\,\text{tang}H+\sin m\sin n\,\text{tang}H\,\text{tang}H'$$
$$+2\sin^2\tfrac{1}{2}n+2\sin^2\tfrac{1}{2}m)\ldots\ldots\ldots (13).$$

50. Au premier membre, on peut écrire $2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x+2\sin^2\frac{1}{2}x\cot D$, pourvu qu'on divise en même tems les seconds membres par $\sin D$. On aura des formules (14) et (15).

J'ai fait une table de $2\sin^2\frac{1}{2}x\cot D$, où ce petit terme se prend à vue (Connaiss. des Tems de 1793); on peut en faire des termes $\sin n \operatorname{tang} H'$, $\sin m \operatorname{tang} H$, $\sin m \sin n \operatorname{tang} H \operatorname{tang} H'$, $2\sin^2\frac{1}{2}n$, $2\sin^2\frac{1}{2}m$, et il ne restera que peu de logarithmes à chercher.

51. De la formule (5) on déduit, en faisant $S' = \frac{D+h+h'}{2}$,

$$\cos D - \cos(D+x) = \cos D + \cos(h+h') - \frac{2\cos h\cos h'\cos S\cos(S-D)}{\cos H\cos H'},$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x + 2\sin^2\tfrac{1}{2}x\cot D = \frac{2\cos S'\cos(S'-D)}{\sin D} - \frac{2\cos h\cos h'\cos S\cos(S-D)}{\sin D\cos H\cos H'} \ldots\ (16);$$

de la formule (6) on tire de même

$$2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x + 2\sin^2\tfrac{1}{2}x\cot D = -\frac{2\sin(S'-h)\sin(S'-h')}{\sin D} + \frac{2\cos h\cos h'\sin(S-H)\sin(S-H')}{\sin D\cos H\cos H'} \ldots (17).$$

L'inconvénient de ces deux formules, d'ailleurs assez simples, est que les deux termes dont elles se composent, étant peu différens et toujours de signe contraire, il faut les calculer avec le même soin que les formules qui donnent directement la distance vraie.

52. On n'a pas songé d'abord à chercher l'expression analytique de la différence x, on se servait de la construction suivante (fig. 119).

Des lieux vrais O et V abaissez les perpendiculaires Op et Vq sur la distance apparente, vous aurez

$$Sp = SO\cos OSp = -SO\cos ZSL = -m\cos S,$$
$$Lq = VL\cos ZLS = n\cos L,$$
$$d = OV = SL - Sp - Lq = D + m\cos S - n\cos L;$$

mais cette expression n'est pas suffisamment exacte, car il n'est pas vrai que OV soit égal à pq; en effet

$$OV = OI + IV = Ip + \frac{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}I\sin 2Ip}{\sin 1''} + \frac{\operatorname{tang}^4\frac{1}{2}I\sin 4Ip}{\sin 2''} + \text{etc.}$$
$$+ Iq + \frac{\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}I\sin 2Iq}{\sin 1''} + \frac{\operatorname{tang}^4\frac{1}{2}I\sin 4Iq}{\sin 2''} + \text{etc.};$$

on peut négliger les $\tang^4 \frac{1}{2}I$, et faire

$$d = D + m\cos S - n\cos L + \frac{\tang^2 \frac{1}{2}I}{\sin 1''}(\sin 2Ip + \sin 2Iq)$$

$$= D + m\cos S - n\cos L + \left(\frac{2\tang^2 \frac{1}{2}I}{\sin 1''}\right)\sin\tfrac{2}{2}(Iq + Ip)\cos\tfrac{2}{2}(Iq - Ip)$$

$$= D + m\cos S - n\cos L + \frac{2\tang^2 \frac{1}{2}I}{\sin 1''}\sin(pq)\cos(Iq - Ip)$$

$$= D + m\cos S - n\cos L + \frac{2\tang^2 \frac{1}{2}I}{\sin 1''}\sin(D + m\cos S - n\cos L)\cos(Iq - Ip),$$

$$d = D + m\cos S - n\cos L + \frac{2\tang^2 \frac{1}{2}I}{\sin 1''}\sin D\cos(m\cos S - n\cos L)\cos(Iq - Ip) \ldots (E)$$

$$+ \frac{2\tang^2 \frac{1}{2}I}{\sin 1''}\cos D\sin(m\cos S - n\cos L)\cos(Iq - Ip);$$

on peut négliger ce dernier terme et s'en tenir à l'équation (E).

53. Pour évaluer le terme du second ordre, il faut déterminer $(Iq - Ip)$ et l'angle I; or

$$\sin I : \sin V :: \sin n : \sin IL = \frac{\sin n \sin V}{\sin I},$$

$$\sin I : \sin S :: \sin m : \sin IS = \frac{\sin m \sin S}{\sin I},$$

et

$$\sin IL : \sin IS :: \sin n \sin V : \sin m \sin S,$$

$$\sin IL + \sin IS : \sin IL - \sin IS :: \sin n \sin V + \sin m \sin S : \sin n \sin V - \sin m \sin S,$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(IL + IS) : \tang\tfrac{1}{2}(IL - IS) :: \sin n \sin V + \sin m \sin S : \sin n \sin V - \sin m \sin S,$$

$$\tang\tfrac{1}{2}(IL - IS) = \left(\frac{\sin n \sin V - \sin m \sin S}{\sin n \sin V + \sin m \sin S}\right)\tang\tfrac{1}{2}(IL + IS)$$

$$= \left(\frac{1 - \frac{\sin m \sin S}{\sin n \sin V}}{1 + \frac{\sin m \sin S}{\sin n \sin V}}\right)\tang\tfrac{1}{2}D,$$

$$\tang\tfrac{1}{2}\delta = \left(\frac{1 - \frac{\sin m \cos H}{\sin n \cos H}}{1 + \frac{\sin m \cos H'}{\sin n \cos H}}\right)\tang\tfrac{1}{2}D = \left(\frac{1 - \tang\psi}{1 + \tang\psi}\right)\tang\tfrac{1}{2}D$$

$$= \cot(45° + \psi)\tang\tfrac{1}{2}D;$$

car $\sin V : \sin S :: \cos H : \cos H'$, et $\frac{\cos H'}{\cos H} = \frac{\sin S}{\sin V}$; à présent

$$Iq - Ip = IL - n\cos L - (IS + m\cos S) = IL - IS - n\cos L - m\cos S$$

$$= IL - IS - (n\cos L + m\cos S),$$

$$\cos(Iq - Ip) = \cos(IL - IS)\cos(n\cos L + m\cos S) + \sin(IL - IS)\sin(n\cos L + m\cos S);$$

d'où il résulte que dans les deux derniers termes nous pouvons mettre $\cos(\mathrm{IL}-\mathrm{IS})$ au lieu de $\cos(\mathrm{I}q-\mathrm{I}p)$; nous aurons donc, en faisant $\delta = \mathrm{IL}-\mathrm{IS}$ et négligeant les termes du troisième ordre,

$$d = \mathrm{D} + m\cos\mathrm{L} - n\cos\mathrm{L} + \left(\frac{2\,\mathrm{tang}^2\frac{1}{2}\mathrm{I}}{\sin 1''}\right)\sin\mathrm{D}\cos\delta\,;$$

quaud nous aurons fait

$$\mathrm{tang}\,\psi = \frac{m\cos\mathrm{H}'}{n\cos\mathrm{H}}, \quad \text{et} \quad \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\delta = \cot(45^\circ + \psi)\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\mathrm{D}\,;$$

de plus,

$$2\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\mathrm{I} = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{I}}{\cos^2\frac{1}{2}\mathrm{I}} = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\mathrm{I}\cos^2\frac{1}{2}\mathrm{I}}{\cos^4\frac{1}{2}\mathrm{I}} = \frac{\frac{1}{2}\sin^2\mathrm{I}}{\cos^4\frac{1}{2}\mathrm{I}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{n\sin\mathrm{L}}{\sin\mathrm{IL}}\right)^2}{\cos^4\frac{1}{2}\mathrm{I}} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{n\sin\mathrm{L}}{\sin\frac{1}{2}(\mathrm{D}+\delta)}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{2}n^2\sin^2\mathrm{L}}{\sin^2\frac{1}{2}(\mathrm{D}+\delta)},$$

la formule sera donc

$$d = \mathrm{D} + m\cos\mathrm{S} - n\cos\mathrm{L} + \frac{\frac{1}{2}n^2\sin^2\mathrm{L}\sin 1''\sin\mathrm{D}\cos\delta}{\sin^2\frac{1}{2}(\mathrm{D}+\delta)}$$

$$= \mathrm{D} + m - n - 2m\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{S} + 2n\sin^2\tfrac{1}{2}\mathrm{L}$$

$$= \mathrm{D} + m - n - \frac{2m\cos\mathrm{S}\sin(\mathrm{S}-\mathrm{H}')}{\sin\mathrm{D}\cos\mathrm{H}} + \frac{2n\cos\mathrm{S}\sin(\mathrm{S}-\mathrm{H})}{\sin\mathrm{D}\cos\mathrm{H}'}$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}n^2\sin 1''\sin\mathrm{D}\cos\delta.\,4\cos\mathrm{S}\cos(\mathrm{S}-\mathrm{D})\sin(\mathrm{S}-\mathrm{H})\sin(\mathrm{S}-\mathrm{H}')}{\sin^2\frac{1}{2}(\mathrm{D}+\delta)\sin^2\mathrm{D}\cos^2\mathrm{H}'}$$

$$= \mathrm{D} + m - n - \frac{2m\cos\mathrm{S}\sin(\mathrm{S}-\mathrm{H}')}{\sin\mathrm{D}\cos\mathrm{H}} + \frac{2n\cos\mathrm{S}\sin(\mathrm{S}-\mathrm{H})}{\sin\mathrm{D}\cos\mathrm{H}'}$$

$$+ \left(\frac{2n\cos\mathrm{S}\sin(\mathrm{S}-\mathrm{H})}{\sin\mathrm{D}\cos\mathrm{H}'}\right)\left(\frac{n\sin 1''\cos(\mathrm{S}-\mathrm{D})\sin(\mathrm{S}-\mathrm{H}')\cos\delta}{\sin^2\frac{1}{2}(\mathrm{D}+\delta)\cos\mathrm{H}'}\right)\ldots\ (18).$$

Ce dernier terme était l'erreur de la formule ancienne; il passe quelquefois une minute, on ne pourrait donc le négliger.

54. On peut en abréger le calcul, en profitant d'une remarque de M. Legendre. Si nous négligeons le terme du second ordre, nous aurons

$$x = m - n - \frac{2m\cos\mathrm{S}\sin(\mathrm{S}-\mathrm{H}')}{\sin\mathrm{D}\cos\mathrm{H}} + \frac{2n\cos\mathrm{S}\sin(\mathrm{S}-\mathrm{H})}{\sin\mathrm{D}\cos\mathrm{H}'}\,;$$

pour approcher davantage de la véritable valeur, mettons dans la formule les variables augmentées de la moitié de leurs variations, ainsi que les astronomes le pratiquent généralement.

x

$$x = m - n - \frac{2m\cos(S+\frac{1}{2}dS)\sin(S+\frac{1}{2}dS-H'-\frac{1}{2}dH')}{\sin(D+\frac{1}{2}x)\cos(H-\frac{1}{2}m)}$$
$$+\frac{2n\cos(S+\frac{1}{2}dS)\sin(S+\frac{1}{2}dS-H+\frac{1}{2}m)}{\sin(D+\frac{1}{2}x)\cos(H'+\frac{1}{2}dH')}$$
$$= m - n - \frac{2m\cos\left(S+\frac{n-m}{4}+\frac{x}{4}\right)\sin\left(S-H+\frac{n+m}{4}+\frac{x}{4}\right)}{\sin(D+\frac{1}{2}x)\cos(H-\frac{1}{2}m)}$$
$$+\frac{2n\cos\left(S+\frac{n-m}{4}+\frac{x}{4}\right)\sin\left(S-H+\frac{n+m}{4}+\frac{x}{4}\right)}{\sin(D+\frac{1}{2}x)\cos(H'+\frac{1}{2}n)}.$$

M. Legendre a démontré que l'erreur n'était que du quart des quantités du troisième ordre ; on sera forcé de négliger d'abord $\left(\frac{x}{4}\right)$ et $\left(\frac{x}{2}\right)$ dans un premier calcul, qui donnera x à quelques secondes près ; avec cette valeur de x on changera quelques figures aux logarithmes des sinus et cosinus variables, et l'on aura x avec toute l'exactitude qu'on peut desirer, c'est-à-dire, à 0″,1 ou 0″,2 près.

55. En faisant l'application du principe, M. Legendre dispose la formule différemment.

$$x = m\cos S - n\cos L = m\left(\frac{\sin H' - \cos D\sin H}{\sin D\cos H}\right) - n\left(\frac{\sin H - \cos D\sin H'}{\sin D\cos H'}\right)$$
$$= \frac{m}{\cos H}\sin H'\operatorname{cos\acute{e}c} D - \frac{m}{\cos H}\sin H\cot D - \frac{n}{\cos H'}\sin H\operatorname{cos\acute{e}c} D$$
$$+\frac{n}{\cos H'}\sin H'\cot D$$
$$= \left(\frac{\frac{1}{2}m}{\cos H}\right)\sin H'(\cot\tfrac{1}{2}D+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}D) - \left(\frac{\frac{1}{2}m}{\cos H}\right)\sin H(\cot\tfrac{1}{2}D-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}D)$$
$$-\left(\frac{\frac{1}{2}n}{\cos H'}\right)\sin H(\cot\tfrac{1}{2}D+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}D) + \left(\frac{\frac{1}{2}n}{\cos H'}\right)\sin H'(\cot\tfrac{1}{2}D-\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}D)$$
$$= \left(\frac{\frac{1}{2}m}{\cos H}\right)\sin H'\cot\tfrac{1}{2}D + \left(\frac{\frac{1}{2}m}{\cos H}\right)\sin H'\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}D - \left(\frac{\frac{1}{2}m}{\cos H}\right)\sin H\cot\tfrac{1}{2}D$$
$$+\left(\frac{\frac{1}{2}m}{\cos H}\right)\sin H\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}D$$
$$+\left(\frac{\frac{1}{2}n}{\cos H'}\right)\sin H'\cot\tfrac{1}{2}D - \left(\frac{\frac{1}{2}n}{\cos H'}\right)\sin H'\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}D - \left(\frac{\frac{1}{2}n}{\cos H'}\right)\sin H\cot\tfrac{1}{2}D$$
$$-\left(\frac{\frac{1}{2}n}{\cos H'}\right)\sin H\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}D$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{2}m}{\cos H}+\frac{\frac{1}{2}n}{\cos H'}\right)\sin H'\cot\tfrac{1}{2}D-\left(\frac{\frac{1}{2}n}{\cos H'}-\frac{\frac{1}{2}m}{\cos H}\right)\sin H'\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}D$$
$$-\left(\frac{\frac{1}{2}m}{\cos H}+\frac{\frac{1}{2}n}{\cos H'}\right)\sin H\cot\tfrac{1}{2}D-\left(\frac{\frac{1}{2}n}{\cos H'}-\frac{\frac{1}{2}m}{\cos H}\right)\sin H\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}D$$
$$=\left(\frac{\frac{1}{2}n}{\cos H'}+\frac{\frac{1}{2}m}{\cos H}\right)\cot\tfrac{1}{2}D(\sin H'-\sin H)$$
$$-\left(\frac{\frac{1}{2}n}{\cos H'}-\frac{\frac{1}{2}m}{\cos H}\right)\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}D\,(\sin H'+\sin H)$$
$$=\left(\frac{n}{\cos H'}+\frac{m}{\cos H}\right)\sin\tfrac{1}{2}(H'-H)\cos\tfrac{1}{2}(H'+H)\cot\tfrac{1}{2}D$$
$$-\left(\frac{n}{\cos H'}-\frac{m}{\cos H}\right)\sin\tfrac{1}{2}(H'+H)\cos\tfrac{1}{2}(H'-H)\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}D,$$

et pour plus d'exactitude,

$$x=\left(\frac{n}{\cos(H'+\frac{1}{2}n)}+\frac{m}{\cos(H-\frac{1}{2}m)}\right)\sin\left(\frac{H'-H}{2}+\frac{n+m}{4}\right)\cos\left(\frac{H'+H}{2}+\frac{n+m}{4}\right)\times$$
$$\cot(\tfrac{1}{2}D+\tfrac{1}{4}x)$$
$$-\left(\frac{n}{\cos(H'+\frac{1}{2}n)}-\frac{m}{\cos(H-\frac{1}{2}m)}\right)\cos\left(\frac{H'-H}{2}+\frac{n+m}{4}\right)\sin\left(\frac{H'+H}{2}+\frac{n-m}{4}\right)\times$$
$$\mathrm{tang}(\tfrac{1}{2}D+\tfrac{1}{4}x)=P\cot(\tfrac{1}{2}D+\tfrac{1}{4}x)-Q\,\mathrm{tang}(\tfrac{1}{2}D+\tfrac{1}{4}x).$$

56. On néglige d'abord $\frac{1}{4}x$, comme nous avons dit ci-dessus; mais j'ai montré qu'on pouvait l'éliminer.

Soit, pour abréger,

$$x=P\cot(\tfrac{1}{2}D+\tfrac{1}{4}x)-Q\,\mathrm{tang}(\tfrac{1}{2}D+\tfrac{1}{4}x)$$
$$=P\left(\frac{\cot\frac{1}{2}D-\mathrm{tang}\,\frac{1}{4}x}{1+\mathrm{tang}\,\frac{1}{4}x\cot\frac{1}{2}D}\right)-Q\left(\frac{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}D+\mathrm{tang}\,\frac{1}{4}x}{1-\mathrm{tang}\,\frac{1}{4}x\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}D}\right)$$
$$=P(\cot\tfrac{1}{2}D-\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{4}x)(1-\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{4}x\cot\tfrac{1}{2}D)$$
$$-Q(\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}D+\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{4}x)(1+\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{4}x\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}D)$$
$$=P(\cot\tfrac{1}{2}D-\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{4}x-\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{4}x\cot^2\tfrac{1}{2}D)$$
$$-Q(\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}D+\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{4}x+\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{4}x\,\mathrm{tang}^2\tfrac{1}{2}D)$$
$$=P\left(\cot\tfrac{1}{2}D-\frac{\mathrm{tang}\,\frac{1}{4}x}{\sin^2\frac{1}{2}D}\right)-Q\left(\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}D+\frac{\mathrm{tang}\,\frac{1}{4}x}{\cos^2\frac{1}{2}D}\right)$$
$$=P\cot\tfrac{1}{2}D-Q\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}D-\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{4}x\left(\frac{P}{\sin^2\frac{1}{2}D}+\frac{Q}{\cos^2\frac{1}{2}D}\right)$$
$$=P\cot\tfrac{1}{2}D-Q\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}D-\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{4}x\left(\frac{P\cot\frac{1}{2}D}{\sin\frac{1}{2}D\cos\frac{1}{2}D}+\frac{Q\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}D}{\sin\frac{1}{2}D\cos\frac{1}{2}D}\right)$$
$$=P\cot\tfrac{1}{2}D-Q\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}D-\left(\frac{P\cot\frac{1}{2}D-Q\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}D}{4}\right)\left(\frac{P\cot\frac{1}{2}D+Q\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}D}{\sin\frac{1}{2}D\cos\frac{1}{2}D}\right)$$
$$=P\cot\tfrac{1}{2}D-Q\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}D-\left(\frac{P^2\cot^2\frac{1}{2}D-Q^2\mathrm{tang}^2\frac{1}{2}D}{\sin D}\right)\sin 0'',5.$$

On peut mettre en table ces deux derniers termes, ainsi que $\frac{n}{\cos(H'+\frac{1}{2}n)}$ et $\frac{m}{\cos(H-\frac{1}{2}m)}$.

57. Nous terminerons par une méthode dont Borda, le premier, donna l'idée, et que j'ai modifiée dans la Connaissance des Tems de l'an XII.

Les triangles apparent et vrai donnent

$$\sin^2\tfrac{1}{2}Z=\frac{\sin(S-H)\sin(S-H')}{\cos H\cos H'}=\frac{\sin(S'-h)\sin(S'-h')}{\cos h\cos h'}.$$

Les logarithmes de ces deux quantités seraient égaux; mais faute de connaître d, au lieu de faire $S'=\frac{d+h+h'}{2}$, nous sommes réduits à faire $S'=\frac{D+h+h'}{2}$; ainsi l'égalité ne peut subsister. S' est trop faible de $\frac{1}{2}x$ si x est additif; il est trop fort si x est soustractif; ainsi toute l'erreur viendra de $\log\sin(S'-h)$ et de $\log\sin(S'-h')$. Pour trouver cette erreur, nous retrancherons le second logarithme, du premier, ou, si l'on veut, nous chercherons

$$\log\left(\frac{\sin(S-H)\sin(S-H')\cos h\cos h'}{\sin(S'-h)\sin(S'-h')\cos H\cos H'}\right)=X,$$

d'où

$$x=\frac{X}{\frac{1}{2}\{(d\log\sin(S'-h)+d\log\sin(S'-h')\}}=\frac{2X}{d\log\sin(S'-h)+d\log\sin(S'-h')};$$

x sera exprimé en secondes, si nous prenons pour $d\log\sin(S'-h)$ $d\log\sin(S'-h')$ les variations pour une seconde; mais les Tables de Callet donnent les différences pour $10''$, le quotient serait dix fois moindre qu'il ne doit être, nous multiplierons le numérateur par 10, et nous aurons en secondes

$$x=\frac{20X}{d\log\sin(S'-h)+d\log\sin(S'-h')}\ldots\ldots\ (19).$$

Pour avoir x en minutes on divisera l'expression par 60, et l'on aura

$$x=\frac{X}{3d\log\sin(S'-h)+3d\log\sin(S'-h')}.$$

Ce procédé serait rigoureusement exact, si les différentielles des sinus

étaient constantes; mais elles sont variables, et nous n'aurons qu'une approximation. Soit x' la valeur approchée, nous ferons

$$x = \frac{X}{\left\{ \begin{array}{c} d\log\sin(S'-h) + d\log\sin(S'-h+\tfrac{1}{4}x) + d\log\sin(S'-h+\tfrac{1}{4}x) + d\log\sin(S'-h') \\ + d\log\sin(S'-h'+\tfrac{1}{4}x) + d\log\sin(S'-h'+\tfrac{1}{2}x) \end{array} \right\}}$$

et nous aurons x fort exactement. Borda cherchait d'abord une première valeur x' par des moyens qu'il n'a point indiqués; alors il employait $(D+x')$, et il avait une correction x'' et faisait enfin $d = D + x' + x''$.

On peut vérifier l'opération en calculant directement......... $\log\left(\frac{\sin(S'-h)\sin(S'-h')}{\cos h \cos h'}\right)$, qui doit alors se trouver égal au log du premier membre. L'idée est ingénieuse, mais l'opération ressemble beaucoup à l'une de nos méthodes, qui est aussi courte et plus sûre, peut-être.

On voit aisément qu'on aurait de même

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} Z = \frac{\sin S \sin(S-D)}{\cos H \cos H'} = \frac{\sin S \sin(S-d)}{\cos h \cos h'};$$

on tirerait de ces équations deux valeurs de d déjà trouvées ci-dessus.

58. Il nous reste à donner des exemples de ces formules, ou du moins de celles qu'on peut employer avec le plus d'avantage. Les autres serviront de termes de comparaison pour juger de l'exactitude des tables de diverses espèces qu'on présente si souvent aux marins, et qui, pour la plupart, sont d'une exactitude assez médiocre.

Nous choisirons deux exemples; dans l'un la correction sera soustractive et considérable, dans l'autre elle sera beaucoup moindre, mais additive, et les termes du second ordre y seront plus sensibles.

Nous supposons qu'avec les hauteurs observées on cherche la réfraction, et qu'avec les hauteurs diminuées de la réfraction on cherche la parallaxe; c'est par ces deux opérations que l'on formera n et m.

59. *Exemple I.* — *Calcul trigonométrique.*

D = 101° 46′ 43″	C. cos H...... 0.2556079
H = 56.16.50	C. cos H′...... 0.0212818
H′ = 17.47.27	cos *h*...... 9.7444931
h = 56.16.18	cos *h′*...... 9.9765866
h′ = 18.38.43	2cos M...... 9.9979694
	cos D... − 9.3099082
(1) − 0.2031784	(1)... − 9.3078776
(2) − 0.2529546	
− 0.4561330	− 2cos M... − 9.9979694
(3) + 0.2658947	sin H...... 9.9200010
− 0.1902383 = cos *d*	sin H′...... 9.4850723
log − 9.2792980	(2)... − 9.4030427
d = D + *x* = 100.58. 0.1	sin *h*...... 9.9199561
D = 101.46.43.0	sin *h′*...... 9.5047537
x = − 48.42.9	(3)...... 9.4247098

Exemple II.

D = 30. 0. 0	C. cos H...... 0.0023857
H = 6. 0. 0	C. cos H′...... 0.0217937
H′ = 18. 0. 0	cos *h*...... 9.9977237
h = 5.51.40	cos *h′*...... 9.9758870
h′ = 18.55. 0	2cos M...... 9.9977894
(1) + 0.8616298	cos D... + 9.9375306
(2) − 0.0321371	(1) + 9.9353200
+ 0.8294927	− 2cos M... − 9.9977901
+ 0.0331058	sin H...... 9.0192346
+ 0.8625985	sin H′...... 9.4899884
log + 9.9358088	(2) − 8.5070131
D + *x* = 30° 23′ 25″,3	sin *h*...... 9.0090996
D = 30	sin *h′*...... 9.5108031
x = + 23.25″,3	(3) + 8.5199027

Si cette formule n'est pas la plus courte, elle est du moins la plus simple ; elle n'exige aucune préparation, et elle pourrait bien être la plus exacte de toutes. Elle n'exige qu'une attention très-facile aux signes de cos D et cos(D + *x*), et elle peut servir pour juger de l'exactitude des autres.

60. *Méthode de Borda.*

D =	101.46.43	2cos M (59)...	9.9979694
H =	56.16.50	cos S...	8.5588005
H′ =	17.47.27	cos(S—D) +	9.9871792
2S =	175.51. 0	somme...	8.5439491
S =	87.55.30	moitié...	9.2719745
S—D =	— 13.51.13	C. cos $\frac{1}{2}(h+h')$...	0.1002920
h =	56.16.18	sin φ...	9.3722665
h' =	18.38.43		
$h+h'$ =	74.55. 1	cos φ...	9.9875937
$\frac{1}{2}(h+h')$ =	37.27.30″,5	cos $\frac{1}{2}(h+h')$...	9.8997080
		sin $\frac{1}{2}d$ = 50°29′ 0″0	9.8873017
		D+x = 100.58. 0.0	
		D = 101.46.43.0	
		x = — 48.43.0.	

D =	30. 0. 0	2cos M (59)...	9.9977901
H =	6. 0. 0	cos S...	9.9498809
H′ =	18. 0. 0	cos (S—D)...	9.9994044
2S =	54. 0. 0	somme...	9.9470754
S =	27. 0. 0	moitié...	9.9735377
S—D =	— 3. 0. 0	C. cos $\frac{1}{2}(h+h')$...	0.0102326
h =	5.51.40	sin φ...	9.9837703
h' =	18.55. 0		
$h+h'$ =	24.46.40	cos φ...	9.4287164
$\frac{1}{2}(h+h')$ =	12.23.20	cos $\frac{1}{2}(h+h')$...	9.9897674
		sin $\frac{1}{2}d$ = 15°11′42″8	9.4184838
		D = $d+x$ = 30.23.25.6	
		D = 30	
		x = + 23.25.6.	

Nous avons emprunté 2cosM des calculs précédens. L'opération n'exige que 10 logar. au lieu de 14. Tous les signes sont invariables, quoiqu'on ait imprimé le contraire pour décréditer la méthode. CosS est toujours positif. En effet, $S = \frac{D+H+H'}{2} = \frac{D+90°-N+90°-N'}{2} = 90° + \frac{D-N-N'}{2} = 90° - \frac{N+N'-D}{2}$; car N+N′>D. Peu importe que (S—D) soit un arc négatif, le cosinus sera toujours positif, puisque l'arc n'est pas de 90°. Plus l'arc subsidiaire φ sera grand, moins la méthode aura de précision, et nous avons ici x plus fort de 0″,3 que par la formule trigonométrique.

61. *Formule* (2).

$D =$	101° 46′ 43	$2\cos M(59)\ldots$	9.9979694
$H =$	56.16.50	$\cos S\ldots\ldots\ldots$	8.5588005
$H' =$	17.47.27	$\cos(S-D)\ldots$	9.9871792
$2S =$	175.51. 0	somme...	8.5439491
$S =$	87.55.50	moitié...	9.2719745
$S-D = -$	13.51.13	C. $\sin\frac{1}{2}(h+h')\ldots$	0.2159634
		$\tan\psi\ldots$	9.4879379
$h =$	56.16.18		
$h' =$	18.38.43	C. $\cos\psi\ldots$	0.0196271
$(h+h') =$	74.55. 1	$\sin\frac{1}{2}(h+h')\ldots$	9.7840366
$\frac{1}{2}(h+h') =$	37.27.30.5	$\cos\frac{1}{2}d = 50°\,29'\,0''$	9.8036637

$d = D + x = 100.58.\ 0$

$D = 101.46.43$

$x = -\ 48.43$

$D =$	30. 0. 0	$2\cos M(59)\ldots$	9.9977901
$H =$	6. 0. 0	$\cos S\ldots\ldots\ldots$	9.9498809
$H' =$	18. 0. 0	$\cos(S-D)\ldots$	9.9994044
$2S =$	54. 0. 0	somme...	9.9470754
$S =$	27. 0. 0	moitié...	9.9735377
$S-D = -$	3. 0. 0	C. $\sin\frac{1}{2}(h+h')\ldots$	0.6684797
		$\tan\psi = 77°\ 9'\ 17'',1\ldots$	0.6420174
$h =$	5.51.40		
$h' =$	18.55. 0	C. $\cos\psi\ldots$	0.6530242
$h+h' =$	24.46.40	$\sin\frac{1}{2}(h+h')\ldots$	9.3315203
$\frac{1}{2}(h+h) =$	12.23.20	$\cos\frac{1}{2}d = 15°\,11'\,43''$	9.9845445

$d = D + x = 30.23.26$

$D = 30$

$x = +\ 23.26.$

Il n'y a de différence entre cette formule et la précédente que les cinq derniers logarithmes; elle est un peu moins précise, toutes les fois que $\sin\frac{1}{2}(h+h') < \cos\frac{1}{2}(h+h')$, ce qui arrivera le plus souvent. Ainsi la formule de Borda sera presque toujours préférable.

62. *Formule* (3).

$D =$	$101° 46' 43''$	$2\cos M (59) \ldots$	9.9979694
$H =$	$56.16.50$	$\sin(S - H) \ldots.$	9.7198667
$H' =$	$17.47.27$	$\sin(S - H') \ldots$	9.9733546
$2S =$	$175.51.\ 0$	somme...	9.6911907
$S =$	$87.55.30$		
$S - H =$	$31.38.40$	moitié...	9.8455953
$S - H' =$	$70.\ 8.\ 3$	$C.\cos\frac{1}{2}(h - h') \ldots$	0.0238450
$h =$	$56.16.18$	$\sin\phi = 47° 45' 42''$	9.8694403
$h' =$	$18.38.43$		
$h - h' =$	$37.37.35$	$\cos\phi \ldots$	9.8275089
$\frac{1}{2}(h - h') =$	$18.48.47,5$	$\cos\frac{1}{2}(h - h') \ldots$	9.9761550
		$\cos\frac{1}{2}d = 50° 29' 0''$	9.8036639
		$d = D + x = 100.58.\ 0$	
		$D = 101.46.43$	
		$x = -48.43$	

Ici, le complément de $\cos\frac{1}{2}(h - h')$ est fort petit et peu variable; la circonstance est très-favorable, d'autant plus que $d > 90°$. Cette formule, qui a beaucoup d'analogie avec celle de Borda, aurait quelque avantage du côté de la précision; ce serait le contraire, si d était petit, comme dans le second exemple, que nous nous dispenserons de calculer. Nous ne calculerons ni la formule (4), qui a les mêmes inconvéniens que la formule (2) dont elle est l'analogue; nous passerons de même les formules (5) et (6), qui exigent la valeur de 11 logarithmes, à cause des nombres naturels. La formule (7) n'est faite que pour être mise en tables; j'en dis autant des formules (8) et (9).

Il résulte de cet examen que la formule de Borda l'emporte sur toutes les autres le plus souvent, et qu'elle est toujours d'une exactitude satisfaisante; ainsi c'est à celle-là qu'il faut s'en tenir pour calculer directement la distance vraie.

63. Parmi les formules qui donnent la réduction x, nous choisirons de préférence notre formule (16) dont voici le calcul.

$$\begin{array}{rl}
D = & 101^\circ\, 46'\, 43'' \\
H = & 56.16.50 \\
H' = & 17.47.27 \\
\hline
2S = & 175.51.\ 0 \\
S = & 87.55.30 \\
\hline
S - D = & -\ 13.51.13
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
D = & 101^\circ\, 46'\, 43'' \\
h = & 56.16.18 \\
h' = & 18.38.43 \\
\hline
2S' = & 176.41.44 \\
S' = & 88.20.52 \\
\hline
S' - D = & 13.25.51
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
-2\sin 1'' & -\ 5.6154551 \\
C.\sin D\ldots & 0.0092423 \\
\hline
 & -\ 5.6246974 \\
2\cos M\,(59)\ldots & 9.9979694 \\
\cos S\ldots & 8.5588005 \\
\cos(S-D)\ldots & 9.9871792 \\
\hline
-\ 14745''06 & 4.1686465 \\
+\ 12817.99 & \\
\hline
-\ 2927.07 & -\ 3.46642 \\
 & -\ 3.46642 \\
 & +\ 9.31915\ -\cot D \\
 & 4.38454\ldots\ \sin 0''5, \\
\hline
+\ 4.33 & +\ 0.63653 \\
x = -\ 2922.74 = & -\ 48'\, 42''74 \\
D = & 101^\circ\, 46.43.\ 0 \\
\hline
D + x = & 100.58.\ 0.26.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
 & +\ 5.6246974 \\
\cos S'\ldots & 8.4598856 \\
\cos(S'-D)\ldots & 9.9879571 \\
\hline
12817.99 & +\ 4.0725401
\end{array}$$

Cette formule est symétrique, invariable dans les signes des deux termes principaux ; le petit terme est additif quand D surpasse 90°, et soustractif dans le cas contraire. J'en ai fait une table où on le prend à vue. *Connaiss. des Tems*, an XIV, p. 334. x est toujours la différence de deux grands nombres, c'est ce qui exige des logarithmes à sept décimales. Cette formule est préférable aux formules des différences logarithmiques (57) avec lesquelles elle a d'ailleurs beaucoup d'analogie.

Nous préférerons aussi la formule (11) à la formule (10), et aux formules 12, 13, 14, 15, qui ne sont que des développemens des formules 10 et 11. Ces développemens ne feraient qu'alonger le calcul,

mais on peut les mettre en tables. La formule (11) est peut-être la plus commode de toutes celles qui donnent la réduction.

64. *Formule* (11).

$D =$	101° 46′ 43″	$2\cos M = 0.9953352\ldots$	9.9979694
$H =$	56.16.50		
$H' =$	17.47.27	$1 - 2\cos M = 0.0046648\ldots$	7.6688330
$2S =$	175 51. 0	C. sin D...	0.0092423
$S =$	87.55.30	2 : sin 1″...	5.6154551
$S - D = -$	13.51.13	cos S...	8.5588005
$n =$	51.16	cos (S − D)...	9.9871792
$m =$	32	+ 1′ 9″,104........	1.8395101
$n - m =$	50.44	$-(n - m)$	− 3.4834446
$\frac{1}{2}(n - m) =$	25.22	C. sin D...	0.0092423
$H + H' =$	74. 4.17	$\sin\left(H + H' + \frac{n-m}{2}\right)\ldots$	9.9838982
$\left(H + H' + \frac{n-m}{2}\right) =$	74.29.39	− 49′ 56″ 30	− 3.4765851
		$x' = -$ 48.47.20	− 3.46645
		id...	− 3.46645
			− 4.38454.. sin 0″,5
			− 9.31915.. cot D
		+ 4.33	0.63658
		$x = -$ 48.42.87	

65. Nous allons maintenant donner le calcul de la formule (16), qui est la plus simple de toutes pour les termes principaux et la plus compliquée pour le terme du second ordre.

Nous calculerons ensuite la formule de M. Legendre, rendue plus directe par l'addition de deux petits termes du second ordre, qu'il est aisé de mettre en une seule table.

Formule 16.

D = 30° 0′ 0″	2... 0.30103	
H = 6. 0. 0	C sin D... 0.30103	........................— 0.60206
H′ = 18. 0. 0	n... 3.51851	m... 2.69897
2S = 54. 0. 0	C cos H′... 0.02179	C cos H... 0.00239
S = 27. 0. 0	cos S.... 9.94988	cos S... 9.94988
S − D = − 3. 0. 0	sin (S — H)... 9.55432	sin (S — H′)... 9.19433
S − H = 21. 0. 0	+ 1° 13′ 51″,6.. 3.64656	— 4′ 40″,3. . 2.44763
S — H′ = 9. 0. 0	sin n... 8.20407	m... 2.69897
D = 30. 0. 0	C cos H′... 0.02179	C. n... 6.48149
m = 8.20	cos (S — D)... 9.99940	cos H′... 9.97821
— n = — 55	sin (S — H′)... 9.19433	C cos H... 0.00239
29.13.20	1.05615	tang φ = 8° 14′ 40″... 9.16106
+ 1.13.51.6	cos δ... 9.96520	45
— 4.40.3	C. sin $\frac{1}{2}$(D + δ) 0.35327	cot... 53.14.40 ... 9.87325
+ 54.7	id... 0.35327	tang $\frac{1}{2}$D = 15. 0. 0 ... 9.42805
D + n = 30.23.26,0	+ 54″,7 + 1.73789	tang $\frac{1}{2}$δ = 11.19. 0 ... 9.30130
		26.19. 0 = $\frac{1}{2}$(D + δ)

66. *Méthode de M. Legendre.*

D = 30° 0′ 0″	n + 3.51851	m + 2.69897
$\frac{1}{2}$D = 15. 0. 0	C. cos(H′ + $\frac{1}{2}$n)... 0.02294	C. cos(H — $\frac{1}{2}$m) 0.00233
H = 6. 0. 0	a = 57′ 59″ 0... 3.54144	b = 8′ 22″ 7 2.70130
H′ = 18. 0. 0	b = 8.22.7	
H′ + H = 24. 0. 0	a + b = 66.21.7	
H′ — H = 12. 0. 0	a — b = 49.36.3	
$\frac{1}{2}$(H′ + H) = 12. 0. 0	a + b... 3.60007	— (a — b) — 3.47368
$\frac{1}{2}$(H′ — H) = 6. 0. 0	sin 6° 15′ 50″ 9.03786	cos... 9.99740
n = 0.55. 0	cos 12.11.40 9.99009	sin... 9.32476
m = 0. 8.20	cot $\frac{1}{2}$D... 0.57195	Tang $\frac{1}{2}$D.., 9.42805
$\frac{1}{2}$n = 0.27.30	p = + 26′ 24″ 8 3.19977...	q.. — 2.22389
$\frac{1}{2}$m = 0. 4.10	q = — 2.47.5	
H — $\frac{1}{2}$m = 5.55.50	+ 23.37.3	
H′ + $\frac{1}{2}$n = 18.27.30	— p² — 6.39954	+ q² + 4.44778
$\frac{1}{2}$(n + m) = 0.31.40	sin 0″,5 4.38454...............	4.38454
$\frac{1}{2}$(n — m) = 0.23.20	C. sin D... 0.30103...............,	0.30103
$\frac{1}{4}$(n + m) = 0.15.60	— 12″,176 — 1.08511	+ 0″136 9.13335
$\frac{1}{4}$(n — m) = 0.11.40		— 12.176
$\frac{H'-H}{2}+\frac{n+m}{4}$ = 6.15.50		— 12.04
		23′ 37.30
		x = 23.25,26
$\frac{H'+H}{2}+\frac{n-m}{4}$ = 12.11.40		

On peut réduire en tables les termes $\frac{n}{\cos(H'+\frac{1}{2}n)}$ et $\frac{m}{\cos(H-\frac{1}{2}m)}$, alors la méthode sera certainement la plus courte et la plus facile de toutes

mais les préparatifs sont un peu plus longs que dans aucune autre, et le terme qui dépend de $\sin\left(H' - H + \frac{n+m}{4}\right)$, changerait de signe si le soleil était plus haut que la lune.

67. Dans les calculs précédens nous n'avons fait aucune attention à la figure sphéroïdique de la terre; pour en tenir compte, il faut employer les parallaxes qui conviennent à la latitude de l'observateur (XV.43), et calculer les parallaxes de hauteur pour le zénit géocentrique. Ces préliminaires ne feraient qu'alonger un peu le calcul préparatoire. Mais le zénit des réfractions qui est celui du fil à-plomb n'étant pas celui des parallaxes, il s'ensuit qu'il faut d'abord calculer les réfractions avec les hauteurs observées; corriger d'abord la distance de l'effet des réfractions; ensuite corriger une seconde fois les hauteurs pour les rapporter à l'horizon des parallaxes (XV.72), et enfin corriger une seconde fois la distance des deux astres, en la dépouillant de l'effet des parallaxes.

68. Soient (fig. 120) SL la distance observée, ZS et ZL les distances au zénit apparent; la réfraction avait élevé le soleil qui était quelque part en O; la lune observée en L, était quelque part en V. Soient H et H' les hauteurs observées, $(H - r)$ et $(H' - r')$ les mêmes hauteurs corrigées de la réfraction, on aura la distance OV dépouillée de la réfraction par la formule

$$\cos D' = \cos OV = \frac{\cos(H-r)\cos(H'-r')}{\cos H \cos H'}(\cos D - \sin H \sin H') + \sin(H-r)\sin(H'-r') :$$

c'est notre formule primitive. Mettez r au lieu de m, et $-r'$ au lieu de n, et vous pourrez trouver D' par quelqu'une des formules précédentes. OV = D' est donc la distance qu'on aurait observée, s'il n'y avait pas de réfraction ; O et V seraient les lieux apparens des deux astres pour l'observateur à la surface de la terre; il faut en conclure les lieux géocentriques ou la distance vraie.

69. La parallaxe avait abaissé le soleil de quelques secondes; il était quelque part en E sur l'arc OZ', mené au zénit géocentrique Z'. Si c'est une étoile qu'on a observée, O et E se confondent.

La parallaxe de la lune, toujours plus grande que la réfraction, avait abaissé la lune qui devait se trouver quelque part en N sur l'arc VZ'. La distance vraie géocentrique était donc EN; pour la trouver, il faut calculer les parallaxes VN et OE qui dépendent de Z'V et de Z'O.

Or $Z'O = Op - Z'p = ZO - ZZ' \cos Z' = OZ - \alpha \cos \text{azim.} \odot$ compté du point sud, ou extérieurement au triangle. Ainsi $(H-r)$ devient $(H - r + \alpha \cos z) = h$, ou $(H - r - \alpha \cos z) = h$, z étant pris intérieurement :

$$Z'V = Vq + qZ' = VZ + ZZ' \cos ZZ'V = VZ + \alpha \cos z';$$

nous aurons donc $h' = H' - r' - \alpha \cos z'$.

70. Il faut donc connaître les azimuts des deux astres; on peut les observer grossièrement, ou bien les calculer en même tems que les hauteurs.

Les parallaxes seront

$$p = \varpi \cos(H - r - \alpha \cos z) \quad \text{et} \quad p' = \varpi' \cos(H' - r' - \alpha \cos z').$$

La correction de hauteur changerait de signe pour l'astre dont l'azimut serait obtus.

α est l'angle de la verticale avec le rayon de la terre (XV.76), il ne passe pas 10'.

71. Ces calculs étant faits, on aura, en supposant tous les azimuts aigus,

$$\cos D'' = \cos EN = \frac{\cos(H - r - \alpha \cos z + p) \cos(H' - r' - \alpha \cos z' + p')}{\cos(H - r - \alpha \cos z) \cos(H' - r' - \alpha \cos z')} \times$$
$$[\cos D' - \sin(H - r - \alpha \cos z) \sin(H' - r' - \alpha \cos z')]$$
$$+ \sin(H - r - \alpha \cos z + p) \sin(H' - r' - \alpha \cos z' + p').$$

L'opération est donc aussi facile, mais plus longue, car elle est plus que doublée. On a donné différens moyens pour abréger et pour éviter la double opération; ils ne peuvent être qu'approximatifs ; on peut du moins les rendre suffisans, sans même corriger les hauteurs.

72. On peut négliger pour le soleil la différence des parallaxes sphéroïdique et sphérique; mais, en calculant la parallaxe de la lune pour le zénit apparent Z, on porte la lune en n au lieu de la porter en N;

on obtient la distance En au lieu de EN; il s'agit donc de changer le triangle EZn en EZN. Les variables sont Zn qui doit devenir ZN, et l'angle EZn qui deviendra EZN : or

$$\cos D' = \cos En = \sin h \sin h' + \cos h \cos h' \cos Z.$$

Différentions en faisant varier Z et h',

$$-dD' \sin D' = dh' \cos h' \sin h - dh' \sin h' \cos h \cos Z - dZ \sin Z \cos h \cos h'$$
$$= dh'(\cos h' \sin h - \sin h' \cos h \cos Z) - dZ \sin Z \cos h \cos h'$$
$$-dD' = \frac{dh'}{\sin D'}[\cos h' \sin h - \sin h' \cos h \cos(Z - Z')]$$
$$-\frac{\cos h \cos h' \sin(Z - Z') \, NZV}{\sin D'};$$

car l'angle Z, dans le triangle EZn, est la différence des deux azimuts, et la variation de cet angle est le petit angle NZV, pris négativement.

Or $\sin ZN : \sin NV :: \sin NVZ : \sin NZV$

$$= \frac{\sin NV \sin NVZ}{\sin ZN} = \frac{\sin \varpi \sin ZN \sin NVZ}{\sin ZN} = \sin \varpi \sin NVZ$$

$$\sin ZV : \sin ZZ'V :: \sin ZZ' : \sin Z'VZ = \frac{\sin ZZ' \sin ZZ'V}{\sin ZV},$$

$$\sin NZV = \frac{\sin \varpi \sin ZZ' \sin ZZ'V}{\sin ZV} = \frac{\sin \alpha \sin \varpi \sin Z'}{\cos h'}.$$

Ainsi le dernier terme de dD qui est le terme principal, devient

$$dD' = -\frac{\cos h \cos h' \sin(Z - Z')}{\sin D'} \cdot \frac{\alpha \sin \varpi \sin Z'}{\cos h'} = -\frac{\alpha \sin \varpi \cos h \sin Z' \sin(Z - Z')}{\sin D'},$$

73. L'autre terme $-\frac{dh'}{\sin D'}(\cos h' \sin h - \sin h' \cos h \cos Z)$

$$= -\frac{dh'}{\sin D'}\left(\cos h' \sin h - \sin h' \cos h \frac{\cos D' - \sin h \sin h'}{\cos h \cos h'}\right)$$

ou $$dD' = -\frac{dh'}{\sin D'}\left(\cos h' \sin h + \frac{\sin^2 h' \sin h}{\cos h'} - \frac{\sin h' \cos D'}{\cos h'}\right)$$

$$= -\frac{dh'}{\sin D' \cos h'}(\cos^2 h' \sin h + \sin^2 h' \sin h - \sin h' \cos D')$$

$$= -\frac{dh'}{\sin D' \cos h'}(\sin h - \sin h' \cos D')$$

$$= -\frac{dh' \sin h}{\sin D' \cos h'} + dh' \tang h' \cot D'.$$

Il reste à trouver $dh' = \text{VN} - \text{V}n$, sans erreur sensible,

ou
$$dh' = \varpi \sin \text{Z'V} - \varpi \sin \text{ZV} = \varpi (\sin \text{Z'V} - \sin \text{ZV})$$
$$= 2\varpi \sin \tfrac{1}{2}(\text{Z'V} - \text{ZV}) \cos \tfrac{1}{2}(\text{Z'V} + \text{ZV})$$
$$= 2\varpi \sin \tfrac{1}{2} \text{Z}q \cos \tfrac{1}{2}(\text{ZV} + \text{Z}q + \text{ZV})$$
$$= \text{Z}q \sin \varpi \sin \cos (\text{ZV} + \tfrac{1}{2}\text{Z}q)$$
$$= \alpha \sin \varpi \cos \text{Z}' \sin h'.$$

Ainsi l'autre terme sera

$$d\text{D}' = -\frac{\alpha \sin \varpi \sin h' \cos \text{Z}'}{\sin \text{D}' \cos h'} (\sin h - \sin h' \cos \text{D}')$$
$$= -\frac{\alpha \sin \varpi \operatorname{tang} h' \cos \text{Z}'}{\sin \text{D}'} (\sin h - \sin h' \cos \text{D}'),$$

et la correction totale

$$d\text{D}' = -\left(\frac{\alpha \sin \varpi}{\sin \text{D}'}\right) \cos h \sin \text{Z}' \sin (\text{Z}' - \text{Z})$$
$$-\left(\frac{\alpha \sin \varpi}{\sin \text{D}'}\right) \operatorname{tang} h' \cos \text{Z}' (\sin h - \sin h' \cos \text{D}').$$

Dans cette formule, les deux azimuts sont censés positifs, et Z′ est l'azimut de la lune. Si Z′ est plus grand que Z, le premier terme change de signe; si les deux astres sont l'un à l'orient, l'autre à l'occident du méridien, Z — Z′ devient (Z + Z′).

74. Quand on a calculé la distance vraie, on cherche dans l'Éphéméride nautique, à quelle heure cette distance répond, ce qui n'exige qu'une règle de trois.

75. La méthode des distances est aujourd'hui universellement adoptée par les astronomes et les navigateurs, depuis que La Caille, l'ayant éprouvée avec succès dans son voyage au Cap de Bonne-Espérance, la recommanda et fournit les moyens d'abréger les calculs, en traçant le plan d'un Almanach nautique. Le Monnier et Pingré tachèrent vainement de soutenir la méthode des angles horaires. Voici en quoi elle consiste : observez une hauteur du bord de la lune; appliquez-y toutes les corrections nécessaires pour qu'elle devienne la hauteur vraie du centre. Avec la hauteur du pôle et la déclinaison de la lune prise dans

une Éphéméride, calculez l'angle horaire de la lune; calculez l'angle horaire du soleil pour le tems de l'observation, vous en conclurez la différence d'ascension droite et l'ascension droite absolue de la lune. Cherchez dans l'Éphéméride, à quelle heure de Paris répond cette ascension droite, vous aurez l'heure de Paris et la longitude du vaisseau. Rien de plus facile à comprendre et à pratiquer : mais pour bien calculer l'angle horaire, il faut d'abord être bien sûr de sa latitude, ou se borner à observer la lune vers le premier vertical; il faut bien connaître la déclinaison de la lune, et pour cela, on a besoin de la longitude. Qu'on s'y trompe d'une demi-heure, on pourra se tromper de 6′ ou plus encore sur la déclinaison, tout le reste du calcul ne peut manquer d'être affecté sensiblement de cette erreur. Pour la diminuer, quand vous avez déterminé l'ascension droite, vous cherchez dans l'Éphéméride la déclinaison qui y correspond : si ce n'est pas celle que vous avez supposée, vous recommencerez dans une autre hypothèse de longitude, et par le progrès des erreurs, vous arriverez à la longitude vraie. Le procédé est donc bon en lui-même, mais il est beaucoup plus long que le calcul des distances; il emploie des quantités trop variables et trop incertaines. Quelques minutes d'erreur sur les hauteurs, soit observées, soit calculées, ne changent que très-peu la réduction de la distance, et jamais l'on est obligé de recommencer le calcul. La méthode des angles horaires est entièrement abandonnée.

76. Outre les problèmes dont nous venons d'exposer les solutions, et qui suffisent aux besoins ordinaires de la navigation, il en est encore quelques-uns qui ne servent qu'à défaut d'autres, et dans des circonstances particulières. Ainsi, quand les nuages ont empêché l'observation du soleil au méridien même, on y supplée par quelque hauteur circomméridienne que l'on corrige par le calcul (XXIV.24). Si les observations n'ont pu se faire assez près du méridien pour que la correction soit suffisamment exacte, voici une méthode qui donnera tout-à-la-fois l'heure et la latitude du vaisseau; elle consiste à mesurer une hauteur du soleil aux environs du premier vertical, et une seconde le plus près qu'on pourra du méridien. Il y a diverses méthodes pour calculer ces observations; commençons par la méthode exacte et rigoureuse.

Supposons d'abord le vaisseau immobile, ZA (fig. 121) $= 90° - h$, $ZB = 90° - h'$; ce sont les complémens des hauteurs observées. Dans le triangle APB on suppose connues les distances polaires du soleil pour

pour les deux instans; car on connait toujours assez bien sa longitude pour calculer les déclinaisons du soleil :

$$24^h + x : 360° :: (T' - T) : APB = \frac{(T' - T)\,360°}{24^h + x};$$

T′ et T sont les tems des deux observations, et x ce que la montre fait de plus que 24 heures entre deux passages du soleil au méridien.

$$\text{tang}\,Px = \cos P\ \text{tang}\,PA,$$

$$\sin Bx : \sin Px :: \text{tang}\,P : \text{tang}\,B = \frac{\text{tang}\,P \sin Px}{\sin(PB - Px)} = \frac{\text{tang}\,P \sin\varphi}{\sin(90° - D - \varphi)} = \frac{\text{tang}\,P \sin\varphi}{\cos(D + \varphi)};$$

$$\cos Px : \cos Bx :: \cos PA : \cos AB = \frac{\cos PA \cos Bx}{\cos Px} = \frac{\sin D \cos(90° - D - \varphi)}{\cos\varphi}$$

$$= \frac{\sin D \sin(D + \varphi)}{\cos\varphi}.$$

Dans le triangle ZBA, $\sin^2 \tfrac{1}{2} ZBA = \frac{\sin(S - ZB)\sin(S - AB)}{\sin ZB \sin AB} = \sin^2 \tfrac{1}{2} B'$,

$$ZBP = ZBA - PBA = (B' - B),$$

$$\cos PZ = \cos ZBP \sin ZB \sin PB + \cos ZB \cos PB = \sin H,$$

$$\cos H : \sin(B' - B) :: \sin ZB : \sin ZPB.$$

C'est le problème que nous avons résolu (XVIII. 58). Soit donc D′ la déclinaison pour l'observation la plus éloignée du méridien, D l'autre déclinaison.

$$\theta = \frac{(T' - T)\,360°}{24^h + x},\quad \text{tang}\,\varphi = \cos\theta \cot D',\quad \text{tang}\,V = \frac{\text{tang}\,\theta \sin\varphi}{\cos(D + \varphi)},$$

$$\cos C = \frac{\sin D' \sin(D + \varphi)}{\cos\varphi},$$

ou

$$\cot C = \cos V\ \text{tang}(D + \varphi),\quad \sin^2 \tfrac{1}{2} W = \frac{\cos\left(\frac{h + h' + C}{2}\right)\sin\left(\frac{h + h' + C}{2} - h'\right)}{\cos h \sin C};$$

$$u = V \mp W,$$

le signe +, si le soleil passe au méridien entre le zénit et le pôle, c'est-à-dire, si $H < D'$.

$$\text{tang}\,z = \cos u \cot h,\qquad \text{tang}\,P = \frac{\text{tang}\,u \sin z}{\cos(D + z)},$$

$$\text{tang}\,H = \cos P\ \text{tang}(D + z),\qquad \text{ou}\qquad \sin H = \frac{\sin h \sin(D + z)}{\cos z}.$$

Ces formules sont générales; mais il faut savoir si la hauteur du pôle

est plus grande ou plus petite que la déclinaison du soleil; P est l'angle horaire pour l'observation la plus éloignée du méridien.

77. Cette solution est claire et facile; les marins n'en font pourtant que peu d'usage, ils préfèrent ordinairement les fausses positions, qui cependant alongent et compliquent le calcul. Ils se servent du triangle ZPA pour trouver l'heure, en employant pour PZ le complément de la latitude estimée. ZPB = ZPA — APB; avec cet angle, PB et ZB, ils cherchent PZ, et avec cette valeur moins inexacte ils recommencent le calcul, ou bien ils cherchent la correction dont PZ peut avoir besoin. Examinons ces divers procédés.

78. Soit h une hauteur observée; $\sin h = \cos P\cos H\cos D + \sin H\sin D$,

$$dh\cos h = -dP\sin P\cos H\cos D - dH\sin H\cos D\cos P + dH\cos H\sin D,$$

$$dP = \frac{dH(\cos H\sin D - \sin H\cos D\cos P) - dh\cos h}{\sin P\cos H\cos D}$$
$$= \frac{dH}{\sin P}(\tan D - \tan H\cos P) - \frac{dh\cos h}{\sin P\cos H\cos D};$$

ainsi l'erreur dh produira sur P une erreur $-\frac{dh\cos h}{\sin P\cos H\cos D}$, qui sera d'autant moindre que P approchera plus de 90°, et que $\cos h$ sera plus petit ou l'astre plus élevé; mais dh est peu de chose. Il n'en est pas de même de dH, mais on voit que l'effet de cette erreur se réduit à zéro si l'on a $\tan D = \tan H\cos P$, ou $\cot H = \cot D\cos P$, ce qui a lieu au premier vertical. Dans ce cas, l'heure sera bien connue, malgré l'erreur de quelques minutes sur la latitude.

79. Le second triangle donnera $\sin h' = \cos P'\cos H'\cos D' + \sin H'\sin D'$.

$$dH'(\cos H'\sin D' - \sin H'\cos D'\cos P') = dP'\sin P'\cos H'\cos D' + dh'\cos h',$$

$$dH' = \frac{dP'\sin P'\cos H'\cos D' + dh'\cos h'}{\cos H'\sin D' - \sin H'\cos D'\cos P'} = \frac{dP'\sin P' + \frac{dh'\cos h'}{\cos H'\cos D'}}{\tan D' - \tan H'\cos P'}$$
$$= \left(dP' + \frac{dh'\cos h'}{\sin P'\cos H'\cos D'}\right)\left(\frac{\sin P'}{\tan D' - \tan H'\cos P'}\right).$$

Pour peu que la montre ait une marche régulière, et qu'on ait passablement mesuré le chemin fait en longitude pendant l'intervalle,

on aura $dP' = dP$; ainsi

$$dH' = \left[dH\left(\frac{\text{tang}D - \text{tang}H\cos P}{\sin P}\right) - \frac{dh\cos h}{\sin P\cos H\cos D}\right]\left(\frac{\sin P'}{\text{tang}\,D' - \text{tang}\,H'\cos P'}\right)$$
$$+ \left(\frac{dh'\cos h'}{\sin P'\cos H'\cos D'}\right)\left(\frac{\sin P'}{\text{tang}D' - \text{tang}H'\cos P'}\right)$$
$$= dH\left(\frac{\sin P'}{\sin P}\right)\left(\frac{\text{tang}D - \text{tang}H\cos P}{\text{tang}D' - \text{tang}H'\cos P'}\right) + \left(\frac{dh'\cos h'}{\sin P'\cos H'\cos D'} - \frac{dh\cos h}{\sin P\cos H\cos D}\right)$$
$$\left(\frac{\sin P'}{\text{tang}D' - \text{tang}H'\cos P'}\right).$$

Généralement $dh' = dh$, et ces erreurs se détruisent, au moins en grande partie. On voit donc que l'erreur dH' du second triangle sera moindre que l'erreur dH du premier, dans la raison de........ $\left(\frac{\sin P'}{\sin P}\right)\left(\frac{\text{tang}D - \text{tang}H\cos P}{\text{tang}D' - \text{tang}H'\cos P'}\right)$, et comme $\sin P'$ est beaucoup moindre que $\sin P$, l'erreur sur la latitude sera fort diminuée, d'autant plus que $(\text{tang}\,D - \text{tang}\,H\cos P)$ est une quantité fort petite, si la première observation avoisine le premier vertical.

80. Quoique les termes dh et dh' soient ordinairement peu considérables, ils peuvent quelquefois devenir sensibles. En effet,

$$\left(\frac{dh'\cos h'}{\cos H'\cos D'} - \frac{dh\cos h\left(\frac{\sin P'}{\sin P}\right)}{\cos H\cos D}\right)\left(\frac{1}{\text{tang}\,D' - \text{tang}\,H'\cos P'}\right)$$
$$= \frac{dh'\cos h' - dh\cos h\left(\frac{\sin P'}{\sin P}\right)}{\cos H'\cos D'}\left(\frac{1}{\text{tang}D' - \text{tang}H' + 2\text{tang}\,H'\sin^2\frac{1}{2}P'}\right)$$
$$= \frac{dh'\cos h' - dh\cos h\left(\frac{\sin P'}{\sin P}\right)}{\cos H'\cos D'}\left(\frac{1}{\frac{\sin(D' - H')}{\cos D'\cos H'} + 2\text{tang}H'\sin^2\frac{1}{2}P'}\right)$$
$$= \frac{dh'\cos h' - dh\cos h\left(\frac{\sin P'}{\sin P}\right)}{-\sin(H' - D') + 2\sin H'\cos D'\sin^2\frac{1}{2}P'};$$

ainsi, quoique le numérateur soit peu de chose, il peut arriver que le dénominateur soit encore moindre; il pourrait même être nul, si l'on avait $\sin(H' - D') = 2\sin^2\frac{1}{2}P'\sin H'\cos D' = \sin H'\cos D' - \cos H'\sin D'$, ou $\cos H'\sin D' = \sin H'\cos D'(1 - 2\sin^2\frac{1}{2}P') = \sin H'\cos D'\cos P'$, d'où $\cos P' = \cot H'\,\text{tang}\,D'$; ce qui aurait lieu si la seconde observation avait aussi lieu près du premier vertical, et si H' différait peu de D'. Nous

avons vu que, dans ce cas, la solution directe laisse ambigu le signe, dans l'équation $u = V \mp W$. La solution peut donc être incertaine à certains jours de l'année, dans la zone torride.

81. Soit z l'azimut du soleil,

$$\cot z = \frac{\tang D \cos H - \cos P \sin H}{\sin P}, \quad \frac{\cot z}{\cos H} = \frac{\tang D - \cos P \tang H}{\sin P},$$
$$\frac{\cot z'}{\cos H} = \frac{\tang D' - \cos P' \tang H}{\sin P'}, \quad \sin z = \frac{\sin P \cos D}{\cos h}, \quad \sin z' = \frac{\sin P' \cos D'}{\cos h'};$$

portons ces valeurs dans les équations (78) et (79), nous aurons

$$dP = \frac{dH \cot z}{\cos H} - \frac{dh}{\cos H \sin z},$$
$$dH' = dH \cot z \tang z' \left(\frac{\cos H'}{\cos H}\right) - \frac{dh \tang z'}{\sin z} \cdot \left(\frac{\cos H'}{\cos H}\right) + \frac{dh'}{\cos z'}$$
$$= dH \cot z \tang z' = \left(\frac{dH \tang z'}{\tang z}\right) \text{ sensiblement};$$

ainsi l'erreur sur la latitude calculée sera à l'erreur de l'estime dans le rapport des tangentes des deux azimuts. Si $z' = -z$, on aura $dH' = -dH$; l'erreur aura changé de signe sans changer de valeur, la latitude vraie serait la moyenne entre les latitudes estimée et calculée.

82. Soit $\frac{\tang z'}{\tang z} = \frac{1}{n}$; un premier calcul donnera $dH' = \frac{1}{n}(dH)$; un second calcul donnera $dH'' = \frac{1}{n}(dH') = \frac{1}{n^2}(dH)$; un troisième, ... $dH''' = \frac{1}{n^3}(dH)$, et ainsi de suite; ainsi tant qu'on aura $z > z'$, à chaque supposition nouvelle, on diminuera l'erreur de l'estime; mais si $z < z'$, l'erreur ira en augmentant à chaque fois qu'on se servira de la latitude calculée pour refaire un autre calcul.

83. $dH : dH' :: \tang z : \tang z'$,

$$dH - dH' : dH :: \tang z - \tang z' : \tang z :: \frac{\sin(z - z')}{\cos z \cos z'} : \tang z :: \sin(z - z') : \sin z \cos z',$$
$$dH = \frac{(dH - dH') \sin z \cos z'}{\sin(z - z')}.$$

Soit H'' la latitude vraie, H' la latitude calculée, H la latitude

estimée,

$$H'' = H + dH = H' + dH', \qquad dH - dH' = H' - H,$$

donc

$$dH = \frac{(H'-H)\sin z \cos z'}{\sin(z-z')};$$

de même

$$dH' = \frac{(H'-H)\sin z' \cos z}{\sin(z-z')}$$

ainsi quand on a corrigé la montre par la petite hauteur h, on obtient par le second triangle une valeur moins inexacte de la latitude; et par la différence $(H'-H)$ de ces deux latitudes, on détermine dH correction de la latitude estimée, et dH' correction de la latitude calculée; on aura donc la latitude vraie par deux calculs différens qui doivent conduire au même résultat.

84. On peut se dispenser du calcul des angles z et z', en formant une nouvelle hypothèse pour la latitude. Soit λ cette seconde supposition de latitude, λ' la latitude qu'elle fera trouver par le second triangle. Les azimuts restant les mêmes, on aura

$$dH' = dH \operatorname{tang} z' \cot z,\quad d\lambda' = d\lambda \operatorname{tang} z' \cot z,\quad dH : dH' :: d\lambda : d\lambda',$$

$$dH - dH' : dH :: d\lambda - d\lambda' : d\lambda,\quad H'-H : \lambda'-\lambda :: dH : d\lambda,$$

$$(H'-H)-(\lambda'-\lambda) : (H'-H) :: (dH - d\lambda) : dH = \frac{(H'-H)(dH-d\lambda)}{(H'-H)-(\lambda'-\lambda)}$$

$$= \frac{(H'-H)(\;\;-H)}{(H'-H)-(\;'-\lambda)},$$

$$(H'-H)-(\lambda'-\lambda) : (\lambda'-\lambda) :: (dH - d\lambda) : d\lambda = \frac{(\lambda-H)(\lambda'-\;\;)}{(H'-H)-(\lambda'-\;\;)},$$

$$dH - dH' : dH' :: (d\lambda - d\lambda') : d\lambda',\quad (H'-H) : (\lambda'-\lambda) :: dH' : d\lambda',$$

$$(H'-H)-(\lambda'-\lambda) : H'-H :: (dH' - d\lambda') : dH' = \frac{(H'-H)(\lambda'-H')}{(H'-H)-(\;'-\;\;)},$$

$$(H'-H)-(\lambda'-\lambda) : (\lambda'-\lambda) :: (dH' - d\lambda') : d\lambda' = \frac{(\lambda'-H')(\lambda'-\lambda)}{(H'-H)-(\lambda'-\lambda)}.$$

Voilà donc quatre formules pour avoir la latitude vraie, en corrigeant successivement les deux latitudes supposées et les deux latitudes trouvées par le calcul.

85. Supposez $\lambda = H'$, c'est-à-dire, prenez pour seconde supposition la latitude trouvée par le premier calcul. Nos quatre formules de-

viendront

$$dH = \frac{(H'-H)(H'-H)}{(H'-H)-(\lambda'-H')}, \quad dH' = \frac{(H'-H)(\lambda'-H')}{(H'-H)-(\lambda'-H')} = \frac{(H'-H)(\lambda'-H')}{(H'-H)-(\lambda'-H')},$$

$$d\lambda' = \frac{(\lambda'-H')(\lambda'-H)}{(H'-H)-(\lambda'-H')}.$$

On voit que si le dénominateur commun de ces huit formules se trouve une quantité fort petite, on ne peut plus compter sur la correction si le numérateur se réduit à zéro, on ne connaît plus rien.

86. Si l'on avait tang z' cot $z = 1$, c'est-à-dire, $z' = 90° - z$, les formules $dH = \frac{(H'-H)\sin z \cos z'}{\sin(z-z')}$ et $dH' = \frac{(H'-H)\sin z' \cos z}{\sin(z-z')}$ deviendraient $dH = \frac{(H'-H)\sin^2 z}{-\cos 2z}$ et $dH' = \frac{(H'-H)\cos^2 z}{-\cos 2z}$.

87. Toutes ces formules négligent dh et dh', elles sont donc approximatives. Cet inconvénient est inévitable, et la méthode directe n'en est pas plus exempte.

88. Nos deux triangles, en supposant la déclinaison constante, donneront

$$\sin h = \cos P \cos H \cos D + \sin H \sin D = \cos(H-D) - 2\sin^2\tfrac{1}{2}P \cos H \cos D,$$
$$\sin h' = \cos P' \cos H \cos D + \sin H \sin D = \cos(H-D) - 2\sin^2\tfrac{1}{2}P' \cos H \cos D,$$
$$\sin h' - \sin h = \cos H \cos D(\cos P' - \cos P) = 2\cos H \cos D(\sin^2\tfrac{1}{2}P - \sin^2\tfrac{1}{2}P'),$$
$$2\sin\tfrac{1}{2}(h'-h)\cos\tfrac{1}{2}(h'+h) = 2\cos H \cos D \sin\tfrac{1}{2}(P-P')\sin\tfrac{1}{2}(P+P'),$$

et

$$\sin\tfrac{1}{2}(P+P') = \frac{\sin\frac{1}{2}(h'-h)\cos\frac{1}{2}(h+h)}{\cos H \cos D \sin\frac{1}{2}(P-P')}.$$

On connaît (P—P') par l'intervalle des tems; en faisant une supposition pour H, on aura (P+P'), et par conséquent les deux angles horaires. On en déduit approximativement

$$\cos(H'-D) = \cos(D-H') = \sin h + 2\sin^2\tfrac{1}{2}P \cos H \cos D$$
$$= \sin h' + 2\sin^2\tfrac{1}{2}P' \cos H \cos D\,;$$

il faut savoir seulement lequel des deux est le plus grand, de H ou de D. Pour la correction, voyez ci-après (90).

89. On aura de même $\sin h = -\cos(H+D) + 2\cos^2\frac{1}{2}P\cos H\cos D$,

$$\cos(H'+D) = 2\cos^2\tfrac{1}{2}P\cos H\cos D - \sin h = 2\cos^2\tfrac{1}{2}P'\cos H\cos D - \sin h'\,;$$

si l'une des observations a été faite le matin et l'autre le soir, $(P+P')$ devient $(P-P')$, et réciproquement; l'inspection des formules fera voir quelles sont les heures et les intervalles les plus favorables pour la précision; mais on n'a pas toujours la faculté du choix.

90. On emploie dans le calcul de $\sin\frac{1}{2}(P+P')$ une latitude fautive H, il en résultera une erreur; car soit $\frac{1}{2}(P+P') = \frac{1}{2}x$ et $\frac{1}{2}(P-P') = \frac{1}{2}B$,

$$\sin\tfrac{1}{2}x\cos H\cos D\sin\tfrac{1}{2}B = \sin\tfrac{1}{2}(h'-h)\cos\tfrac{1}{2}(h'+h),$$

$$d\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x\cos H\cos D\sin\tfrac{1}{2}B - dH\sin H\cos D\sin\tfrac{1}{2}B\sin\tfrac{1}{2}x = 0,$$

$$d\tfrac{1}{2}x = \frac{dH\sin H\cos D\sin\frac{1}{2}B\sin\frac{1}{2}x}{\cos H\cos D\sin\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}x} = dH\tang H\tang\tfrac{1}{2}x\,;$$

or $P = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}x$; donc $dP = d\frac{1}{2}x = dH\tang H\tang\frac{1}{2}x$; après quoi

$$\begin{aligned}
-d(H'-D)\sin(H'-D) &= 4\sin\tfrac{1}{2}P\cos\tfrac{1}{2}P\,d\tfrac{1}{2}P\cos H\cos D - 2\sin^2\tfrac{1}{2}P\cos D\sin H\,dH \\
&= 2dP\sin\tfrac{1}{2}P\cos\tfrac{1}{2}P\cos H\cos D - 2dH\sin H\cos D\sin^2\tfrac{1}{2}P \\
&= 2dH\tang H\tang\tfrac{1}{2}x\sin\tfrac{1}{2}P\cos\tfrac{1}{2}P\cos H\cos D \\
&\quad - 2dH\sin H\cos D\sin^2\tfrac{1}{2}P \\
&= 2dH\sin\tfrac{1}{2}P\sin H\cos D(\cos\tfrac{1}{2}P\tang\tfrac{1}{2}x - \sin\tfrac{1}{2}P) \\
&= 2dH\sin\tfrac{1}{2}P\sin H\cos D\,\frac{(\cos\frac{1}{2}P\sin\frac{1}{2}x - \sin\frac{1}{2}P\cos\frac{1}{2}x)}{\cos\frac{1}{2}x} \\
&= \frac{2dH\sin\frac{1}{2}P\sin H\cos D\sin\frac{1}{2}(x-P)}{\cos\frac{1}{2}x}
\end{aligned}$$

et enfin à cause de $\frac{1}{2}(x-P) = \frac{1}{2}(P+P'-P) = \frac{1}{2}P'$, et $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(P+P')$

$$dH' = \frac{2dH\sin\frac{1}{2}P\sin\frac{1}{2}P'\sin H\cos D}{-\sin(H'-D)\cos\frac{1}{2}(P+P')} = \frac{2dH\sin\frac{1}{2}P\sin\frac{1}{2}P'\sin H\cos D}{\sin(D-H')\cos\frac{1}{2}(P+P')}\,;$$

on voit que la méthode sera peu sûre, si H' diffère peu de D.

Si les deux observations sont d'un même côté du méridien, l'erreur dH' est de même signe que dH; les signes seront différens, si l'une des observations a été faite le matin et l'autre le soir. Ce sera le contraire si $H' < D$, à moins que les deux circonstances n'arrivent à la fois.

91. La formule $\cos(H'+D)$ donnera de même

$$dH' = \frac{2dH\cos\frac{1}{2}P\cos\frac{1}{2}P'\sin H\cos D}{\sin(H'+D)\cos^2\frac{1}{2}(P+P')}\,;$$

chacune de ces deux différentielles exprime l'erreur de la latitude de la formule d'où elle est déduite.

92. L'équation 90 donne

$$dH : dH' :: \sin(D-H')\cos\tfrac{1}{2}(P+P') : 2\sin\tfrac{1}{2}P\sin\tfrac{1}{2}P'\sin H\cos D,$$

$$dH-dH' : dH :: \sin(D-H')\cos\tfrac{1}{2}(P+P') - 2\sin\tfrac{1}{2}P\sin\tfrac{1}{2}P'\sin H\cos D : \sin(D-H')\cos\tfrac{1}{2}(P+P'),$$

$$dH = \frac{(dH-dH')\sin(D-H')\cos\frac{1}{2}(P+P')}{\sin(D-H')\cos\frac{1}{2}(P+P') - 2\sin\frac{1}{2}P\sin\frac{1}{2}P'\sin H\cos D}$$

$$= \frac{(H'-H)\sin(D-H')\cos\frac{1}{2}(P+P')}{\sin(D-H')\cos\frac{1}{2}(P+P') - 2\sin\frac{1}{2}P\sin\frac{1}{2}P'\sin H\cos D}$$

$$= \frac{H'-H}{1-\dfrac{2\sin\frac{1}{2}P\sin\frac{1}{2}P'\sin H\cos D}{\sin(D-H')\cos\frac{1}{2}(P+P')}}.$$

93.

$$dH-dH' : dH' :: \sin(D-H')\cos\tfrac{1}{2}(P+P') - 2\sin\tfrac{1}{2}P\sin\tfrac{1}{2}P'\sin H\cos D : 2\sin\tfrac{1}{2}P\sin\tfrac{1}{2}P'\sin H\cos D,$$

$$dH' = \frac{2(H'-H)\sin\frac{1}{2}P\sin\frac{1}{2}P'\sin H\cos D}{\sin(D-H')\cos\frac{1}{2}(P+P') - 2\sin\frac{1}{2}P\sin\frac{1}{2}P'\sin H\cos D} = \frac{H'-H}{\dfrac{\sin(D-H')\cos\frac{1}{2}(P+P')}{2\sin\frac{1}{2}P\sin\frac{1}{2}P'\sin H\cos D}-1}.$$

94. La formule 91 donne de même

$$dH : dH' :: \sin(H'+D)\cos\tfrac{1}{2}(P+P') : 2\cos\tfrac{1}{2}P\cos\tfrac{1}{2}P'\sin H\cos D,$$

$$dH-dH' : dH :: \sin(H'+D)\cos\tfrac{1}{2}(P+P') - 2\cos\tfrac{1}{2}P\cos\tfrac{1}{2}P'\sin H\cos D : \sin(H'+D)\cos\tfrac{1}{2}(P+P'),$$

$$dH = \frac{(H'-H)\sin(H'+D)\cos\frac{1}{2}(P+P')}{\sin(H'+D)\cos\frac{1}{2}(P+P') - 2\cos\frac{1}{2}P\cos\frac{1}{2}P'\sin H\cos D} = \frac{H'-H}{1-\dfrac{2\cos\frac{1}{2}P\cos\frac{1}{2}P'\sin H\cos D}{\sin(H'+D)\cos\frac{1}{2}(P+P')}}.$$

95.

$$dH-dH' : dH' :: \sin(H'+D)\cos\tfrac{1}{2}(P+P') - 2\cos\tfrac{1}{2}P\cos\tfrac{1}{2}P'\sin H\cos D : 2\cos\tfrac{1}{2}P\cos\tfrac{1}{2}P'\sin H\cos D,$$

$$dH' = \frac{2(H'-H)\cos\frac{1}{2}P\cos\frac{1}{2}P'\sin H\cos D}{\sin(H'+D)\cos\frac{1}{2}(P+P') - 2\cos\frac{1}{2}P\cos\frac{1}{2}P'\sin H\cos D} = \frac{H'-H}{\dfrac{\sin(H'+D)\cos\frac{1}{2}(P+P')}{2\cos\frac{1}{2}P\cos\frac{1}{2}P'\sin H\cos D}-1}.$$

Voilà bien des formules, voyons celles qui peuvent mériter la préférence.

96. Je choisis un exemple calculé par M. Mendoza (*Philos. Trans-act.*,

act.; 1797); les circonstances étaient médiocrement favorables, et l'estime était en erreur de 18'.

$$h = 50°\ 13'\ 14'',\quad h' = 50°\ 3'\ 55'',\quad D = 20°\ 6'\ 40''A;$$
$$H = 56°\ 29'A \text{ estimée (fig. 121).}$$

J'en conclus ZA=N=59°46'46", ZB=39°56'5", PA=69°53'20"=PB; quand la déclinaison est de 20°, elle ne varie que de 13' par jour, ou de $1'\frac{1}{2}$ pour 5^h; on peut supposer la déclinaison constante, en prenant celle qui avait lieu au milieu de l'intervalle. La déclinaison étant australe, aussi bien que la latitude, on peut faire comme si elles étaient toutes deux boréales. APB = 43° 53', $\frac{1}{2}$ APB = 21° 56' 30".

Sin $\frac{1}{2}$ APB...	9.5724794	tang $\frac{1}{2}$ APB...	9.6051352
sin PA...	9.9726784	cos PA...	9.5363589
sin $\frac{1}{2}$ AB = 20° 32' 28"	9.5451578	cot PAB = 82° 6' 50"	9.1414941
AB = 41. 4.56			
N = 59.46.46		C. sin N........	0.0634389
N' = 39.56. 5		C. sin AB........	0.1823412
2S = 140.47.47		sin (S—N)........	9.2654617
S = 70.23.53.5		sin (S—AB)........	9.6898640
S—N = 10.37. 7.5			19.2011058
S—AB = 29.18.57.5		sin $\frac{1}{2}$ ZAB = 23.29.30........	9.6005529
N' = 39.56. 5		ZAB = 46.59. 0	
		PAB = 82. 6.50	
		PAZ = 35. 7.50.	

Après avoir résolu le triangle isoscèle PBA par les formules du triangle rectangle P*m*A, je cherche l'angle ZAB par les trois côtés ZA, ZB et AB; j'en conclus, sans aucune incertitude, PAZ=PAB—ZAB; il ne reste à résoudre que le triangle ZAP. J'abaisse la perpendiculaire Zx, et je fais

tang ZA = tang N......	0.2347083	tang ZAP...	9.8473313
cos ZAP = 35. 7.50...	9.9126699	sin Ax...	9.9109036
tang Ax = 54.32.25...	0.1473782	C. sin Px...	0.5772604
PA = 69.53.20		tang ZAP = 65° 12' 36"	0.3354953
Px = 15.20.55.		tems vrai = 4^h 20' 50" 24‴	

C. cos Ax...	0.2364743
cos Px...	9.9842271
cos N...	9.7018528
cos PZ = sin H = 56° 47′ 25″	9.9225542
latitude estimée = 56.29	
erreur de l'estime = 18.25.	

97. Cette latitude doit être sûre à la minute. Ce calcul est tellement simple, qu'on ne sent pas la nécessité de chercher d'autres méthodes. Par les formules de l'article (76), et sans nous prévaloir de ce que le triangle est isoscèle, nous ferions

cos θ = 43° 53′	9.8577863	tang θ...	9.9830673
cot D′ = 20. 6.40″...	0.4363197	sin φ...	9.9501423
tang φ = 63. 4. 4....	0.2941060	C. cos(D+φ)...	0.9252939
D = 20. 6.40		tang V = 82.6.50...	0.8585035
D+φ = 83.10.44		sin D′...	9.5363587
		C. cos φ...	0.3439590
		sin (D+φ)...	9.9969150
		cos C = 41° 4′ 58″	9.8772327.

V est ici le PAB du calcul précédent, et C est le troisième côté AB.

h =	30.13.14
h' =	50. 3.55
C =	41. 4.56
2S =	121.22. 5
S =	60.41. 2.5
S − h' =	10.37.57.5

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} W = \frac{\cos\left(\frac{h+h'+C}{2}\right)\sin\left(\frac{h+h'+C}{2} - h'\right)}{\cos h \sin C} = \frac{\cos 60^\circ 41' 2'',5 \sin 10^\circ 37' 57'',5}{\cos 30^\circ 13' 14'' \sin 41^\circ 4' 56''},$$

ce qui est précisément la formule qui nous a donné ZAB; nous aurons ensuite $u = V \mp W$, et à moins de faire une figure, on ne sait trop quel signe il faut choisir; cependant comme la somme donnerait un angle obtus de 129°, et qu'il est assez évident que le point B ne saurait être dans l'angle ZAP, ce qui supposerait que l'azimut du soleil a diminué au lieu d'augmenter; nous avons une forte raison pour prendre la différence.

Nous ferons ensuite $\tang z = \cos u \cot h = \cos 35^\circ 7' 50'' \tang 59^\circ 46' 46''$; ainsi l'angle z est l'arc Ax ci-dessus; $D + z = 74^\circ 39' 5'' = 90^\circ - Px$. Les deux dernières analogies sont identiques à celles du calcul trigonométrique, nos formules sont plus générales et par là même plus obscures; il est difficile de les retenir, au lieu que la figure dicte elle-même les opérations qu'il faut faire.

98. Passons à la méthode indirecte.

latitude estimée =	56° 29′	C. sin E...	0.25792
$E = 90^\circ - H$ =	33.31	C. sin F...	0.02732
$F = 90^\circ - D$ =	69.53.20	$\sin(S-E)$...	9.87159
$90^\circ - h$ =	59.46.46	$\sin(S-F)$...	9.30717
$2S$ =	163.11. 6	$\sin^2 \frac{1}{2} P$...	19.46400
S =	81.35.33	$\sin \frac{1}{2} P$ = 32.39. 0...	9.73200
$S-E$ =	48. 4.33	P = 65.18. 0	
$S-F$ =	11.42.15	P = 65.12.36... ci-dessus.	
$90^\circ - h$ =	59.46.46	erreur = + 5.24 = 0ʰ0′21″36‴.	

L'erreur de 18′ sur la latitude produirait donc, dans ce premier calcul, une erreur de 21″,6 sur le tems vrai.

De l'angle P .... 65° 18′
retranchez la différence θ des angl. hor. 43.53

il reste pour le second angle ... P' = 21.25 cos ... 9.96893
$\cot(D + dD) = \tang F$ = 69.53.20″ 0.43632
$\tang \varphi$ = 68.31.45 .... 0.40525

$\cos \varphi$ 9.56351
C. $\sin(D + dD)$ 0.46364
$\sin h'$ 9.88467

$\cos \chi$ = 35.17.20 .... 9.91182
φ = 68.31.45

$\varphi - \chi = 90^\circ - H'$ = 33.14.25
H' = 56.45.35
ci-dessus H = 56.47.25

l'erreur est = − 1.50.

Il n'y a que les circonstances qui puissent déterminer s'il faut faire

$90°-H=\varphi-\chi$, ou $=\varphi+\chi$; ici, par exemple, $\varphi+\chi=103°\,49'\,5''$ est beaucoup trop fort, et d'ailleurs la latitude estimée lève presque toujours le doute.

La méthode est ici en erreur de près de 2'; elle est plus courte, puisqu'elle épargne le calcul du premier triangle; mais cet avantage n'est qu'apparent, puisqu'il faut maintenant calculer la correction. Nous y emploierons les formules (83).

99.	sin P...	9.95833	sin P'...	9.56247
	cos D...	9.97268	cos D'...	9.97268
	C. cos h ...	0.06344	C. cos h'...	0.19253
sin z = 80.51.35		9.99445	sin z' = 32° 17' 20"...	9.72768
cos z' = 32.17.20		9.92704	cos z.............	9.20100
$(z-z')$ = 48.34.15		0.12507	C. sin $(z-z')$.....	0.12507
H' — H = 16.55		2.99782	....	2.99782
dH = 18.28...		3.04438	dH' = 1' 53"..	2.05157
H = 56.29			H' = 55° 45.35	
H + dH = 56.47.28			H' + dH' = 56.47.28.	

$$z = 99.\ 8.25$$
$$z' = 147.42.40$$
$$z - z' = -48.54.15.$$

On voit que les deux corrections s'accordent à donner 3" de plus que la méthode directe. Pour avoir des angles aigus, j'ai pris les z extérieurement au triangle; car les deux z étaient obtus, et $(z-z')$ négatif, ce qui donne dH et dH' additifs. Au premier vertical cos P = tang D cot H = cos 76° 59'. Nos deux angles horaires sont moindres, ainsi les deux z étaient évidemment obtus.

100. Les formules 84 et 85 supposent une seconde hypothèse dont le calcul serait plus long que celui de la correction précédente. En recommençant le calcul avec H' = 56° 45' 35", on aurait H" = 56° 47' 10", beaucoup plus approchée, puisque l'erreur ne serait plus que de 15"; on pourrait se contenter de cette approximation, ou faire

$$dH = \frac{(H''-H)\sin z \cos z'}{\sin(z-z')} = 1'\,46'', \quad \text{et} \quad H = 56°\,47'\,21'',$$
$$dH'' = \frac{(H''-H')\sin z' \cos z}{\sin(z-z')} = \quad 11\,, \quad \text{et} \quad H = 56.47.21\,,$$

les solutions s'accorderaient, à 4″ près, quantité dont on ne peut répondre dans des calculs de ce genre.

101. Pour les autres formules de correction, après le calcul des deux hypothèses,

$$H = 56^\circ 29' \qquad H'-H = 16'35'' \qquad 2H' = 113.31.10$$
$$H' = 55.45.35'' \qquad H''-H' = 1.35 \qquad H+H'' = 113.16.10$$
$$H'' = 56.57.10$$
$$(H'-H)-(H''-H') = 15.\ 0 = 2H'-(H+H'') = 15.\ 0.$$

$$(H'-H)^2 \ldots\ldots 5.99564 \qquad (H''-H')^2 \ldots 3.95544$$
$$C.\ [(H'-H)-(H''-H')] \ldots\ldots 7.04576 \ldots\ldots\ldots\ldots 7.04576$$
$$dH = 18'20'' \ldots\ldots 3.04140 \qquad dH'' = +\ 10'' \quad 1.00120$$
$$H = 56.29 \qquad H'' = 56^\circ 47' 10$$
$$H+dH = 56.47.20 \qquad H''+dH'' = 56.47.20.$$

$$(H'-H) \ldots\ldots 2.99782$$
$$(H''-H') \ldots\ldots 1.97772$$
$$\text{dénomin. commun} \ldots\ldots 7.04576$$
$$dH' = 1'45'' \qquad 2.02130$$
$$H' = 56.45.35$$
$$H'+dH' = 56.47.20.$$

102. On voit que toutes nos formules de réduction s'accordent; s'il y a quelques secondes de différence entre les résultats des trois méthodes, elle ne vient que des calculs des hypothèses. Les trois méthodes sont donc bonnes au fond; mais la méthode directe mérite la préférence à tous égards.

Dans l'exemple calculé, il n'y avait aucune circonstance défavorable; un autre exemple va nous prouver qu'il est des cas, rares à la vérité, dans lesquels on ne peut compter sur aucune méthode.

$$h = 30^\circ 35' 53'', \qquad D = 7^\circ 28' \text{B}, \qquad \text{latitude estimée } 7^\circ 40' \text{B};$$
$$h' = 75.\ 7.20, \qquad H = 8.\ 0\ \text{B}, \qquad \theta = 45^\circ.$$

On voit que la latitude estimée diffère assez peu de la déclinaison; cependant elle est un peu plus forte.

103. $\cos D \ldots\ 9.99630$ $\qquad$ $\sin D \ldots\ 9.11377$

$\sin \tfrac{1}{2}\theta \ldots\ 9.58284$ $\qquad$ $\mathrm{tang}\ \tfrac{1}{2}\theta \ldots\ 9.61722$

$\sin \tfrac{1}{2} C = 22^\circ\, 17'\, 56''$ $\quad 9.57914$ $\qquad$ $\cot V = 86^\circ\, 55'\, 8'' \ldots\ 8.73099.$

$h' = 75^\circ\, 7'\, 20''$ $\qquad \cos S \ldots\ 9.40849$

$h = 30.35.53$ $\qquad$ C. $\cos h \ldots\ 0.06511$

$C = 44.35.52$ $\qquad$ C. $\sin C \ldots\ 0.15359$

$2S = 150.19.\ 5$ $\qquad (S - h') \ldots\ 2.12222$

$S = 75.\ 9.32.5$ $\qquad \sin 1'' \ldots\ 4.68557$

$S - h' = 0,\ 2.12.5$ $\qquad 16.43498$

$\sin \tfrac{1}{2} W = 8.21749$

$\tfrac{1}{2} W = 0^\circ\, 56'\, 43'',5$

$W = 1.53.27$

$V = 86.55.\ 8$

$\cos u = V - W = 85.\ 1.41 \ldots\ldots\ldots\ 8.93786$

$\cot h \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 0.22815$

$\mathrm{tang}\ z = 8.20.16 \ldots\ldots\ldots\ 9.16601$

$D = 7.28$

C. $\cos z \ldots\ 0.00462$

$D + z = 15.48.16 \ldots\ \sin \ldots\ 9.43513$

$\sin h \ldots\ 9.70673$

$H = 8^\circ\, 3'\, 17'' \ldots\ 9.14648.$

Dans cet exemple, les h ont été déterminés en supposant $H = 8^\circ\, 0'\, 0''$; ainsi l'erreur de la formule est $3'\, 17''$; mais si les h eussent été véritablement observés, il aurait pu se faire que $(S - h')$, qui n'est que de $2'\, 12'',5$, se fût réduit à rien. Il est vrai que s'il y a une erreur sur h, qui soit celle de l'instrument, elle sera la même aussi sur h' et sur S, nulle par conséquent sur $(S - h')$. Si l'on trouvait $S - h' = 0$, on aurait $W = 0$ et $u = V$; ainsi

$\cos u = \cos V \ldots\ 8.73038$

$\cot h \ldots\ 0.22815$

$\mathrm{tang}\ z = 5.11.37 \ldots\ldots\ 8.95853$

$D = 7.28$ $\qquad$ C. $\cos z \ldots\ 0.00179$

$D + z = 12.39.37$ $\qquad \sin \ldots\ 9.34078$

$\sin h \ldots\ 9.70673$

$H \ldots\ 6.25.55 \ldots\ldots\ldots\ 9.04930$

erreur... $1.34.\ 5.$

L'erreur du calcul surpasserait de beaucoup celle de l'estime. Si l'on se trompait sur le signe de W, on trouverait $u = 88° 48' 35''$; la latitude calculée serait 4° 48' 41''; l'erreur serait 3° 14' 36''. On voit qu'à cet égard l'incertitude n'est pas bien à craindre. Mais nous avons (81) dans la valeur de dH' un terme $\frac{dh'}{\cos z'}$ qui sera bien fort si $\cos z'$ est une petite fraction; on ne pourra donc, en ce cas, donner la moindre confiance à la méthode. Au reste, on est averti par la valeur de $(S-h')$, qui est alors fort petite, parce que $h' = h + C$ à fort peu près. Au reste, des circonstances aussi défavorables se présenteront rarement et ne dureront que peu de jours, à moins que le soleil ne soit voisin du solstice, et la route du vaisseau parallèle à l'équateur.

104. Si la méthode trigonométrique est en défant, on peut bien compter que les méthodes d'approximation ne sont pas plus sûres; essayons cependant les formules 88 et 89, comme exemples, et pour en montrer l'usage.

$h =$	50° 55' 53''		
$h' =$	75. 7.20		
$h'+h =$	105.43.13		
$h'-h =$	44.31.27		
$\frac{1}{2}(h'+h) =$	52.51.36.5	cos...	9.78087
$\frac{1}{2}(h'-h) =$	22.15.43.5	sin...	9.57846
$P-P' =$	45	C. cos D...	0.00370
$\frac{1}{2}(P+P') =$	22.30. 0	C. sin...	0.41716
$H =$	7.40. 0	C. cos...	0.00390
$\sin\frac{1}{2}(P+P') =$	37.27.50		9.78409
$P =$	59.57.50		
$P' =$	14.57.50	2...	0.30103
$\frac{1}{2}P' =$	7.28.55	cos D...	9.99630
$\frac{1}{2}P =$	29.58.55	cos H...	9.99610
		2 cos D cos H...	0.29343
		$\sin^2\frac{1}{2}P'$...	8.22931
		0.03332...	8.52274
	$\sin h'$...	0.96647	
$\cos(H-D) =$	1.10.0...	0.99979...	9.99991
$D =$	7.28		
$H' =$	8.38		
$H =$	7.40		
$H'-H =$	0.58.		

	2cos D cos H...	0.29343
	$\sin^2 \frac{1}{2}$ P...	9.39747
	0.49082	9.69090
	sin h... 0.50901	
cos(H—D) = 1° 1′ 40″	9.99983...	9.99995
D = 7.28. 0		
H′ = 8.29.40		
H = 7.40		
H′—H = 49.40.		

	2cos D cos H...	0.29343
	$\cos^2 \frac{1}{2}$ P′...	9.99257
	1.93197...	0.28600
	sin h'... 0.96647	
cos(H+D) = 15. 5.40	0.96550...	9.98475
D = 7.28. 0		
H′ = 7.37.40		
H = 7.40		
H′—H = — 2.20.		

	2cos D cos H...	0.29343
	$\cos^2 \frac{1}{2}$ P...	9.87522
	1.47452	0.16865
	sin h... 0.50901	
cos(H+D) = 15. 2.50	0.96551...	9.98476
D = 7.28		
H′ = 7.34.50		
H = 7.40		
H′—H = — 5.10.		

105. En calculant ainsi les quatre formules à la fois, on n'a guères plus de travail que pour en calculer une dans les autres méthodes. L'extrême diversité des résultats prouve l'incertitude de la solution, dans le cas où H et D diffèrent aussi peu.

Nous

Nous avons d'une part H = 8.38 } 8.33.50 ;
et 8.29.40

de l'autre 7.37.40 } 7.36.15.
7.34.50

Somme des deux moyennes..... 16.10. 5.

Milieu des quatre.... 8. 5. 2.

Nous avons déjà la latitude, à cinq minutes près, et beaucoup mieux que par l'estime ; et en effet, l'erreur de H doit influer différemment sur cos (H—D) et sur cos (H+D) ; nous avons

$$\cos(H-D) = \sin h + 2\cos H \cos D \sin^2 \tfrac{1}{2}P,$$
$$\cos(H+D) = 2\cos H \cos D \cos^2 \tfrac{1}{2}P - \sin h;$$

si nous avons fait P trop grand, cos(H—D) sera trop grand, (H—D) et H trop petits ; cos(H+D) sera trop petit, (H+D) et H trop grands. Nous trouvons tout le contraire, ainsi P est probablement trop petit.

106. On peut corriger ces résultats par les formules 92, 93, 94 et 95.

— 2 —	0.30103
cos D...	9.99630
sin H...	9.12519
C. cos ½(P+P')...	0.10032
log commun —	9.52284
sin ½P...	9.69873
sin ½P'...	9.11465
C. sin ½(H—D) = 12' —	2.45709
a = 6.2132 +	0.79331
1	
C. + 7.2132	9.14187
(H'—H) = 58'	3.54158
+ 8' 2"	2.68345
7.40	

H'' = 7.48.2 = latitude corrigée.

$$
\begin{array}{rll}
 & \text{C. log} - a - 9.20669 & \\
\frac{1}{a} = & -\ 0.16095 & \\
 & -\ 1 & \\
\text{C.} \ldots & -\ 1.16095 - 9.93519 & \\
\text{H}'-\text{H} = & 58' \ldots\ldots\ 3.54158 & \\
d\text{H}' = & -\ 49.58'' \ldots -\ 3.47677 & \\
\text{H}' = & 8.38.\ 0 & \\
\text{H}'' & 7.48.\ 2. &
\end{array}
$$

Nos deux formules s'accordent, mais elles sont loin ici de corriger l'erreur; la latitude corrigée est encore trop faible de 12'. Nous avons corrigé notre premier calcul, qui nous donnait H' = 8° 38'; corrigeons de même celui qui nous a donné 8° 29' 40".

107. $$
\begin{array}{rll}
 & \text{C. } 7.2132 \ldots + 9.14187 & \text{C.} - 1.16095 - 9.93519 \\
\text{H}'-\text{H} = & 49'\,40'' \ldots\ 3.47421 \ldots\ldots & 3.47421 \\
d\text{H} = & +\ 6.53\ \ +\ 2.61608 & d\text{H}' = -42'\,47''\ \ 3.40940 \\
\text{H} = & 7.40.\ 0 & \text{H}' = 8.29.40 \\
\text{H}'' = & 7.46.53'' \ldots\ldots & 7.46.53.
\end{array}
$$

Nos deux formules s'accordent encore; mais l'erreur est ici — 13' 7".

108. Corrigeons maintenant les valeurs obtenues par cos(H+D). Ce cosinus étant moins grand, les calculs doivent être un peu meilleurs.

$$
\begin{array}{rl}
\text{Log commun} & -\ 9.52284 \\
\cos\frac{1}{2}\text{P} \ldots & 9.93761 \\
\cos\frac{1}{2}\text{P}' \ldots & 9.99628 \\
\text{C. sin(D+H)} \ldots & 0.58434 \\
b - 1.09920 & -\ 0.04107 \\
+\ 1 & \\
-\ 0.09920 & -\ 1.00349 \\
(\text{H}'-\text{H}) = -\ 2'\,20'' & -\ 2.14613 \\
d\text{H} = +\ 23.31 & +\ 3.14962 \\
\text{H} = & 7.40 \\
\text{H}'' = & 8.\ 3.31.
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\text{C. log}\,b & -\ 9.95893 \\
\frac{1}{b} = & -\ 0.90977 \\
 & -\ 1.0 \\
\text{C.} - 0.09023 & -\ 1.04465 \\
(\text{H}'-\text{H}) = -\ 2'\,20'' & -\ 2.14613 \\
d\text{H}' = +\ 25.51 & +\ 3.19078 \\
\text{H}' = & 7.37.40 \\
\text{H}'' = & 8.\ 3.31.
\end{array}
$$

$$\begin{array}{llll} & -\ 1.00349 & & -\ 1.04465 \\ H'-H = -\ 5'\ 10'' & -\ 2.49136 \ldots\ldots & & -\ 2.49136 \\ dH = +\ 52.\ 5 & +\ \overline{3.49485} & dH' = +\ 57'\ 16'' & +\ \overline{3.53601} \\ H = \ 7.40 & & H' = \ 7.34.50 & \\ H'' = \ \overline{8.32.\ 5} & & \overline{8.32.\ 6.} & \end{array}$$

Toujours même accord entre les formules, mais les résultats sont bien loin de s'accorder; il s'en trouve un qui est assez bon dans le nombre, mais rien ne le distingue.

109. Tout ceci confirme l'idée que la préférence est due au calcul direct. Nous ne sommes entrés dans ces détails qu'en raison de l'importance que tous les navigateurs ont attaché à ces méthodes indirectes; elles peuvent être aussi sûres et plus faciles en certains cas, et quand on ne cherche pas une grande précision; mais la différence est si peu de chose, qu'on ne saurait trop recommander le calcul rigoureux. Le premier inventeur de cette méthode est Douwes, qui l'avait mise en tables peu volumineuses, mais qui n'étaient pas toujours assez exactes. On a voulu perfectionner sa solution, et on l'a rendue plus embarrassante que le calcul trigonométrique. M. Lévêque a étendu les Tables de Donwes. Les formules sont :

$$\sin\tfrac{1}{2}(P+P') = \frac{\sin h' - \sin h}{2\cos H \cos D \sin\frac{1}{2}(P-P')},$$

et

$$\cos(H-D) = 2\sin^2\tfrac{1}{2}P'\cos H\cos D + \sin h;$$

la table première donne le log. du facteur $\frac{1}{\sin\frac{1}{2}(P-P')}$; le calculateur cherche log $\left(\frac{1}{\cos H \cos D}\right)$ et log$(\sin h' - \sin h)$; la somme des trois log. $= \log 2\sin\frac{1}{2}(P+P')$; avec ce logarithme, la colonne suivante donne le tems correspondant à $\frac{1}{2}(P+P')$. On retranche ce tems du demi-intervalle; le reste est P', ou la distance horaire à midi, pour le tems de la plus grande hauteur, ce qui donne d'abord la correction de la montre. On cherche ensuite, dans une troisième colonne de la même table, le log. du sin. verse de P'; on en retranche log $\left(\frac{1}{\cos H \cos D}\right)$ trouvé ci-dessus, on a le log. de $2\sin^2\frac{1}{2}P'\cos H\cos D$, il ne faut plus qu'y

ajouter $\sin h'$ en nombres, pour avoir $\cos(H-D)$; que l'on cherche dans la table des sinus naturels, on a donc $(H-D)$ et $H=(H-D)+D$.

M. Mendoza, dans sa grande collectiou de Tables nautiques, a mis le calcul trigonométrique en tables qui me paraissent d'un usage aussi facile et beaucoup plus sûr.

Mais si l'on se contentait de tables dans le genre de celles de Douwes, il semble qu'il y aurait de l'avantage à les construire sur les formules qui font trouver $\cos(H+D)$.

110. Nous avons supposé, dans ces exemples, que la déclinaison du soleil n'a pas changé dans l'intervalle des observations; si elle a changé, au lieu de traiter le triangle APB comme isoscèle, on le calculera comme scalène, ainsi que nous avons fait dans le premier calcul. C'est le moyen le plus sûr et le plus simple, et c'est un des avantages du calcul direct. On pourrait encore corriger la première hauteur du changement de déclinaison; soit dD ce changement, $dD\cos A$ sera le changement de la hauteur, A étant l'angle au soleil entre le vertical et le cercle de déclinaison $dD\cos A = dD\left(\frac{\sin h' - \sin D \sin H}{\cos D \cos H}\right)$.

111. Nous avons supposé le vaisseau immobile, ce qui n'arrivera que bien rarement; ainsi, avant que de commencer le calcul, il faudra corriger la plus petite hauteur du mouvement du vaisseau dans l'intervalle.

Supposons qu'au tems où le soleil était en A (fig. 122), et le zénit du vaisseau en Z, on ait mesuré la hauteur $h=90°-ZA$; que, quelques heures après, le soleil étant monté en B et le zénit du vaisseau étant arrivé en Z', on ait mesuré la hauteur $h'=90°-Z'B$.

L'intervalle des observations donne l'angle APB; on connaît.. $PA=90°-D$ et $PB=90°-D'$; on calcule PAB et le côté AB, tout cela ne dépend que du mouvement du soleil.

A l'instant de l'observation du soleil en A, si le zénit eût été en Z', comme pour la seconde observation, on aurait eu Z'A au lieu de ZA, et l'angle horaire Z'PA, au lieu de ZPA. Abaissez la perpendiculaire Z'a sur ZA,

$$Z'A = Aa + \tang^2\tfrac{1}{2}Z'AZ\sin 2ZA = ZA - Za + \sin^2\tfrac{1}{2}Z'AZ\sin 2ZA$$
$$= ZA - ZZ'\cos Z'ZA + \tfrac{1}{4}\sin^2 Z'AZ\sin 2ZA,$$

$$h_{,} = 90^\circ - Z'A = 90^\circ - ZA + ZZ' \cos Z'ZA - \tfrac{1}{4}\left(\frac{ZZ' \sin Z'ZA}{\sin Z'A}\right)^2 \sin 2ZA$$
$$= h + R\cos Q - \frac{\tfrac{1}{4} R^2 \sin^2 Q \sin 2ZA}{\sin^2 Z'A}$$
$$= h + R\cos Q - \frac{\tfrac{1}{2} R^2 \sin^2 Q \sin ZA \cos ZA}{\sin^2 ZA}$$
$$= h + R\cos Q - \tfrac{1}{2} R^2 \sin^2 Q \cot ZA$$
$$= h + R\cos Q - \tfrac{1}{2} R^2 \sin^2 Q \tang h.$$

R est la route du vaisseau en arc de grand cercle et en secondes, Q l'angle de la route avec le vertical du soleil, dans la première observation. On connaît toujours $Z'Zb$, angle de la route avec le méridien; on peut observer ou calculer AZP, on aura donc $Q = AZZ' = 180^\circ - AZP - Z'Zb$.

Si l'angle $Q = 90^\circ$, la correction est nulle; si l'angle est aigu ou passe 270°, c'est-à-dire, si le vaisseau a marché plus ou moins obliquement vers le soleil, la correction est additive à la hauteur observée h; si l'angle est obtus, elle sera soustractive.

Au moyen de cette correction, vous pouvez calculer le triangle scalène APB, le triangle AZ'B, le triangle Z'PB; la latitude calculée sera le complément de PZ', les deux angles horaires seront Z'PA et Z'PB; ces angles se rapporteront au zénit Z' et au méridien PZ'. Pour les réduire au méridien primitif PZ, il faudra y ajouter Z'PZ, la différence sera

$$Z'Pb = \frac{Z'b}{\sin PZ'} = \frac{Z'Z \sin bZZ'}{\sin PZ'} = \frac{R \sin bZZ'}{\sin PZ'} = \frac{R \sin(AZb - AZZ')}{\sin PZ'} = \frac{R \sin(Z-Q)}{\cos H},$$

Z étant l'azimut du soleil compté du midi vers l'orient.

$R\cos(Z-Q) = Zb =$ différence de latitude entre les zénits Z' et Z. Le calcul donne la latitude de $Z' = H'$,

$$H' + R\cos(Z-Q) = H = \text{latitude du zénit } Z.$$

112. On peut trouver l'heure par les hauteurs correspondantes.

Le vaisseau ayant son zénit en Z (fig. 123), on a observé $h = 90^\circ - ZA$.

Le même vaisseau ayant ensuite son zénit en Z', on a observé $h' = 90^\circ - Z'B$,

$$\sin h = \cos P \cos H \cos D + \sin H \sin D,$$
$$\sin h' = \cos P' \cos H' \cos D' + \sin H' \sin D'.$$

Supposez $h = h'$, vous aurez

$$o = \cos P \cos H \cos D - \cos H' \cos P' \cos D' + \sin H \sin D - \sin H' \sin D',$$

le tems écoulé donne

$$APB = APZ + ZPZ' + Z'PB = P + m + P' = 15(T' - T),$$
$$P + P' = 15(T' - T) - m = 15(T' - T) - 15\mu = 15(T' - T - \mu).$$

Ici le zénit marche dans le même sens que le soleil; si c'était le contraire, m changerait de signe; on connaît donc $P + P'$ et $\frac{1}{2}(P + P') = M$, on connaît $\frac{1}{2}(D + D') = N$; je suppose que l'on connaisse $(H' + H)$ et $\frac{1}{2}(H' + H) = Q$, on connaît $H' - H$ et $\frac{1}{2}(H' - H) = a$, $\frac{1}{2}(D' - D) = b$; on demande $\frac{1}{2}(P' - P) = x$; $P = (M - x)$, $P' = (M + x)$, $D = (N - b)$, $D' = (N + b)$, $H = Q - a$, $H' = Q + a$.

Nous aurons donc

$$o = \cos(M - x)\cos(Q - a)\cos(N - b) - \cos(M + x)\cos(Q + a)\cos(N + b)$$
$$+ \sin(Q - a)\sin(N - b) - \sin(Q + a)\sin(N + b);$$

développez ces sinus et ces cosinus, exécutez les multiplications, vous aurez, en ordonuant et transposant,

$$\sin x + \cos x \left(\frac{\cos M \sin Q \sin a \cos N \cos b + \cos M \cos Q \cos a \sin N \sin b}{\sin M \cos Q \cos a \cos N \cos b + \sin M \sin Q \sin a \sin N \sin b}\right)$$
$$= \frac{\cos Q \sin a \sin N \cos b + \sin Q \cos a \cos N \sin b}{\sin M \cos Q \cos a \cos N \cos b + \sin M \sin Q \sin a \sin N \sin b},$$

$$\sin x + \cos x \left(\frac{\operatorname{tang} a \operatorname{tang} Q \cot M + \operatorname{tang} b \operatorname{tang} N \cot M}{1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} Q \operatorname{tang} N}\right)$$
$$= \frac{\operatorname{tang} a \operatorname{tang} N + \operatorname{tang} b \operatorname{tang} Q}{\sin M(1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} Q \operatorname{tang} N)},$$

$$\sin x + \cos x \cot M \left(\frac{\operatorname{tang} a \operatorname{tang} Q + \operatorname{tang} b \operatorname{tang} N}{1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} Q \operatorname{tang} N}\right) = \frac{\operatorname{tang} a \operatorname{tang} N + \operatorname{tang} b \operatorname{tang} Q}{\sin M(1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} N \operatorname{tang} Q)},$$

$$\sin \tfrac{1}{2}(P' - P) + \cos \tfrac{1}{2}(P' - P) \cot M \left(\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} dH \operatorname{tang} \frac{1}{2}(H' + H) + \operatorname{tang} \frac{1}{2} dD \operatorname{tang} \frac{1}{2}(D' + D)}{1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} dH \operatorname{tang} \frac{1}{2} dD \operatorname{tang} \frac{1}{2}(H' + H) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(D' + D)}\right)$$
$$= \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} dH \operatorname{tang} \frac{1}{2}(D' + D) + \operatorname{tang} \frac{1}{2} dD \operatorname{tang} \frac{1}{2}(H' + H)}{\sin \frac{1}{2}(P + P')[1 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} dH \operatorname{tang} \frac{1}{2} dD \operatorname{tang} \frac{1}{2}(H' + H) \operatorname{tang} \frac{1}{2}(D' + D)]};$$

en négligeant les dH et dD qui sont au dénominateur, on ne négligera que des termes du troisième ordre; en négligeant $\cos \frac{1}{2}(P' - P)$, on ne néglige encore que des termes de cet ordre; ainsi

$$\tfrac{1}{2}(P'-P)=\frac{\tfrac{1}{2}dH\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(D'+D)+\tfrac{1}{2}dD\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(H'+H)}{\sin\tfrac{1}{2}(P'+P)}-\tfrac{1}{2}dH\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(H'+H)\cot\tfrac{1}{2}(P'+P)$$
$$-\tfrac{1}{2}dD\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(D'+D)\cot\tfrac{1}{2}(P'+P)$$
$$=\tfrac{1}{2}dH\left(\frac{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(D'+D)}{\sin\tfrac{1}{2}(P'+P)}-\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(H'+H)\cot\tfrac{1}{2}(P'+P)\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}dD\left(\frac{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(H'+H)}{\sin\tfrac{1}{2}(P'+P)}-\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(D'+D)\cot\tfrac{1}{2}(P'+P)\right),$$
$$\tfrac{1}{15}P'=\tfrac{1}{2}(T'-T-\mu)+\frac{dH}{30}\left(\frac{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(D'+D)}{\sin\tfrac{15}{2}(T'-T-\mu)}-\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(H'+H)\cot\tfrac{15}{2}(T'-T-\mu)\right)$$
$$+\frac{dD}{30}\left(\frac{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(H'+H)}{\sin\tfrac{15}{2}(T'-T-\mu)}-\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(D'+D)\cot\tfrac{15}{2}(T'-T-\mu)\right).$$

Au moyen de cette formule on aura l'heure de la seconde observation, et la comparant à l'heure de la montre, on aura la correction du tems de la montre.

113. Le passage du soleil au méridien PZ′, en tems de la montre, sera

$$\tfrac{1}{2}(T'+T)-\frac{dH}{30}\left(\frac{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(D'+D)}{\sin\tfrac{15}{2}(T'-T-\mu)}-\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(H'+H)\cot\tfrac{15}{2}(T'-T-\mu)\right)$$
$$-\frac{dD}{30}\left(\frac{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(H'+H)}{\sin\tfrac{15}{2}(T'-T-\mu)}-\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(D'+D)\cot\tfrac{15}{2}(T'-T-\mu)\right).$$

La seconde partie est l'équation ordinaire des hauteurs correspondantes; la première est une équation toute semblable pour le changement dH, qui est le changement de la déclinaison du zénit, comme dD est le changement de la déclinaison du soleil. On pouvait d'avance prévoir ce résultat du calcul.

114. On peut aussi trouver la latitude par l'observation de deux hauteurs quelconques du soleil, prises de part et d'autre du méridien.

Soient ZA et Z′B (fig. 124) les complémens des deux hauteurs; le tems écoulé donnera l'angle APB; calculez comme ci-dessus Z′A et ZPZ′. Soit Z′A = N, Z′B = N′, Z′PA = P, Z′PB = P′. Nous avons trouvé (XIX. 45)

$$\sin\tfrac{1}{2}(P-P')=\frac{\sin\tfrac{1}{2}(N-N')\sin\tfrac{1}{2}(N+N')}{\cos H\cos\tfrac{1}{2}(D'+D)\cos\tfrac{1}{2}(D'-D)\sin\tfrac{1}{2}(P+P')}$$
$$-\frac{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(D'-D)}{\sin\tfrac{1}{2}(P+P')}\left[\text{tang}\,H-\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(D'+D)\cos\tfrac{1}{2}(P+P')\cos\tfrac{1}{2}(P-P')\right].$$

Vous calculerez cette formule avec la latitude estimée; l'erreur de

cos H ne sera jamais bien sensible sur le premier terme; celle de tang H sera encore moindre sur le très-petit terme tang $\frac{1}{2}$(D′—D); on aura donc fort bien $\frac{1}{2}$(P—P′), P′ et P. Sur PZ′ prolongé, abaissez l'arc perpendiculaire BC. Faites

$$\text{tang PC} = \cos \text{BPC} \,\text{tang PB} = \cos \text{P}' \cot \text{D}' = \text{tang}\,\varphi,$$

$$\cos \text{PB} : \cos \text{Z}'\text{B} :: \cos \text{PC} : \cos \text{ZC} = \cos \psi = \frac{\cos \text{PC} \cos \text{Z}'\text{B}}{\cot \text{PB}} = \frac{\cos \varphi \cos \text{N}'}{\sin \text{D}},$$

$$\varphi - \psi = \text{PC} - \text{ZC} = \text{PC} - (\text{PC} - \text{PZ}') = \text{PZ}' = 90^\circ - \text{H}.$$

115. On aura l'erreur de la montre, quoique l'on se trompe de quelques minutes sur la latitude estimée, si l'on prend deux hauteurs à peu près égales avant et après le passage, si l'on calcule séparément les deux triangles; car supposons que l'on se trompe de PP′ sur la latitude, que le pôle soit véritablement en P et qu'on l'ait placé en P′, en calculant le triangle P′ZA au lieu de PZA, on aura un angle trop faible; supposons que l'on se trompe d'une minute et qu'on trouve pour l'heure vraie $9^h\,1'$, tandis qu'il n'est que 9^h, si la montre marque $9^h\,10'$, on la jugera en avance de $9'$, tandis qu'elle l'est véritablement de $10'$.

Le soir, en calculant le triangle P′ZB au lieu de PZB, vous aurez un angle trop faible; vous croirez qu'il est $2^h\,59'$ tems vrai, au lieu de 3^h; vous jugerez la montre, qui marque $3^h\,10'$, en avance de $11'$ au lieu de 10; le milieu entre les deux sera $\frac{11'+9'}{2} = \frac{20}{2} = 10'$ sera l'erreur vraie de la montre. Si les hauteurs sont peu différentes, l'erreur de la latitude produira des effets égaux et opposés, qui se détruiront.

116. On peut enfin trouver la latitude par trois hauteurs du soleil, avec l'intervalle des observations. Soient P le plus petit des trois angles horaires, (P+a) et (P+b) les deux autres, N, N′, N″ les trois distances au zénit. Nous avons (XVIII. 84)

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{\sin\frac{1}{2}(\text{N}'-\text{N})\sin\frac{1}{2}(\text{N}'+\text{N})\sin b}{\sin\frac{1}{2}(\text{N}''-\text{N})\sin\frac{1}{2}(\text{N}''+\text{N})\sin\frac{1}{2}a},$$

$$\text{tang}\left(\text{P}+\frac{b+a}{4}\right) = \text{tang}\tfrac{1}{4}(b-a)\,\text{tang}(45^\circ-\varphi),\quad \text{P} = \left(\text{P}+\frac{b+a}{4}\right) - \left(\frac{b+a}{4}\right),$$

$$\cos \text{H} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\text{N}'-\text{N})\sin\frac{1}{2}(\text{N}'+\text{N})}{\cos \text{D} \sin\frac{1}{2}a \sin(\text{P}+\frac{1}{2}a)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\text{N}''-\text{N})\sin\frac{1}{2}(\text{N}''+\text{N})}{\cos \text{D} \sin\frac{1}{2}b \sin(\text{P}+\frac{1}{2}b)}.$$

Ces formules, rigoureuses pour une étoile dont la déclinaison est constante,

constante, le sont un peu moins pour le soleil; mais on peut corriger les distances N'' et N' du mouvement du soleil en déclinaison, et du mouvement du vaisseau dans l'intervalle; il faudrait aussi corriger *a* et *b* du mouvement en longitude; mais toutes ces attentions rendent la solution peu commode.

117. Nous avons dit que le vaisseau dirigé par la boussole fait un angle constant avec le méridien; il en résulte que sa route ne peut être un grand cercle, à moins qu'elle ne se confonde avec le méridien ou avec l'équateur. Toute route oblique est une courbe à double courbure; car (fig. 125) on aurait $\sin B = \frac{\sin PA \sin A}{\sin PB}$; l'angle changerait donc continuellement avec la distance polaire. Pour conserver PBC = PAB, on est donc obligé à chaque instant de faire agir le gouvernail pour écarter le vaisseau du grand cercle; il en résulte qu'on ne peut tracer la route du vaisseau sur une carte ordinaire où les méridiens convergent vers le pôle; car cette route y serait une courbe impossible à tracer. Pour éviter cet inconvénient, on a imaginé des cartes où les méridiens sont des droites parallèles; il en résulte cet autre inconvénient, que tous les parallèles deviennent égaux à l'équateur, au lieu de diminuer, comme sur le globe, en raison du cosinus de la latitude. Soit G le degré de l'équateur, G cos H sera le degré du parallèle; ces deux degrés sont donc entr'eux :: G : G cos H :: G séc H : G. Ne pouvant faire diminuer le degré du parallèle comme le cosinus, on a fait croître le degré du méridien comme la sécante; par là le rapport naturel est conservé, la route supposée rectiligne AB (fig. 125) coupe tous les méridiens sous le même angle; la route en longitude BC, et le chemin en latitude AC, ont sur la carte le même rapport que sur le globe.

118. Soit dH un petit arc du méridien, il sera représenté sur la carte par

$$\frac{dH}{\cos H} = \frac{dH \cos H}{\cos^2 H} = \frac{d \sin H}{\cos^2 H} = \frac{d \sin H}{1 - \sin^2 H} = \frac{dx}{1 - xx} = \frac{1}{2} d \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right);$$

tel est l'élément du méridien; l'intégrale

$$\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin H}{1-\sin H}\right)=\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{\sin 90^\circ+\sin H}{\sin 90^\circ-\sin H}\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{2\sin(45^\circ+\frac{1}{2}H)\cos(45^\circ-\frac{1}{2}H)}{2\sin(45^\circ-\frac{1}{2}H)\cos(45^\circ+\frac{1}{2}H)}\right)$$

$$=\tfrac{1}{2}\log\text{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}H)\cot(45^\circ-\tfrac{1}{2}H)$$

$$=\tfrac{1}{2}\log\text{tang}^2(45^\circ+\tfrac{1}{2}H)=\log\text{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}H)\,;$$

ou $$=\sin H+\tfrac{1}{3}\sin^3 H+\tfrac{1}{5}\sin^5 H+\tfrac{1}{7}\sin^7 H+\text{etc.}\ldots(A)$$

Ainsi l'arc du méridien, compté depuis l'équateur jusqu'au point dont la latitude est H, sera $=\log\text{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}H)$; ce logarithme sera népérien; pour obtenir l'arc par les logarithmes vulgaires, il faut ajouter à ceux-ci le log. tabulaire du log. népérien de 10, et si vous voulez exprimer l'arc du méridien en minutes de degré, vous ferez

$$\log\text{arc du mérid.}=\log(\log\text{nép.}10)+\log\log\text{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}H)-\log\sin 1',$$
$$\text{arc du mérid.}=7915'7046741\log\text{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}H);$$

supposons qu'on demande l'arc de 1° du méridien, à partir de l'équateur,

au log constant....................	3.89848.95715
ajoutez le log de log (tang 45° 30').......	7.87968.64
60',0034.....	1.7781760.

119. Cette formule est bien simple, quand on n'a qu'un seul arc à calculer; mais si l'on voulait une table de minute en minute, comme celle de M. de Mendoza, la construction en serait encore assez fastidieuse; mais $d\,\text{arc}=\frac{dH}{\cos H}$, ou plus exactement,

$$\frac{dH}{\cos(H+\frac{1}{2}dH)}=\frac{dH}{\cos H\cos\frac{1}{2}dH-\sin H\sin\frac{1}{2}dH}=\frac{\left(\frac{dH\,\text{séc}\,\frac{1}{2}dH}{\cos H}\right)}{1-\text{tang}\frac{1}{2}dH\,\text{tang}H}$$
$$=\left(\frac{dH\,\text{séc}\,\frac{1}{2}dH}{\cos H}\right)(1+\text{tang}\tfrac{1}{2}dH\,\text{tang}\,H).$$

On ne peut desirer une expression plus simple pour les différences premières, qui d'ailleurs varient lentement.

La différence seconde $= \frac{dH}{\cos H'} - \frac{dH}{\cos H} = dH\left(\frac{\cos H - \cos H'}{\cos H \cos H'}\right)$

$$= dH\left(\frac{2\sin\frac{1}{2}(H'-H)\sin\frac{1}{2}(H'+H)}{\cos H\cos H'}\right) = \frac{2dH\sin\frac{1}{2}dH\sin(H+\frac{1}{2}dH)}{\cos H\cos H'}$$

$$= \frac{dH\sin dH\sin(H+\frac{1}{2}dH)}{\cos^2(H+\frac{1}{2}dH)} = \frac{(dH)^2\sin 1'.\sin H}{\cos^2 H}$$

$$= (\text{différence première})^2 \sin 1' \sin H,$$

expression plus simple encore, qui prouve que la différence seconde sera long-tems insensible. C'est ainsi que, par de simples additions, j'ai calculé la table des *latitudes croissantes* pour la sphère.

120. Pour tenir compte de l'aplatissement de la terre, soit 1 le demi-grand axe, e l'excentricité, dA l'élément du méridien elliptique, $dA = \frac{dH(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}}$; le rayon du parallèle $= \frac{\cos H}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}$.

$$\frac{dA}{\text{rayon du parallèle}} = \frac{dH(1-e^2)(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{1}{2}}}{(1-e^2\sin^2 H)^{\frac{3}{2}}\cos H} = \frac{dH}{\cos H}\left(\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2 H}\right)$$

$$= \frac{dH\cos H}{\cos^2 H}\left(\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2 H}\right) = \frac{d\sin H}{\cos^2 H}\left(\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2 H}\right)$$

$$= \frac{d\sin H(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 H)(1-\sin^2 H)}$$

$$= \frac{d\sin H - e^2 d\sin H + e^2\sin^2 H d\sin H - e^2\sin^2 H d\sin H}{(1-e^2\sin^2 H)(1-\sin^2 H)}$$

$$= \frac{d\sin H(1-e^2\sin^2 H) - e^2 d\sin H(1-\sin^2 H)}{(1-e^2\sin^2 H)(1-\sin^2 H)}$$

$$= \frac{d\sin H}{1-\sin^2 H} - \frac{e^2 d\sin H}{1-e^2\sin^2 H} = \frac{d\sin H}{1-\sin^2 H} - e\,\frac{de\sin H}{1-e^2\sin^2 H}$$

$$= \frac{d\sin H}{1-\sin^2 H} - e\,\frac{d\sin h}{1-\sin^2 h};$$

en faisant $\sin h = e\sin H$;

arc du mérid. $= \log\tang(45^\circ + \frac{1}{2}H) - \frac{1}{2}e\log\left(\frac{1+e\sin H}{1-e\sin H}\right)$

$$= \log\tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}H) - e\log\tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}h),$$

$$= \log\tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}H) - \log\left(\frac{1+e\sin H}{1-e\sin H}\right)^{\frac{e}{2}}$$

$$= \log\left[\tang(45^\circ + \tfrac{1}{2}H)\left(\frac{1-e\sin H}{1+e\sin H}\right)^{\frac{e}{2}}\right] = \log\tang z,$$

en faisant $\tang z = \tang(45^\circ + \frac{1}{2}H)\left(\frac{1-e\sin H}{1+e\sin H}\right)^{\frac{e}{2}}$;

$$= \log \text{tang}(45°+\tfrac{1}{2}\text{H}) - \tfrac{1}{2}e\left\{\begin{array}{l} e\sin\text{H} - \tfrac{1}{2}e^2\sin^2\text{H} + \tfrac{1}{3}e^3\sin^3\text{H} - \text{etc.} \\ +e\sin\text{H} + \tfrac{1}{2}e^2\sin^2\text{H} + \tfrac{1}{3}e^3\sin^3\text{H} + \text{etc.} \end{array}\right\}$$

$$= \log \text{tang}(45°+\tfrac{1}{2}\text{H}) - e\,(e\sin\text{H} + \tfrac{1}{3}e^3\sin^3\text{H} + \tfrac{1}{5}e^5\sin^5\text{H})$$

$$= \log \text{tang}(45°+\tfrac{1}{2}\text{H}) - e^2\sin\text{H} - \tfrac{1}{3}e^4\sin^3\text{H} - \tfrac{1}{5}e^6\sin^5\text{H} - \text{etc.},$$

expression commode et que l'on continuerait à volonté si les e^6 n'étaient déjà insensibles. On la changerait (A) en

$$(1-e^2)\sin\text{H} + \tfrac{1}{3}(1-e^4)\sin^3\text{H} + \tfrac{1}{5}(1-e^6)\sin^5\text{H} + \text{etc.},$$

expression plus curieuse qu'utile; il vaut mieux s'en tenir à celle-ci

$$= \log \text{tang}(45°+\tfrac{1}{2}\text{H}) - e^2\sin\text{H} - \tfrac{1}{4}e^4\sin\text{H} + \tfrac{1}{12}e^4\sin 3\text{H}$$

$$= \log \text{tang}(45°+\tfrac{1}{2}\text{H}) - (e^2+\tfrac{1}{4}e^4)\sin\text{H} + \tfrac{1}{12}e^4\sin 3\text{H}.$$

Soit a l'aplatissement, la dernière expression deviendra

$$= \log \text{tang}(45°+\tfrac{1}{2}\text{H}) - (2\text{a}-\text{a}^2)\sin\text{H} + \tfrac{1}{3}(\text{a}^2-\text{a}^3)\sin 3\text{H}$$

$$= \log \text{tang}(45°+\tfrac{1}{2}\text{H}) - \frac{2\text{a}\sin\text{H}}{\sin 1''} + \frac{\tfrac{1}{3}\text{a}^2\sin 3\text{H}}{\sin 1''}.$$

Le premier terme est le même que dans la sphère; les suivans sont la correction due à l'aplatissement, et comme l'aplatissement sera toujours incertain, on fera bien de calculer pour la sphère et d'ajouter une petite correction que l'on pourra changer toutes les fois qu'on aura changé l'aplatissement.

121. Arc du mérid. $= \log \text{tang}(45°+\tfrac{1}{2}\text{H}) - 2\text{a}\sin\text{H}$

$$= \log \text{tang}(45°+\tfrac{1}{2}\text{H} - d\tfrac{1}{2}\text{H})$$

$$= \log\left[\frac{\text{tang}(45°+\tfrac{1}{2}\text{H}) - \text{tang}\tfrac{1}{2}d\text{H}}{1+\text{tang}\tfrac{1}{2}d\text{H}\,\text{tang}(45°+\tfrac{1}{2}\text{H})}\right] = \log\left[\text{tang}(45°+\tfrac{1}{2}\text{H}) \times \left(\frac{1-\text{tang}\tfrac{1}{2}d\text{H}\cot(45°+\tfrac{1}{2}\text{H})}{1+\text{tang}\tfrac{1}{2}d\text{H}\,\text{tang}(45°+\tfrac{1}{2}\text{H})}\right)\right]$$

$$= \log \text{tang}(45°+\tfrac{1}{2}\text{H}) + \log\left(\frac{1-\text{tang}\tfrac{1}{2}d\text{H}\cot(45°+\tfrac{1}{2}\text{H})}{1+\text{tang}\tfrac{1}{2}d\text{H}\,\text{tang}(45°+\tfrac{1}{2}\text{H})}\right)$$

$$= \log \text{tang}(45°+\tfrac{1}{2}\text{H}) - \text{tang}\tfrac{1}{2}d\text{H}\cot(45°+\tfrac{1}{2}\text{H}) - \text{tang}\tfrac{1}{2}d\text{H}\,\text{tang}(45°+\tfrac{1}{2}\text{H})$$

$$= \log \text{tang}(45°+\tfrac{1}{2}\text{H}) - \frac{2\text{tang}\tfrac{1}{2}d\text{H}}{\sin(90°+\text{H})} = \log \text{tang}(45°+\tfrac{1}{2}\text{H}) - \frac{2\,\text{tang}\tfrac{1}{2}d\text{H}}{\cos\text{H}};$$

donc

$$\frac{2\text{tang}\tfrac{1}{2}d\text{H}}{\cos\text{H}} = 2\text{a}\sin\text{H}, \quad 2\text{tang}\tfrac{1}{2}d\text{H} = 2\text{a}\sin\text{H}\cos\text{H} = \text{a}\sin 2\text{H},$$

$\tfrac{1}{2}d\text{H} = \tfrac{1}{2}\text{a}\sin 2\text{H} = \tfrac{1}{2}$ angle de la verticale; soit v cet angle,

arc du mérid. $= \log \text{tang}(45° + \tfrac{1}{2}\text{H} - \tfrac{1}{2}v)$;

ainsi quand on aura une table de l'angle v pour un aplatissement donné, on retranchera cet angle de la hauteur du pôle H, et avec cette hauteur du pôle on entrera dans la table des latitudes croissantes sphériques.

Ainsi la même table servira pour la sphère et le sphéroïde, selon que l'on prendra pour argument la latitude apparente ou la latitude géocentrique.

Cette méthode n'est qu'approximative, mais elle a toute la précision desirable; car l'erreur ne peut jamais aller à 2″; il faudrait y ajouter $\frac{1}{3}{}^{4}\, a \sin^3 H$.

122. Dans les différentes hypothèses d'aplatissement, j'ai trouvé, pour la correction des latitudes sphériques, les quantités suivantes:

$$\frac{1}{150} - 45'6838 \sin H - 0'20236 \sin^3 H - 0.0016135 \sin^5 H,$$
$$\frac{1}{230} - 29.8985 \sin H - 0.08627 \sin^3 H - 0.0004449 \sin^5 H,$$
$$\frac{1}{300} - 22.8801 \sin H - 0.05076 \sin^3 H - 0.0002027 \sin^5 H,$$
$$\frac{1}{308,6} - 22.2418 \sin H - 0.04797 \sin^3 H - 0.0002023 \sin^5 H,$$
$$\frac{1}{321} - 21.3856 \sin H - 0.04434 \sin^3 H - 0.0001655 \sin^5 H,$$
$$\frac{1}{334} - 20.5545 \sin H - 0.04096 \sin^3 H - 0.0001470 \sin^5 H,$$

ou bien

$$\frac{1}{150} - 45'8356 \sin H + 0'0506 \sin 3H,$$
$$\frac{1}{230} - 29.9612 \sin H + 0.0216 \sin 3H,$$
$$\frac{1}{300} - 22.9182 \sin H + 0.0127 \sin 3H,$$
$$\frac{1}{308,6} - 22.2764 \sin H + 0.0120 \sin 3H,$$
$$\frac{1}{321} - 21.4148 \sin H + 0.0111 \sin 3H,$$
$$\frac{1}{334} - 20.5852 \sin H + 0.0102 \sin 3H.$$

On voit que dans ces dernières séries surtout, on peut se con-

tenter du premier terme; on peut juger, par analogie, que l'on peut employer sans scrupule la latitude géocentrique, soit pour calculer les latitudes croissantes, soit pour les prendre dans une table calculée pour la sphère. La table la plus étendue en ce genre est celle de M. Mendoza, qui l'a calculée pour la sphère, en centièmes de minutes, et pour chaque minute du quart-de-cercle (*A Complete collection of Tables for navigation and nautical Astronomy, London*, 1805.) Cette Table me dispense de donner ici la mienne, qui n'en diffère presque pas.

123. Au moyen de ces tables, ou des cartes construites d'après ces formules, on trouve aisément le chemin fait en longitude et en latitude, quand on a l'espace parcouru et le rhumb de la route. Pour la différence de latitude, il suffit de multiplier la route R par le cosinus du rhumb. Connaissant ainsi la latitude du point d'arrivée et celle du point de départ, on cherche leurs latitudes croissantes C et C', alors (C'—C) tang angle rhumb = différ. en longitude; le calcul se réduit aux formules $H' = H + R\cos A$, différ. longit. $= (C' - C)\tang A$.

Graphiquement par les cartes. Soit ME l'équateur (fig. 126), MR le méridien; prenez MD = latitude du point de départ, MA celle du point d'arrivée; élevez les deux perpendiculaires DPT, ASX, par le point de départ P pris sur DT, menez PS parallèle au méridien, et PQ tel que QPS = A, vous aurez $QS = PS \tang QPS = (C' - C)\tang A$ = différ. de longitude. Le point Q sera celui d'arrivée sur la carte.

124. Sur cette espèce de carte, dont la première idée est due à Mercator, et sur toutes les espèces possibles de cartes, *voyez* un beau Mémoire de Lagrange, Berlin, 1779, page 180. La matière y est traitée analytiquement de la manière la plus savante et la plus générale; mais pour l'usage de l'Astronomie il nous suffira d'ajouter les notions très-élémentaires que nous allons donner dans le Chapitre suivant.

CHAPITRE XXXVII.

Sur les Projections.

1. Les anciens avaient imaginé deux espèces de projections pour représenter sur un plan la sphère céleste avec tous ses cercles grands ou petits. La première, nommée par eux *Analemme*, a reçu depuis le nom de *projection orthographique*. La seconde, qu'ils n'avaient désignée que par le mot générique de *planisphère*, a reçu du jésuite Aguilon, le nom de *projection stéréographique*. La raison qu'il en donne n'est peut-être pas d'une grande justesse; mais, sans entrer dans cet examen, on peut dire que la première a été nommée *orthographique*, parce qu'elle est produite par des lignes qui tombent à *angles droits* sur le plan qui doit représenter la sphère; et que l'autre s'est appelée *stéréographique*, parce qu'elle résulte de l'intersection de deux *solides*, qui sont la sphère et le cône. La racine de ce mot est στερεὸς, solide.

2. Soit BCDF (fig. 127) un grand cercle d'un globe quelconque, du soleil par exemple, O le lieu de l'œil sur le prolongement du rayon SC, perpendiculaire au diamètre BD. Ce cercle, vu par son épaisseur, se réduit à son diamètre BD, parce que le rayon SC est trop peu de chose en comparaison de SO, pour que la distance du centre apparent C, paraisse différer de la distance OB ou OD du bord. Le point C sera donc rapporté au centre S. Un autre point quelconque, tel que A, sera rapporté en a; les points S et a seront donc les projections de C et de A; mais de toutes ces projections, il n'y a que celle du centre C qui soit véritablement orthographique, parce que les deux angles en S sont droits. Des angles en a, l'un est aigu et complément de l'angle SOa, l'autre est $90° + SOa$; mais abaissez la perpendiculaire Ab, le point b sera la projection orthographique du point A. Mais pour un corps aussi éloigné que le soleil, la différence ab est presque insensible. En effet,

$$ab = bA \operatorname{tang} bAa = SA \sin ASb \operatorname{tang} bAa = SA \cos SAb \operatorname{tang} bAa$$
$$= \sin\delta \cos ASC \operatorname{tang} bAa = \sin\delta \cos d \operatorname{tang} SOa.$$

en prenant SO pour unité, δ pour le demi-diamètre du soleil, et d pour l'arc AC.

Or

$$\operatorname{tang} SOA = \frac{SA \sin d}{1 - SA \cos d} = \frac{\sin\delta \sin d}{1 - \sin\delta \cos d};$$

donc

$$ab = \frac{\sin\delta \cos d \sin\delta \sin d}{1 - \sin\delta \cos d} = \sin\delta \cos d[\sin\delta \sin d + \sin^2\delta \sin d \cos d + \sin^3\delta \cos^2 d \sin d + \text{etc.}]$$
$$= 4'',47,$$

en supposant $\delta = 16'$ et $d = 90°$. On voit donc que ab ne peut guères passer $4''$ pour le soleil; pour un habitant de Saturne, ab ne passerait guère $0'',04$, et il ne serait que $0'',01$ pour un habitant d'Uranus. Pour que ab fût véritablement nul, il faudrait que la distance SO fût infinie.

3. Ainsi l'on peut dire que dans la projection orthographique, on suppose l'œil à une distance infinie; alors tout arc CA qui a son origine au centre apparent, a pour projection une ligne Sb qui est égale au sinus de l'arc. Le quart de cercle CB ou CD aurait pour projection son sinus qui est égal au rayon, puisque l'arc est de 90°; le demi-cercle a pour projection les deux rayons ou le diamètre. Un arc comme $AE = (CE - CA)$ aurait pour projection

$$(\sin CE - \sin CA) = 2 \sin \tfrac{1}{2}(CE - CA) \cos \tfrac{1}{2}(CE + CA) = 2 \sin \tfrac{1}{2} AE \cos (CA + \tfrac{1}{2} AE).$$

On peut dire encore que tout arc comme DA, mené du bord vers le centre, a pour projection son sinus verse Db; le quart de cercle DC a pour projection son sinus verse qui est égal au rayon; le demi-cercle DB a pour projection son sinus verse qui est égal au diamètre.

Ce que nous avons dit du cercle BCDF doit s'entendre également de tous les grands cercles qui se croisent en C et forment l'hémisphère visible; chacun de ces demi-cercles se réduit à son diamètre, et l'hémisphère se réduit à un disque.

4. Dans cette projection, tout cercle grand ou petit, dont le plan prolongé ne passerait pas par l'œil, serait vu obliquement, et sous une forme elliptique: nous avons fait usage de ce théorème dans le calcul des éclipses; mais il paraît avoir été inconnu aux astronomes Grecs, ou du moins Ptolémée n'en fait aucune mention dans son Traité de l'*Analemme*, dont nous n'avons qu'une traduction latine, faite sur une version arabe; on ne voit dans cet ouvrage que des préceptes assez compliqués pour apprendre à trouver la véritable valeur des arcs de la sphère, d'après les lignes droites qui les représentent sur l'analemme. Mais les Arabes ont tiré des sinus un parti plus avantageux; ils y ont puisé l'idée d'une Trigonométrie plus simple et plus commode que celle des Grecs, et qui a quelque ressemblance avec notre Trigonométrie moderne.

5. En général dans la projection orthographique, tout grand cercle perpendiculaire au plan de projection, est représenté par son diamètre; tout petit cercle perpendiculaire au même plan, est représenté par la corde qui lui sert de diamètre. On n'y fait aucun usage des cercles obliques.

Ainsi (fig. 128), si nous prenons pour plan de projection le plan du méridien, l'horizon sera représenté par son diamètre HO; le premier vertical le sera par son diamètre ZV qui coupe HO à angles droits. Le cercle de six heures sera représenté par son diamètre qui est l'axe PP′, lequel fait avec l'horizon l'angle PCO = hauteur du pôle = H; l'équateur aura pour projection son diamètre eq, qui fait avec l'horizon un angle $HCe = 90° - H$. Les parallèles à l'équateur seront représentés par des cordes telles que AB, qui en sont les diamètres, qui sont parallèles au diamètre de l'équateur, et font tous avec l'horizon l'angle $90° - H$; les Almicantarats ont pour projection des cordes parallèles au diamètre horizontal HO, telles que RS.

6. Soit AB la projection d'un parallèle quelconque (fig. 128); supposons que l'astre qui décrit ce parallèle soit au méridien inférieur en B. Le point B qui est son lieu dans la sphère, est aussi son lieu sur la projection; car l'arc de distance au bord étant nul, le sinus verse sera zéro. Que l'astre soit à l'horizon en T, OT sera le sinus verse de son azimut, et CT le sinus de son amplitude. Mais le point T appartient aussi à la corde BA; BT sera le sinus verse de l'arc décrit depuis le passage au méridien inférieur jusqu'au lever, ou de l'arc semi-nocturne; TG sera le sinus de l'arc qui lui reste à décrire pour arriver au cercle de 6 heures; TG sera le sinus de l'arc qu'il faudra retrancher de 90° pour avoir l'arc semi-nocturne. Le demi-diamètre AG, comme le demi-diamètre GB répond à 90°; GT sera le sinus de l'arc qu'il faut ajouter à 90° pour avoir l'arc semi-diurne; car TA représente l'arc que l'astre décrit depuis son lever jusqu'à son passage au méridien supérieur.

Sur la corde AB décrivons le demi-cercle ADB; des points quelconques F et E auxquels répond l'astre à différens instans, élevez les perpendiculaires FF', et EE'; prolongez CP en D, il est évident que les points F, G, E sont les projections des points F', D, E'; il n'est pas même besoin pour cela d'imaginer le demi-cercle relevé perpendiculairement sur le plan du méridien. Ptolémée enseigne à décrire ce cercle, quoiqu'il n'en fasse pas tout-à-fait le même usage.

7. Pour trouver la valeur DE' qui répond à la droite GE, nous dirons,

$$\text{rayon} : \sin DE' :: AG : GE$$

et
$$\sin DE' = \frac{GE \times \text{rayon}}{AG} = \frac{GE}{AG} = \frac{GE}{\sin DA} = \frac{GE}{\sin \Delta} = \frac{GE}{\cos D}.$$

Ainsi, pour avoir l'arc qui répond à GE, GF ou GT, il suffit de diviser ces lignes, comptées du milieu de la corde, par le sinus de la distance de la corde à son pôle. Cette règle est générale.

Le triangle CGT donne encore

$$GT = CG.\tang GCT = \sin D \tang H,$$

D étant la déclinaison du parallèle; donc

$$\frac{GT}{\cos D} = \frac{\sin D}{\cos D} \tang H = \tang D \tang H = \sin DT'.$$

C'est ainsi que les Arabes calculaient $\sin DT' =$ cosinus de l'angle semi-nocturne $=$ $-$ cos angle semi-diurne. Le même triangle leur donnait

$$CT = \sin \text{amplitude} = \cos \text{azimuth} = \frac{CG}{\cos GCT} = \frac{\sin D}{\cos H}.$$

8. Par le point E projection de l'astre, menez la corde RS parallèle à l'horizon, QE sera pour le rayon QR le cosinus de l'azimut, et EL, perpendiculaire à l'horizon, sera le sinus de la hauteur. Pour connaître cette hauteur, menez Ga parallèle à l'horizon,

$$\begin{aligned}\sin h = EL = La + aE = GM + aE = CG \sin GCM + EG \sin EGa\\ = \sin D \sin H + AG \sin DE' \cos GCO\\ = \sin D \sin H + \cos D \cos H \cos \text{angle horaire} = \sin D \sin H + \cos D \cos H \cos P,\end{aligned}$$

Mettez $\Delta = 90° - D$, $E = 90° - H$ et $N = 90° - h$, vous aurez

$$\cos N = \cos \Delta \cos E + \sin \Delta \sin E \cos P,$$

ce qui est précisément le théorème fondamental de notre Trigonométrie ; EE″ perpendiculaire sur RS, sera l'élévation de l'astre sur le plan, aussi bien que EE′ ; vous aurez donc

$$EE' = AG \sin AE' = \sin \Delta \sin P = EE'' = QS \sin SE'' = \sin N \sin Z,$$

d'où

$$\sin \Delta \sin P = \sin N \sin Z,$$
$$\sin \Delta : \sin N :: \sin Z : \sin P.$$

C'est notre second théorème général ; il était connu des Arabes qui n'allèrent pas plus loin ; il était pourtant aisé de faire

$$\tang SE'' = \tang Z = \tang E''QE = \frac{EE''}{QE} = \frac{EE'}{CL} = \frac{\sin \Delta \sin P}{CM - ML}$$
$$= \frac{\sin \Delta \sin P}{\cos \Delta \sin E - \sin \Delta \cos P \cos E} = \frac{\sin P}{\cot \Delta \sin E - \cos P \cos E},$$

$$\cot Z = \frac{\cot \Delta \sin E - \cos E \cos P}{\sin P}, \quad \cot Z \sin P = \cot \Delta \sin E - \cos E \cos P$$

et

$$\cos E \cos P = \cot \Delta \sin E - \sin P \cot Z :$$

ce qui est notre troisième théorème général ; mais le quatrième ne pouvait se trouver sans calcul (X. 22).

Projection stéréographique.

9. Hipparque paraît être l'inventeur de cette projection dont il avait donné les règles dans un Traité qui est perdu ; mais nous avons la version latine d'un Traité que Ptolémée avait composé sur le même sujet, et qui avait été traduit en arabe par Maslem. Dans cette projection tous les cercles, grands ou petits, sont représentés par des cercles, avantage que n'a point l'Analemme. Une seconde propriété, non moins générale et fort curieuse, est que tous les cercles sur la projection font entre eux les mêmes angles que sur la sphère. La première propriété paraît n'avoir pas été ignorée des Grecs, quoiqu'elle ne soit expressément mentionnée ni par Ptolémée, ni par Synésius, dans sa Lettre sur l'Astrolabe. La seconde paraît d'une date beaucoup moins ancienne ; je l'ai vainement cherchée dans le gros Traité de Clavius, dans celui de Stoflérinus et dans Bion. Elle est énoncée dans le Dictionnaire de Mathématiques de Saverien, Paris, 1753, et démontrée par Robertson, dans ses Élémens de Navigation (1754).

10. Apollonius, dans la proposition 5ᵉ de son premier livre, a démontré que la section d'un cône oblique est un cercle, non-seulement quand elle est parallèle à la base, mais aussi quand elle est *sub-contraire* ou *anti-parallèle*. C'est sur ce théorème que se fondent toutes les règles de la projection stéréographique, et voilà sans doute pourquoi Bailly est tenté d'en attribuer l'invention à Apollonius ; mais on ne voit rien dans le Traité des Sections coniques qui puisse autoriser cette conséquence, tandis que Synésius nous dit expressément qu'Hipparque est le premier qui ait écrit sur l'astrolabe ou planisphère dont il a enseigné à décrire tous les cercles utiles. Admettons que toutes les

sections du cône soient des cercles quand elles sont parallèles à la base, il ne sera pas difficile de démontrer la seconde partie de la proposition.

Soit ABOD (fig. 129) un grand cercle quelconque d'une sphère, O le lieu de l'œil ; menez le diamètre OCA, et le diamètre BCD perpendiculaire au premier, BCD sera la projection orthographique d'un grand cercle perpendiculaire au rayon visuel OA : c'est sur le plan de ce cercle que l'on se propose de placer tous les cercles de la sphère, tels qu'ils y sont vus du point O. Le cercle BD est le plan de projection, le point C en est le centre, le point A en est le pôle ; la projection du point A sera en C, car c'est au point C que le rayon visuel OA traverse la projection.

11. Soit P un point quelconque sur la circonférence OBAD ; prenez PE = PF, c'est-à-dire deux points également éloignés de P, et tirez la corde EF ; cette corde sera la projection orthographique ou le diamètre d'un cercle dont P sera le pôle. Il s'agit de trouver la projection de la corde EF ; pour cela, menez les droites OE, OF, qui couperont en S et en T le plan de projection BD. Il faut prouver maintenant que ST sera le diamètre d'un cercle qui sera la projection du cercle décrit sur EF. Imaginez du point O, des lignes qui aboutissent à tous les points du cercle EF, toutes ces lignes formeront un cône dont le cercle EF sera la base ; ce cône sera coupé par le plan de projection ; et si la corde EF était parallèle à BD, ce qui aurait lieu si le point P se confondait avec A, il n'y aurait nul doute que la projection ou la section du cône par BD ne fût un cercle. Mais, quelle que soit cette section, il est évident que ST en est la projection orthographique ;

$$\text{l'angle } FEO = \tfrac{1}{2}FO = \tfrac{1}{2}OD + \tfrac{1}{2}DF = 45^\circ + \tfrac{1}{2}DF,$$
$$\text{l'angle } STO = \tfrac{1}{2}BO + \tfrac{1}{2}DF \qquad = 45^\circ + \tfrac{1}{2}DF;$$

donc

$$FEO = STO,$$
$$\text{l'angle } EFO = \tfrac{1}{2}OBE = \tfrac{1}{2}OB + \tfrac{1}{2}BE = 45^\circ + \tfrac{1}{2}BE,$$
$$\text{l'angle } OST = \tfrac{1}{2}OB + \tfrac{1}{2}BE \qquad = 45^\circ + \tfrac{1}{2}BE.$$

Donc EFO = OST ; donc les triangles EFO, OST sont semblables ; cependant leurs bases EF, ST ne sont pas parallèles ; elles sont *sub-contraires*. Mais donnez un mouvement de 180° au sommet du cône, OT deviendra OT', et OS deviendra OS' ; alors T'S' sera parallèle à EF. La section du cône par T'S' sera parallèle à la base ; elle sera un cercle dont le diamètre sera T'S' ; donc la section par TS est aussi un cercle dont le diamètre est TS. Ainsi tout cercle de la sphère, oblique ou non au rayon visuel dirigé à son pôle, sera représenté sur la projection par un cercle.

12. Menez au pôle le rayon CP, et par le point P la tangente E'PF'G qui aille couper en G le plan de projection BD prolongé. Prolongez OE et OF jusqu'à la tangente en E' et F', la tangente E'F' sera parallèle à la corde ; la partie E'F' aura pour projection la ligne ST, PG aura pour projection la ligne KG : or l'angle OPG ou KPG $= \tfrac{1}{2}ODP = \tfrac{1}{2}OD + \tfrac{1}{2}DP = 45^\circ + \tfrac{1}{2}DP$; l'angle PKG a pour mesure $\tfrac{1}{2}OB + \tfrac{1}{2}DP = 45^\circ + \tfrac{1}{2}DP$: denc KPG = PKG, donc KG = PG ; donc *la tangente PG a pour projection une ligne KG qui lui est égale.*

13. Les angles POE, POF sont égaux ; donc la droite OP qui partage en deux

également l'angle EOF, coupera la corde EF et la projection ST en deux segmens inégaux; donc $SK < KT$. Partagez ST en deux également au point m, $mS = mT = \frac{1}{2}ST = \frac{1}{2}$ diamètre = rayon du cercle sur la projection; CS, Cm, CT seront en progression arithmétique; donc

$$Cm = \tfrac{1}{2}CT + \tfrac{1}{2}CS = \tfrac{1}{2}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}AF + \tfrac{1}{2}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}AE = \frac{\sin\frac{1}{2}(AF+AE)}{2\cos\frac{1}{2}AF\cos\frac{1}{2}AE}$$

$$= \frac{\sin AP}{2\cos\frac{1}{2}(AP+PE)\cos\frac{1}{2}(AP-PE)}.$$

Soit $d = Cm$ = distance du centre m au centre C de la projection, et $\Delta = PE$ = distance polaire du cercle EF, et $D = AP$ = distance des deux pôles,

$$d = \frac{\sin D}{\cos AP + \cos PE} = \frac{\sin D}{\cos D + \cos\Delta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(1)},$$

$$r = mS = mT = \tfrac{1}{2}ST = \tfrac{1}{2}(CT - CS) = \tfrac{1}{2}(\text{tang}\,\tfrac{1}{2}AF - \text{tang}\,\tfrac{1}{2}AE)$$

$$= \frac{\sin\frac{1}{2}(AF-AE)}{2\cos\frac{1}{2}AF\cos\frac{1}{2}AE} = \frac{\sin\Delta}{\cos D + \cos\Delta} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2)}.$$

Ces deux formules renferment toute la théorie de la projection stéréographique.

14. Soit $PE = \Delta = 0$, la formule (1) devient

$$d = \frac{\sin D}{\cos D + 1} = \frac{2\sin\frac{1}{2}D\cos\frac{1}{2}D}{2\cos^2\frac{1}{2}D} = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}D \ldots\ldots\ldots \text{(3)}.$$

La formule (2) se réduit à $r = 0$. Le cercle se réduit à un point qui était le pôle; la projection de ce pôle sera le point K, et $CK = \text{tang}\,\frac{1}{2}AP$, ce qui est évident.

Soit $PE = 180°$, nous aurons encore $r = 0$; mais

$$d = \frac{\sin D}{\cos D - 1} = -\frac{2\sin\frac{1}{2}D\cos\frac{1}{2}D}{2\sin^2\frac{1}{2}D} = -\cot\tfrac{1}{2}D \ldots\ldots\ldots \text{(4)};$$

La projection du pôle opposé sera sur le prolongement de CB à une distance $CK' = -\cot\frac{1}{2}D$; la distance des deux pôles sur la projection sera

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}D - (-\cot\tfrac{1}{2}D) = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}D + \cot\tfrac{1}{2}D = 2\,\text{cos\acute{e}c}\,D \ldots\ldots \text{(5)}.$$

15. Soit $PE = \Delta = 90°$, la corde EF sera un diamètre, le cercle à projeter sera un grand cercle; la formule (1) devient

$$d = \frac{\sin D}{\cos D} = \text{tang}\,D \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(6)}.$$

Ainsi le centre sera à une distance $Cm = d = \text{tang}\,D$ = tang distance du pôle au pôle de projection, ou tangente inclinaison du grand cercle sur le plan de projection.

La formule (2) devient $r = \frac{1}{\cos D}$ = séc. D = séc. inclinaison...... (7).

Avec le rayon séc. D et la distance des centres tang D, il sera facile de décrire le cercle, mais il faut remarquer de plus que le centre m sera dans le plan du grand cercle qui passe par les pôles A et P, c'est-à-dire sur le rayon CD dirigé au point D où tombe l'arc perpendiculaire PD.

Ces formules extrêmement simples serviront pour tous les grands cercles.

16. Si $AP = D = 0$, le pôle du cercle sera celui de la projection, $d = 0$,

$$r = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\Delta \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Cette formule donnera le rayon de tous les cercles parallèles au plan de projection, ils ont tous pour centre le centre même de la projection; les rayons visuels menés à tous les points de la circonférence sont égaux; le cône est droit, il est coupé parallèlement par le plan de projection; la section est parallèle et non *sub-contraire*, et toutes les sections sont évidemment des cercles.

17. Soit $AP = D = 90°$, $d = \frac{1}{\cos\Delta} = \text{séc.}\,\Delta$, $r = \text{tang}\,\Delta$. .. (9 et 10).

Ces formules servent pour tous les cercles qui ont leur pôle sur la circonférence du cercle de projection : si ce sont de grands cercles, $\Delta = 90°$, séc. Δ et tang Δ seront infinies; le centre sera à une distance infinie de C, et les projections seront des droites qui passeront toutes par le centre C, où elles se couperont sous des angles qui auront pour mesure la distance des deux pôles, ou l'arc compris entre les rayons, c'est-à-dire les angles que ces cercles pris deux à deux formeront sur la sphère.

18. Si

$$AP = PE = D = \Delta, \quad d = r = \frac{\sin D}{2\cos D} = \frac{\sin\Delta}{2\cos\Delta} = \tfrac{1}{2}\text{tang}\,D = \tfrac{1}{2}\text{tang}\,\Delta \ldots\ldots (11);$$

tous ces cercles passeront par le pôle de la projection, et leurs projections passeront par le centre C.

Si $AP = 90° - PE$ ou $D = 90° - \Delta$,

$$d = \frac{\sin D}{\cos D + \sin D} = \frac{\text{tang}\,D}{1 + \text{tang}\,D} = \frac{\text{tang}\,D}{\text{tang}\,45° + \text{tang}\,D} = \frac{\text{tang}\,D \cos D \cos 45°}{\sin(D + 45°)}$$

$$= \frac{\sin D \sin 45°}{\sin(45° + D)} \ldots\ldots (12),$$

$$r = \frac{\cos D}{\cos D + \sin D} = \frac{1}{1 + \text{tang}\,D} = \frac{1}{\text{tang}\,45° + \text{tang}\,D} = \frac{\cos D \cos 45°}{\sin(45° + D)} \ldots\ldots (13);$$

tous les cercles seront tangens au cercle de projection, et leurs projections tangentes intérieurement à un même cercle.

19. Quand on a marqué sur la projection (fig. 130) les deux pôles π et Π d'un grand cercle quelconque (formules 3 et 4); on a deux points de chacun des cercles

qui se croisent à ces deux pôles; les projections de tous ces cercles ont pour corde commune la droite $\pi\Pi$ qui joint les projections des deux pôles; ils ont donc tous leurs centres sur la droite VEX qui coupe perpendiculairement par le milieu la droite $\pi\Pi$, et $\pi E = E\Pi = \text{coséc.}\,D$ (form. 5) :

$$CE = \pi E - \pi C = \text{coséc.}\,D - \text{tang}\,\tfrac{1}{2}D = \frac{1}{\sin D} - \text{tang}\,\tfrac{1}{2}D = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}D\cos\frac{1}{2}D}$$

$$- \text{tang}\,\tfrac{1}{2}D = \frac{1 - 2\sin^2\frac{1}{2}D}{2\sin\frac{1}{2}D\cos\frac{1}{2}D} = \frac{\cos D}{\sin D} = \cot D \ldots\ldots (14).$$

Quand vous aurez marqué π par la formule $C\pi = \text{tang}\,\frac{1}{2}D$, prenez sur le prolongement de πC la ligne $CE = \cot D$, et vous aurez le point E qui vous dispensera de marquer le point Π qui peut être à une distance incommode; il faudrait alors calculer le rayon πF ou $\pi F'$ du cercle que vous voudriez placer sur la projection. Chacun des points de la ligne VEX vous donnerait le centre d'un cercle qui passerait par les points π et Π, mais vous ignoreriez à quel cercle de la sphère répondraient tous ces cercles. Nous savons qu'ils sont tous de grands cercles, puisqu'ils passent par deux points diamétralement opposés de la sphère. Pour tracer la projection d'un grand cercle, il suffit de connaître la distance D' de son pôle au pôle de la projection.

20. Soit donc (fig. 131) PR le cercle qu'on veut placer sur la projection; du pôle A, abaissez sur PR la perpendiculaire Ax, et prolongez-là en p, de sorte que $xp = 90°$; p sera le pôle du cercle PR; le triangle AxP donne

$$\sin Ax = \cos Ap = \cos D' = \sin PA \sin APx = \sin PA \sin APR.$$

Donc

$$\text{séc.}\,Ap = \text{séc.}\,D' = \frac{1}{\sin PA \sin APR} = \text{coséc.}\,PA\,\text{coséc.}\,APR = \text{coséc.}\,D'\,\text{coséc.}\,APR \,..(15);$$

car P est le pôle dont la projection π (fig. 131) est placée sur la projection en π (fig. 130).

La formule (15) donne le rayon πF du cercle qu'on veut décrire, et qui est connu sur la sphère par l'angle APR qu'il forme avec le cercle ODAB dans lequel l'œil est placé.

21. Soit d'abord $APR = 0$, $\sin APR = 0$, $\text{séc.}\,D = \frac{1}{0} = \infty$, le cercle se confondra avec ODAB. La projection sera une ligne droite qui passera par le centre de la projection; elle sera $\pi\Pi$ déjà tracée; $\text{tang}\,D = (\sec^2 D - 1)^{\frac{1}{2}} = (\infty^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = \infty$; le centre sera sur VEX, à une distance infinie de E.

Soit

$$APR = 90°, \quad \text{séc}\,D' = \frac{1}{\sin PA} = \text{coséc}\,PA = \text{coséc}\,D = \pi E,$$

$$\text{tang}\,D' = \cot PA = \cot D = CE.$$

Ainsi du centre E et du rayon $E\pi$, décrivez le cercle $V\pi X\Pi$, il sera la projection du grand cercle qui est perpendiculaire au cercle ODAB. Nous connaissons donc les cercles dont les projections sont l'une la droite $\pi\Pi$, et l'autre le cercle $V\pi X\Pi$. Pour

trouver les rayons des cercles intermédiaires, soit ΠF un de ces rayons,

$$\overline{FE}^2 = \overline{\pi F}^2 - \overline{\pi E}^2 = \text{coséc}^2 Ap - \text{coséc}^2 AP = \text{coséc}^2 AP\, \text{coséc}^2 APR - \text{coséc}^2 AP \text{ (form. 15)}$$
$$= \text{coséc}^2 AP\, (\text{coséc}^2 APR - 1) = \text{coséc}^2 AP \cot^2 APR,$$
$$FE = \text{coséc}\, AP \cot APR = \frac{\cot APR}{\sin AP} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(16)}.$$

Mais

$$FE = \pi E \tang E\pi F = \text{coséc}\, AP \tang E\pi F = \text{coséc}\, CP \cot APR;$$

donc

$$APR = 90° - E\pi F = \pi FE.$$

Donc pour avoir le rayon πF, il suffit de mener une droite qui fasse avec πE un angle $= 90° - APR$, c'est-à-dire de prendre $\pi\varphi = 2(90° - APR) = 180° - 2APR$, et de tirer la corde $\pi\varphi$, elle marquera sur VEX le centre F du cercle à décrire.

22. Nous savons déjà que CF ou la distance des centres doit être tang Ap, puisque πF est séc Ap; mais nous pouvons tirer cette valeur de notre construction

$$\overline{CF}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{FE}^2 = \cot^2 AP + \text{coséc}^2 AP \cot^2 APR$$
$$= \cot^2 AP + \text{coséc}^2 AP\, (\text{coséc}^2 APR - 1)$$
$$= \cot^2 AP + \text{coséc}^2 AP\, \text{coséc}^2 APR - \text{coséc}^2 AP$$
$$= \text{séc}^2 Ap - (\text{coséc}^2 AP - \cot^2 AP) = \text{séc}^2 Ap - 1 = \tang^2 Ap;$$

donc

$$CF = \tang Ap.$$

23. Nous avons trouvé (21) $E\pi F = 90° - APR$ (fig. 130 et 131). Soit (fig. 131) PR' un autre cercle à projeter, nous aurons de même (fig. 130),

$$E\pi G = 90° - APR', \text{ G étant le centre de cet autre cercle, et (fig. 130)}$$
$$E\pi G - E\pi F = (90° - APR') - (90° - APR) = APR - APR' = RPR' \text{ (fig. 131)}:$$

donc les rayons πG et πF forment sur la projection l'angle RPR' que forment sur la sphère les deux cercles projetés. Les circonférences sont perpendiculaires à leurs rayons, et forment à leur intersection les mêmes angles que les rayons; donc les projections de deux grands cercles quelconques formeront à leurs intersections les mêmes angles que les grands cercles forment à la surface de la sphère. Mais deux cercles qui se coupent forment aussi les mêmes angles que leurs tangentes; ces tangentes sont communes aux petits cercles qui passeraient par le même point; d'où il suit que deux cercles quelconques qui se coupent sous un certain angle à la surface de la sphère, auront des projections qui se couperont sous le même angle : c'est la seconde propriété générale qui se trouve un corollaire de la première. Les anciens n'ont point aperçu cette conséquence qui résultait de toutes leurs constructions; je n'ai pu découvrir à qui l'on doit cette remarque, qui est au reste plus curieuse qu'utile. Nous en donnerons ci-après une autre démonstration, qui ne ressemblera pas plus que la précédente à celle de Robertson, la seule que je connaisse.

24. On peut démontrer géométriquement les formules et les procédés que nous avons déduits analytiquement de nos formules (1 et 2), et trouver des méthodes graphiques pour tous les problèmes que présente la description d'un planisphère ou d'un astrolabe.

Commençons par les grands cercles. Soit PE $=90^\circ$ (fig. 132) et PF $=$ PE, FE sera un diamètre; menez les droites OTF et OES, partagez ST en deux également au point r, rS $=$ rT sera le rayon du cercle à décrire; menez ORrI.

SOF $=$ EOT $=90^\circ$. Le cercle décrit sur ST passera donc par le point O; il passera de même par le point A, car CS est perpendiculaire sur le milieu de OA; donc rO $=$ rS $=$ rT, donc SOr $=$ OSr, donc CrO $=$ 2OSr,

$$\text{CO}r = 90^\circ - \text{C}r\text{O} = 90^\circ - 2\text{OS}r = 90^\circ - (\text{DO} - \text{BE}) = 90^\circ - 90^\circ + \text{BE},$$

ou $\quad$ COr $=$ BE $=$ inclinaison du grand cercle sur la projection.

Or $\quad$ $\text{O}r = \dfrac{\text{CO}}{\cos\text{CO}r} = \dfrac{1}{\cos\text{BE}} = \dfrac{1}{\cos\text{ inclinaison}} = \text{séc inclinaison},$

$\text{C}r = \text{tang CO}r = \text{tang inclinaison}.$ $\quad$ Ce sont nos formules 6 et 7.

Prenez AI $=$ 2BE $=$ 2AP, et menez OI, vous aurez le centre r et le rayon rO.

$$\text{COR} = \text{BE},\ \ \text{OCR} = \text{OE} = 90^\circ - \text{BE},\ \ \text{COR} + \text{OCR} = 90^\circ;\ \text{donc}\ \ \text{CRO} = 90^\circ.$$

Ainsi, menez ORr perpendiculaire sur FCE, et vous aurez le centre r et le rayon rO; CR $=$ sin BE $=$ sin inclinaison, OR $=$ cos inclinaison.

25. Or fera donc toujours avec OC un angle égal à l'inclinaison BE. Soit un second cercle dont l'inclinaison soit COr'; le rayon de sa projection sera r'O; les rayons rO et r'O feront au point d'intersection un angle rOr' qui sera la différence d'inclinaison, ou l'inclinaison réciproque des deux cercles sur la sphère. Ainsi, toutes les fois que deux cercles se couperont aux pôles de la projection, ils auront des projections qui se couperont sous le même angle que les cercles mêmes. C'est un cas particulier du théorème général.

26. Supposons maintenant AP $=90^\circ$, P se confondra avec B; le pôle du cercle sera sur le bord de la projection. Soit BH $=$ BE $=\Delta=$ distance polaire du cercle à projeter, la corde HE sera perpendiculaire à DB. Menez OH et OES, GS sera le diamètre cherché. Coupez GS en n, ensorte que nG $=$ nS $=\frac{1}{2}$GS $=$ rayon du cercle projeté; n sera le centre, nE $=$ nH sera le rayon $=$ nS $=$ nG,

$$\text{E}n\text{G} = 2n\text{SE} = \text{OD} - \text{BE} = 90^\circ - \text{BE} = 90^\circ - \Delta = 90^\circ - \text{BCE},\ \ \text{C}n\text{E} + n\text{CE} = 90^\circ;$$

donc CEn $=90^\circ$, donc En $=$ tang BE $=$ tang Δ et Cn $=$ séc Δ.

Ce sont nos formules (9 et 10); elles servent à projeter tous les cercles qui ont leurs pôles sur la circonférence de la projection.

27. Soit (fig. 133) un grand cercle quelconque dont la projection DGB passe par D et B, et dont le centre soit r, HKE la projection d'un cercle qui a son pôle en B, n le centre de HKE,

$$\overline{rn}^2 = \overline{r\text{C}}^2 + \overline{\text{C}n}^2 = \text{tang}^2\text{D} + \text{séc}^2\Delta = \text{tang}^2\text{D} + \text{tang}^2\Delta + 1 = \text{séc}^2\text{D} + \text{tang}^2\Delta = \overline{r\text{K}}^2 + \overline{\text{K}n}^2;$$

donc rKn $=90^\circ$, donc les deux projections se couperont à angles droits; mais les parallèles

rallèles qui ont leur pôle en B et D sont perpendiculaires aux grands cercles qui passent par ces mêmes pôles ; donc les projections forment encore ici le même angle que les cercles font sur la sphère : c'est encore un cas particulier du théorème général, que nous allons démontrer généralement.

28. Soit (fig. 134) O le lieu de l'œil, A le pôle de la projection, BDECB le plan de projection, PD un arc de grand cercle qui a son origine en un point quelconque du cercle OBPE, Pt la tangente de PD ; Ct sera la sécante, S la projection de P. Menez St, le triangle rectiligne SCt donnera

$$\overline{St}^2 = \overline{CS}^2 + \overline{Ct}^2 - 2CS.Ct.\cos SCt = \text{tang}^2\tfrac{1}{2}AP + \text{séc}^2PD - 2\,\text{tang}\tfrac{1}{2}AP\,\text{séc}\,PD\cos DE$$
$$= \text{tang}^2\tfrac{1}{2}AP + \text{tang}^2PD + 1 - 2\,\text{tang}\tfrac{1}{2}AP\,\text{séc}\,PD\cos DE$$
$$= \text{séc}^2\tfrac{1}{2}AP + \text{tang}^2PD - 2\,\text{tang}\tfrac{1}{2}AP\,\text{séc}\,PD\cos DE.$$

Le triangle sphérique PDE rectangle en E donne

$$\cos PD = \cos PE \cos DE = \sin AP \cos DE, \qquad \text{séc}\,PD = \frac{1}{\sin AP \cos DE};$$

donc

$$\overline{St}^2 = \text{séc}^2\tfrac{1}{2}AP + \text{tang}^2PD - \frac{2\,\text{tang}\tfrac{1}{2}AP\cos DE}{\sin AP\cos DE}$$
$$= \text{séc}^2\tfrac{1}{2}AP + \text{tang}^2PD - \frac{2\,\text{tang}\tfrac{1}{2}AP}{2\sin\tfrac{1}{2}AP\cos\tfrac{1}{2}AP}$$
$$= \text{séc}^2\tfrac{1}{2}AP + \text{tang}^2PD - \text{séc}^2\tfrac{1}{2}AP = \text{tang}^2PD,$$
$$St = \text{tang}\,PD = Pt.$$

Donc la tangente Pt d'un arc de grand cercle terminé à la projection, a pour projection une droite qui lui est égale. Soient (fig. 135) Pt et Pt' deux de ces tangentes, joignez-les par la ligne tt' qui sera toute dans le plan de projection ; soient St et St' les projections de ces tangentes, les triangles tPt', tSt' seront parfaitement égaux, car ils auront un côté commun et deux côtés respectivement égaux. Donc l'angle opposé au côté commun sera le même ; donc les *tangentes de deux arcs quelconques de grand cercle terminés à la projection, auront pour projection des lignes qui leur seront égales, et qui formeront le même angle.* Donc les deux cercles qui se coupent en P sur la sphère, formeront sur la projection un angle égal à celui qu'ils forment sur la sphère, car au point d'intersection les élémens des arcs se confondent avec ceux de leurs tangentes ; *donc tous les grands cercles se coupent sur la projection sous le même angle que sur la sphère ; donc aussi tous les petits cercles, qui se couperont aux mêmes points et auront par conséquent des tangentes communes.*

29. Les principes démontrés ci-dessus de deux manières, suffisent pour tracer les projections de tous les cercles de la sphère.

Supposons d'abord que l'œil soit au pôle austral de l'équateur, le plan de projection sera l'équateur même, le centre de l'équateur représentera le pôle boréal ; AP (fig. 129) sera $= 0$; les projections des parallèles à l'équateur auront toutes pour centre commun celui de la projection ; les rayons de ces cercles seront les tangentes des demi-distances polaires.

Ainsi, pour le cercle polaire, $r = \text{tang}\left(\frac{23° 28'}{2}\right) = \text{tang}\, 11° 44'$;

pour le tropique du cancer, $r = \text{tang}\left(\frac{66° 32'}{2}\right) = \text{tang}\, 33.16$;

pour le tropique du capricoroe, $r = \text{tang}\left(\frac{113° 28'}{2}\right) = \text{tang}\, 56.44$;

pour le cercle polaire antarctique, $r = \text{tang}\left(\frac{156° 32'}{2}\right) = \text{tang}\, 78.16$;

pour une latitude quelconque H, $r = \text{tang}\left(\frac{90° - H}{2}\right) = \text{tang}\,(45° - \frac{1}{2}H)$;

et si la latitude est australe, $r = \text{tang}\,(45° + \frac{1}{2}H)$.

Quant aux méridiens dont les plans passent tous par l'œil, ils seront tous des diamètres qui partageront l'équateur eo ses 360°, et formeroot au centre de la projection, des angles égaux aux différences de loogitude; pour ces cercles $d = \infty$ et $r = \infty$ (17).

Cette espèce de carte, la plus facile de toutes à décrire, sert pour les éclipses de soleil; le seul inconvénient est que les parallèles de l'hémisphère austral y soot plus grands que l'équateur, mais cet inconvénieot est oul pour les éclipses.

Les méridiens et les parallèles s'y divisent réciproquement en degrés; ceux des parallèles soot égaux; ceux des méridiens sont inégaux, car l'expression d'un de ces degrés est

$$\delta = \text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\Delta + 1°) - \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\Delta = \frac{\text{sio}\, 30'}{\cos\tfrac{1}{2}\Delta \cos\tfrac{1}{2}(\Delta + 1°)}$$

$$= \frac{\sin 30'}{\cos\tfrac{1}{2}\Delta\,(\cos\tfrac{1}{2}\Delta \cos 30' - \sin\tfrac{1}{2}\Delta\, \text{sio}\, 30')} = \frac{\text{tang}\, 30'}{\cos^2\tfrac{1}{2}\Delta - \text{tang}\, 30' \sin\tfrac{1}{2}\Delta \cos\tfrac{1}{2}\Delta}$$

$$= \frac{\text{tang}\, 30'\, \text{séc}^2\tfrac{1}{2}\Delta}{1 - \text{tang}\, 30'\, \text{tang}\,\tfrac{1}{2}\Delta}.$$

30. Au lieu de placer sur ce planisphère les villes, les contineos, les îles et les rivages suivant leurs longitudes et latitudes géographiques, on peut y placer les étoiles suivant leurs ascensions droites et leurs déclinaisons. Oo y tracerait ensuite l'écliptique, ses pôles, les cercles de latitude qui s'entrecoupent tous aux deux pôles, enfin les parallèles à l'écliptique.

Aiosi sur le rayoo 270° (fig. 130), à une distance du centre $C\pi = $ taog 11° 44'; oo marquerait le pôle boréal π de l'écliptique. De ce point, avec une ouverture de compas = cosèc 23° 28', on marquerait le point E, ou bien oo ferait CE = cot 23° 28'. Par le point E, on mènerait la perpendiculaire iodéfinie VEX, lieu des ceotres de tous les cercles de latitude; E serait le centre du cercle de latitude qui passe par o et 180°, ou du colure des équiooxes, qui serait le cercle VπXΠ.

πEΠ serait le colure des solstices.

En général, faites EπG' = longitude; du ceotre G' et du rayoo G'π, décrivez un cercle qui sera le cercle de latitude qui répond à la longitude supposée. Répétez les mêmes opérations de l'autre côté de la ligne πE, et vous aurez les cercles de latitude de l'autre hémi-

sphère. Pour les cercles parallèles à l'écliptique, on se servirait des formules

$$d = \frac{\tang \frac{1}{2}(D + \Delta) + \tang \frac{1}{2}(D - \Delta)}{2}, \qquad r = \frac{\tang \frac{1}{2}(D + \Delta) - \tang \frac{1}{2}(D - \Delta)}{2},$$

D étant la distance des pôles de l'écliptique et de l'équateur, ou 23° 28'; Δ la distance polaire du parallèle. Si $\Delta > D$, ce qui arrivera le plus souvent, le second terme changera de signe.

Les cercles de latitude et les parallèles se diviseront réciproquement en degrés qui seront tous inégaux; tous ces parallèles auront des centres et des rayons différens.

31. Pour rendre ce planisphère utile à la solution des problèmes du mouvement diurne, on y place l'horizon d'un lieu donné; la distance $AP = D$, dans ce cas, est la distance polaire du zénit, ou le complément de la latitude $= 90° - H$; $\tang \frac{1}{2} D = \tang(45° - \frac{1}{2}H)$; cette valeur est la distance du pôle de l'horizon au pôle de l'équateur sur la projection : mais ce pôle tourne en 24 heures autour du pôle du monde ou du centre C. Ainsi, pour décrire l'horizon, on prendra un carton ou planche de cuivre à part; on y placera le centre de la projection, le pôle de l'horizon et l'horizon même, dont le rayon sera $\text{séc}(90° - H)$, et la distance au centre $\tang(90° - H)$; on évide ce carton dont on ne conserve que la circonférence et le diamètre qui porte le centre de la projection. Par ce centre on fait passer une vis pour attacher l'horizon sur le planisphère. L'horizon peut tourner autour de cette vis, de manière que son pôle décrive un cercle autour du centre C, et sa position indique les étoiles visibles et celles qui sont couchées. Mais cette construction est inusitée.

32. Celle dont on a fait un si long usage était un peu différente. L'horizon était immobile, et se décrivait sur la face de l'instrument, c'est-à-dire sur une planche de cuivre ronde, entourée d'un rebord élevé de quelques millimètres. On traçait, comme nous avons dit, l'horizon, quelques-uns de ses parallèles et quelques verticaux par des procédés tout pareils à ceux de l'article 30. On construisait même plusieurs horizons de rechange pour diverses latitudes. Ces horizons se plaçaient les uns sur les autres, et c'est pour les contenir qu'on avait ménagé le rebord dont nous avons parlé. On plaçait au-dessus des autres celui dont on voulait se servir.

On décrivait l'écliptique, ses parallèles et ses cercles de latitude sur une planche circulaire qu'on évidait ensuite, en ne laissant qu'un limbe sur lequel était l'écliptique divisée en degrés, et ce qu'il fallait pour porter les principales étoiles; cette pièce s'appelait les *rets* ou l'*araignée*. On y marquait aussi le centre de la projection, par lequel on faisait passer une vis, pour que la pièce pût tourner autour du pôle du monde, et représenter les levers et les couchers des différentes étoiles et du soleil dont il fallait savoir le lieu sur l'écliptique.

33. Sur les revers ou l'autre face de l'instrument on traçait un cercle divisé en degrés, et au centre tournait une alidade qui servait à prendre la hauteur du soleil, quand on avait suspendu verticalement la machine au moyen d'un anneau placé au-dessus du point 90° de la division. On y traçait encore bien des choses qu'il serait trop long de détailler. Voyez *Clavius* et les auteurs qui ont écrit de l'Astrolabe.

34. C'est par les mêmes moyens que l'on décrit les mappemondes; alors on place l'œil dans l'équateur au point 270° pour un hémisphère, et au point 90° pour l'autre. L'équateur et le 90° méridien sont représentés par des lignes droites qui se croisent à angles droits au centre de la projection. Les autres méridiens se décriront avec des rayons égaux aux sécantes de longitude; les distances au centre sont les tangentes de ces mêmes longitudes; les parallèles ont pour rayon la tangente de la distance polaire, et pour distance des centres la sécante de la distance polaire. On décrit de cette manière les deux hémisphères que l'on place à côté l'un de l'autre.

35. On décrit quelquefois les mappemondes sur l'horizon d'un lieu particulier. Ce lieu devient alors le pôle de la projection dont il occupe le centre; l'œil est supposé au point diamétralement opposé; le pôle du monde en est à une distance $= \text{tang}\,\frac{1}{2}(90° - \text{H}) = \text{tang}(45° - \frac{1}{2}\text{H})$; les méridiens se décrivent alors par les procédés des articles 19 et 23. On décrit de cette manière un hémisphère: l'autre est tout pareil, mais dans une situation renversée; il n'y a que les degrés de longitude à augmenter de 180°.

36. Le grand défaut de cette projection est le peu de ressemblance et de proportion entre les arcs de la sphère et ceux qui les représentent sur la projection. Ainsi (fig. 130) l'arc πA et l'arc AΠ représentent également des arcs de 90°, πD représente un arc de 113° 28', et DΠ, quoique plus grand, ne représente que 66° 32'; les arcs πu, πz, πII sont de 90°; DE représente 23° 28' = DAII = inclinaison de l'écliptique AIIQ sur l'équateur ADQ; il est vrai que les plus grandes inégalités sont dans la partie extérieure au cercle ADQB, qui est proprement la projection. Si nous regardons le cercle πVΠXπ comme une demi-mappemonde, πV, πY, πG, πE représenteront tous des arcs de 90°, et πV sera le seul qui soit un quart de cercle, car $\pi\text{V} = \pi\text{F'Y} = 90° -$ longitude; la courbure va en diminuant jusqu'à πE qui est une ligne droite; les arcs de 90° des parallèles sont représentés par des arcs égaux à leurs latitudes.

37. Les surfaces ne sont pas moins défigurées. En effet, la surface de la sphère est quadruple de celle d'un de ses grands cercles; la surface d'un hémisphère est double de celle du grand cercle; ainsi l'hémisphère boréal projeté sur l'équateur se réduit à moitié, et la réduction n'est pas uniforme.

La surface d'une calotte sphérique est

$$2\pi \sin \text{verse}\, \Delta = 4\pi \sin^2 \tfrac{1}{2}\Delta\,;$$

la surface de sa projection est

$$\pi\,\text{tang}^2 \tfrac{1}{2}\Delta = \pi \sin^2 \tfrac{1}{2}\Delta\, \text{séc}^2 \tfrac{1}{2}\Delta = \tfrac{1}{4}\,(\text{surface calotte})\ \text{séc}^2 \tfrac{1}{2}\Delta\,;$$

la projection d'une zône parallèle au plan est

$$\pi\,(\text{tang}^2 \tfrac{1}{2}\Delta' - \text{tang}^2 \tfrac{1}{2}\Delta) = \frac{\pi \sin \frac{1}{2}(\Delta' - \Delta) \sin \frac{1}{2}(\Delta' + \Delta)}{\cos^2 \frac{1}{2}\Delta' \cos^2 \frac{1}{2}\Delta}\,;$$

la projection du fuseau hémisphérique est la moitié de ce même fuseau.

38. Les parties les moins défigurées sont celles qui avoisinent le centre. Ainsi pour des cartes partielles, soit célestes, soit terrestres, on pourra toujours mettre le milieu du pays ou le milieu d'une constellation au centre de la carte, et l'on aura toute l'exactitude nécessaire. Pour les cartes terrestres, il suffit d'y tracer les méridiens et les parallèles ; pour les cartes célestes, on y tracerait les cercles de déclinaisons, les parallèles à l'équateur, les cercles de latitude et les parallèles à l'écliptique. Ainsi cette projection suffit réellement pour tous les besoins de l'Astronomie, ce qui nous dispense d'entrer dans l'explication des différentes projections proposées par différens auteurs et dans des vues diverses. Une des principales est la projection gnomonique où l'œil est au centre de la sphère ; le plan de projection est un plan tangent à la sphère au point que l'on veut choisir ; alors tous les points voisins ont leur projection à l'extrémité de la tangente de leur distance au point principal. Ces tangentes y font entre elles les mêmes angles que les arcs de distance forment entre eux ; cette projection ne peut servir que pour des espaces bornés. La Hire plaçait l'œil à une distance du centre égale au sinus de 45°. Voyez *Mémoire de* 1701.

39. Un autre inconvénient qui est une suite du premier, c'est la difficulté de trouver par le planisphère la distance véritable de deux points dont on a les projections. Cependant soient M et N ces deux points (fig. 134) ; prolongez CM jusqu'en *m*, CN jusqu'en *n*, l'arc *mn* vous donnera MCN qui est le même que sur la sphère ; CM et CN sont les tangentes des demi-distances au pôle de la projection ; le triangle sphérique donne

$$\cos MN = \cos CM \cos CN + \sin CM \sin CN \cos C$$
$$= \frac{(1-\text{tang}^2 \frac{1}{2} CM)(1-\text{tang}^2 \frac{1}{2} CN) + 4 \,\text{tang} \frac{1}{2} CM \,\text{tang} \frac{1}{2} CN \cos C}{(1+\text{tang}^2 \frac{1}{2} CM)(1+\text{tang}^2 \frac{1}{2} CN)}$$
$$= \frac{(1-\overline{CM}^2)(1-\overline{CN}^2) + 4 CM . CN \cos C}{(1+\overline{CM}^2)(1+\overline{CN}^2)}.$$

Prenez CM' = CM, menez OM'M'', AM'' sera l'arc représenté par CM ; vous aurez donc CM. Faites-en autant pour CN, vous pourrez calculer cos MN.

40. Pour la carte de France on s'est servi d'une construction toute particulière ; le méridien principal est une ligne droite divisée en toises, à partir de l'Observatoire de Paris, qui est le centre de la carte. Par ce centre on a tracé une droite perpendiculaire à la méridienne, ensuite on a placé chaque lieu d'après ses distances à la méridienne et à la perpendiculaire. Ces distances se calculent par les triangles formés à la surface du globe (XXXV. 75). Voy. le *Traité des mouvemens célestes*, de Duséjour, T. II, p. 3.

Pour d'autres cartes on a suivi la projection de Flamsteed, qui n'est que le développement d'un cône tangent à la sphère. On nomme *parallèle moyen* celui qui renferme tous les points de contingence : il est représenté par un cercle qui a pour rayon la tangente de sa distance polaire. Les parallèles voisins le sont par des cercles concentriques, dont les rayons sont cette même tangente augmentée ou diminuée de la différence en latitude. Les méridiens sont représentés par ces tangentes, qui convergent toutes en un même point.

Voyez un Mémoire de M. Henri, formant suite au *Mémorial topographique et militaire*. Paris, 1810.

CHAPITRE XXXVIII.

Du Calendrier.

1. Un calendrier est une méthode ou un système pour distribuer le tems en périodes plus ou moins longues, et qui sont toutes, ou pour la plupart, multiples les unes des autres, telles que les heures, les jours, les semaines, les décades, les mois, les années et les siècles.

Ce mot vient de *calendes ;* c'est ainsi que l'on nommait le premier jour du mois romain, du verbe καλέω, *appeler*, parce que c'était en ce jour qu'on appelait le peuple à l'assemblée.

Quoi qu'il en soit de cette étymologie, il est certain que les Romains désignaient par le mot *kalendarium*, la distribution de l'année en mois, qui commençaient tous par un jour qui se nommait le *jour des kalendes.*

2. La plus courte de toutes les divisions qui entrent dans le calendrier, est celle des heures qui sont la vingt-quatrième partie du jour. Nous avons distingué les heures de tems vrai et celles de tems moyen ; mais la différence des unes aux autres est trop peu de chose pour être sensible dans les usages civils, où l'on suppose tacitement tous les jours égaux et divisés en 24 heures égales.

3. Cependant les Grecs divisaient la nuit en douze heures égales entre elles, et le jour proprement dit, en douze heures pareillement égales entre elles, mais qui n'étaient égales à celles de la nuit que le jour de l'équinoxe; ils appelaient ces heures ὧραι καιρικαί, heures temporaires ou heures des différentes saisons. Ces heures variaient sans cesse de valeur avec l'arc diurne et l'arc nocturne du soleil. L'heure temporaire du jour était donc $\frac{1}{6}$ de la demi-durée du jour ; elle valait en degrés $(\frac{15}{6})$ de la demi-durée du jour $= \frac{1}{6}$ (arc semi-diurne). L'heure temporaire de la nuit était $\frac{1}{6}$ de la demi-durée de la nuit; elle valait $\frac{1}{6}$ (arc semi-nocturne).

Pour calculer les anciennes observations, Ptolémée convertit toujours les heures temporaires en heures qu'il appelle équinoxiales, et qui sont les heures qui répondent à un angle de 15°. Cet usage prouve ce que nous savons d'ailleurs, que les anciens astronomes ne faisaient aucun usage des horloges, que leur manière d'estimer le tems d'un phénomène était extrêmement vague ; 1 h. $\frac{1}{4}$ après le coucher ou avant le lever du soleil, 4 h. $\frac{3}{4}$ avant ou après minuit; telle était leur manière de marquer le tems d'une éclipse, et nous ne voyons dans Ptolémée aucun exemple de fraction de tems qui soit au-dessous d'un quart d'heure.

4. Le jour de 24 heures, que quelques auteurs nomment le jour artificiel, était appelé par les Grecs *nycthémère*, νυχθήμερον ou nuit-jour. Cette expression était plus convenable et plus juste.

Les heures du jour étaient consacrées aux planètes dont elles portaient les noms. Supposons la première dédiée au soleil, la seconde à Vénus, la troisième à Mercure, la quatrième à la Lune, la cinquième à Saturne, la sixième à Jupiter, la septième à Mars, la huitième au soleil, et ainsi de suite. Le jour prenait le nom de la planète qui présidait à la première heure du jour.

Le soleil aurait donc la première heure, la 8ᵉ, la 15ᵉ et toutes les heures désignées par les nombres de la forme $(1+7n)$, c'est-à-dire tous les multiples de 7 augmentés de l'unité.

Vénus, toutes les heures dont le nombre serait de la forme $(7n+2)$.
Mercure, toutes les heures de la forme $(7n+3)$.
La Lune, toutes les heures de la forme $(7n+4)$.
Saturne, toutes les heures de la forme $(7n+5)$.
Jupiter, toutes les heures de la forme $(7n+6)$.
Mars enfin, toutes les heures de la forme $(7n+7)=7(n+1)$.

5. La formule générale est $(7n+a)=24m+1$, $a-1=24m-7n<8$.

Soit $7n+a=1$, $n=0$, $a=1$, le premier jour appartient au soleil.

Soit $7n+a=25$, pour avoir la planète qui préside à la première heure du second jour, nous verrons que n doit être 3 et $7n+a=21+a=25$, ou $a=4$. Ainsi la lune donnera son nom au second jour, qui s'appelle *Lunæ dies*, lundi, ou *dilu*, comme on dit en Auvergne.

Soit $7n+a=49$ pour avoir la première heure du troisième jour, $a=49-7.6=49-42=7$. Le troisième jour s'appelle *Martis dies*, ou *dimar* selon les Auvergnats.

Soit $7n+a=73$, $a=73-7.10=73-70=3$; le quatrième jour sera celui de Mercure, *Mercurii dies*, mercredi, ou *di-mecre* en Auvergne.

Soit $7n+a=97$, $a=97-7.13=97-91=6$; le cinquième jour sera celui de Jupiter, *dies Jovis*, jeudi, ou *di-jove*.

Soit $7n+a=121$, $a=121-7.17=121-119=2$; le sixième jour sera celui de Vénus, *Veneris dies*, vendredi, *divénre*.

Soit $7n+a=145$, $a=145-7.20=145-140=5$; le septième jour sera celui de Saturne, *dies Saturni*, samedi, ou *di-sat*.

6. On voit que nous avons égalé le nombre $7n+a$ aux nombres $24.m+1$, en faisant successivement $m=1, 2, 3, 4, 5$ et 6.

Nous avons pris le multiple de 7 le plus approchant de $24m$ en dessous. Nous avons fait ainsi n successivement............ 0, 3, 6, 10, 13, 17 et 20,
dont les différences sont alternativement.. 3, 4, 3, 4, 3.

Les sept planètes ainsi épuisées, les noms des jours reviennent dans le même ordre; car soit $7n+a=169$, $a=169-24.7=169-168=1$; le huitième jour appartient donc au soleil comme le premier. En effet, $169=168+1=7.24^h+1^h$; la période

de 168 jours étant à-la-fois multiple de 7 et de 24, doit ramener les jours dans le même ordre.

Soit $7n + a = 193$, $a = 193 - 7.27 = 193 - 189 = 4$; le neuvième jour appartient à la lune, comme le second, et ainsi de suite, en augmentant toujours m d'une unité, et n de 3 et 4 alternativement.

n est toujours plus petit d'une unité que le quotient en nombre entier de $\frac{24m + 8}{7}$ ou de $\frac{3m + 1}{7}$.

7. Certains peuples comptaient les heures du lever du soleil; ces heures s'appellent *babyloniques*, mais cette méthode ne serait bonne qu'à l'équateur, où le soleil se lève toujours à la même heure.

Dans la sphère oblique le lever change tous les jours, ainsi que la durée du jour; il est impossible aux horloges de suivre une marche aussi inégale, l'usage des heures babyloniques n'a pu être établi que dans des tems d'ignorance.

8. Les Italiens comptent encore les heures du coucher du soleil, et ces heures s'appellent *italiques;* elles ont les mêmes inconvéniens que les heures babyloniques; aussi on est obligé de toucher aux horloges de tems à autre pour les remettre sur l'heure; on leur fait faire *le saut*, dès que la différence monte à $\frac{1}{4}$ d'heure. MM. Piazzi et Cagnoli ont écrit en forme contre cette méthode que Lalande essaie de défendre. Sa raison principale est que la montre indique alors aux voyageurs combien il leur reste de jour, au lieu que dans notre manière, il faut consulter l'almanach pour savoir à quelle heure le soleil se couche. Cela est vrai; mais dans la méthode italienne il faut consulter l'almanach pour savoir à quelle heure répond midi ou le milieu du jour; et pour régler toutes les fonctions civiles dont il est important de fixer les retours d'une manière invariable, ce qui est bien autrement incommode.

9. Hipparque comptait les 24 heures d'un minuit à l'autre; c'est pour minuit qui commençait le premier jour de l'année, qu'il avait établi les époques des mouvemens du soleil et de la lune.

Ptolémée plaça l'époque de ses tables à midi, et compta les 24 heures d'un midi au midi suivant : c'est ce qu'on appelle *tems astronomique.*

Dans l'usage civil on a réuni ces deux dernières méthodes, en partageant le jour en deux espaces de 12 heures.

Si la première moitié commence à minuit, on a le tems civil.

Si la première moitié commence à midi, on a le tems astronomique.

10. On a disputé sur la préférence due au tems civil ou au tems astronomique. Pour les usages civils, il vaut mieux commencer le jour à minuit, parce que le tems du sommeil est la séparation la plus naturelle et la plus facile entre deux jours.

Les astronomes et les navigateurs ont le passage du soleil au méridien pour leur indiquer le commencement du nouveau jour, au lieu qu'il n'y a nul phénomène qui indique immédiatement minuit. Les angles horaires, dans la méthode astronomique, se comptent du méridien supérieur et dans l'intérieur du triangle.

Pour

Pour le tems civil, il faut compter les angles du matin du méridien inférieur, et prendre l'angle horaire extérieurement au triangle.

Les Éphémérides marquent les longitudes, les ascensions droites, les déclinaisons du soleil pour midi vrai, parce que c'est l'instant où l'on observe le soleil, et qu'on peut employer sans réduction tous les arcs ou les angles fournis par l'Éphéméride. Ainsi les astronomes conserveront le tems astronomique qui leur sera plus commode; mais quand ils écrivent pour le public et non plus pour eux seulement, ils traduisent leurs annonces en tems civil, en écrivant par exemple le 11 à 9^h du matin, au lieu du 10 à 21^h, c'est-à-dire, en ajoutant 12^h quand l'heure donnée surpasse 12^h. Si elle est au-dessous de 12^h, s'ils ont le 11 à 9^h tems astronomique, ce sera le 11 à 9^h du soir en tems civil; il n'y aura que le mot *soir* à ajouter.

11. Il serait plus commode que les horloges astronomiques marquassent et que l'on comptât les heures de suite, depuis 0 jusqu'à 24^h, on n'aurait pas besoin de savoir en quelle saison on se trouve pour savoir si les ascensions droites en tems marquées par la pendule sidérale, sont dans la première moitié ou dans la seconde de l'équateur, si 9^h sont véritablement 9^h ou 21^h. J'ai vu dans plusieurs départemens, des horloges dont le cadran était divisé en 24 heures; mais l'usage contraire a prévalu, et comme les inconvéniens ne sont pas bien fâcheux, cet usage se maintiendra probablement.

12. La période de 7 jours ou de 7 fois $24^h = 168^h$, qui ramène invariablement les différens jours dans le même ordre, s'appelle *semaine*, *settimana* en italien, *hebdomas* ou *ἑβδομὰς*, *septaine* en grec. Elle est fort ancienne et fort répandue; elle n'entrait pourtant ni dans le calendrier Romain, ni dans celui des Grecs. Elle paraît venir d'une source commune, car on assure que le jour de la lune chez les Chinois est réellement le même que le jour de la lune pour tout autre peuple qui se sert également de cette période. Les planètes qui donnent les noms aux jours, sont placées dans le même ordre; c'est toujours le Soleil, la Lune, Mars, Jupiter, Vénus et Saturne, si l'on prend les jours l'un après l'autre; c'est toujours le Soleil, Vénus, Mercure, la Lune, Saturne, Jupiter et Mars, si l'on prend les heures l'une après l'autre. Cet arrangement paraîtra bizarre. Quelques anciens, Ptolémée lui-même plaçait Vénus plus près du Soleil que Mercure. Ainsi l'on partait du soleil en venant vers la terre; on trouvait donc d'abord Vénus, puis Mercure, puis la Lune : de là on sautait à l'extrémité du système pour trouver, en revenant vers la Terre, Saturne, Jupiter et enfin Mars. Mais commencez par Saturne et l'ordre sera rétabli, vous aurez la semaine des Hébreux et des Orientaux qui commençait par le samedi.

13. Les Grecs divisaient le mois en trois décades, usage qui était plus commode que celui de la semaine, et que cependant on a vainement tenté de renouveler de nos jours dans le calendrier de la France. L'avantage était que la période était une aliquote exacte du mois de 30 jours; que le quantième de la décade avait un rapport sensible avec le quantième du mois. Ainsi le 7 d'une décade était nécessairement le 7, le 17 ou le 27 du mois, au lieu que le 5 d'une semaine peut être également un des 30 jours du mois, sans qu'on ait aucun moyen de le distinguer, à moins de se souvenir par quel jour a commencé le mois. Supposons, par exemple, qu'il ait commencé par un jeudi qui est le cinq de la semaine, ce cinq de la semaine sera successivement le premier, le 8,

le 15, le 22 et le 29 du mois, toujours en augmentant de 7, ce qui peut aider à trouver tous les autres quantièmes, mais d'une manière beaucoup moins simple.

14. Chez les Grecs, la première décade s'appelait du mois commençant, *ἀρχομένου*; la troisième s'appelait, du mois déclinant, *φθίνοντος*; la seconde, du mois à son milieu, *μεσοῦντος*.

15. Les Romains partageaient le mois d'une manière assez extraordinaire et fort incommode pour les calculs, par leurs *calendes*, leurs *nones* et leurs *ides*.

Les *calendes* étaient invariablement le premier jour du mois. Les *nones* étaient le 7 des quatre mois de mars, mai, juillet et octobre; elles étaient le 5 dans les autres mois. Elles portaient le nom de *nones* ou de *neuvièmes*, parce qu'elles étaient le neuvième jour compté depuis les ides, en rétrogradant. Ainsi les ides étant le 13 janvier, le 12 s'appelait *pridiè idus*, c'est-à-dire le jour avant les ides; le 11 était *tertio idus*, le troisième avant les ides; le 10, *quarto idus*; le 9, *quinto idus;* le 8, *sexto idus;* le 7, *septimo idus;* le 6, *octavo idus;* le 5 était nones.

Les jours qui précédaient les nones se comptaient de même en rétrogradant, et les derniers jours du mois précédent se comptaient encore de même des calendes suivantes, par les mots *pridiè calendas*, *tertio*, *quarto*, *quinto*, *sexto*, etc. *calendas*.

16. Cet arrangement sentait bien l'ignorance et la barbarie, mais il faut le connaître pour expliquer une expression qui nous est restée. Nous avons vu que l'année est de 365 jours $\frac{1}{4}$ environ. Quand César réforma le calendrier Romain, il établit l'année commune de 365 jours trois fois de suite; la quatrième était de 366 jours, pour employer les quatre quarts excédens. Ce 366ᵉ jour se plaçait six jours avant les calendes de mars; on disait alors *bissexto calendas*, de là nous vient le nom d'année bissextile.

Quand les ides étaient le 13, on avait jusqu'à 17 jours avant les calendes. Il est incroyable qu'une division si incommode ait pu si long-tems subsister.

17. Les semaines sont infiniment plus commodes, quoiqu'elles ne divisent exactement ni le mois, ni l'année; car 52 semaines ne font que 364 jours, d'où il suit que le 365ᵉ jour de l'année est le même jour que le premier; le 366ᵉ est plus avancé d'un jour dans la semaine. Ainsi, après une année commune, l'année commence un jour plus tard que la précédente; après une année bissextile, elle commence deux jours plus tard que la bissextile précédente. Ainsi, soit n le numéro du jour qui a commencé une année commune, le jour qui commencera l'année suivante sera $(n+1)$; mais si une bissextile a commencé par n, le numéro qui commencera l'année suivante sera $(n+2)$.

Si janvier a commencé par n, février commencera par $(n+3)$; si février commence par n, mars commencera de même dans les années communes, et par $(n+1)$ dans les années bissextiles. Si un mois de 30 jours commence par n, le mois suivant commencera par $(n+2)$.

18. Les mois, à la réserve de février, sont de 30 ou de 31 jours. En les faisant alternativement de 30 et de 31 jours, on aurait eu 366; ainsi, dans les années communes, on aurait dû faire novembre et décembre de 30 jours; décembre n'aurait eu 31 que dans

les années bissextiles. Les deux jours qu'on a mis de moins à février, par des raisons qui ont perdu toute leur importance, ont nécessité un arrangement bizarre et difficile à retenir. Les mois de 31 jours sont janvier, mars, mai, juillet et août, octobre et enfin décembre.

Pour aider la mémoire, on a deux moyens : fermez la main, et comptez les mois par les racines des quatre doigts et par les trois creux qui les séparent ; les mois qui tomberont sur les doigts auront 31 jours, ceux qui tomberont dans les creux n'en auront que 30 au plus, car février qui tombera dans le premier creux, n'en aura que 28 ou 29.

Autrement, ouvrez la main, et baissez le second et le quatrième doigt ; les doigts levés indiqueront les mois de 31 jours, en commençant par le pouce qui est affecté au mois de mars. Les doigts baissés indiqueront les mois de 30 jours, à la réserve de février qui sera le dernier de tous.

Mars commençait l'année autrefois, et c'est une des raisons qui ont fait que février n'a que 28 jours.

19. Les Égyptiens, qui faisaient tous les mois de 30 jours invariablement, ajoutaient après le douzième mois, cinq jours épagomènes ou *additionnels*. Le calendrier Français, qui n'a guère duré que dix ans, avait renouvelé cet usage ; mais les Égyptiens qui ne connaissaient pas l'année bissextile, perdaient environ six heures tous les ans, et 1461 de leurs années ne valaient que 1460 ans du calendrier Julien. Cette année égyptienne s'est appelée *vague*, parce que le commencement n'était pas fixe comme dans les calendriers plus modernes, et qu'il rétrogradait successivement d'un jour tous les quatre ans, et répondait successivement à toutes les saisons.

20. Les mois viennent probablement de la lune dont la révolution synodique est de $29^j \frac{1}{2} + 44' 3''$, ensorte que les mois lunaires sont alternativement de 29 et 30 jours, sauf quelques intercalations pour tenir compte des $44' 3''$. Douze mois lunaires de $29 \frac{1}{2}$ jours ne font que 354 jours, il s'en faut communément de onze jours que douze mois lunaires ne fassent une année.

21. L'année moyenne de $365 \frac{1}{4}$, supposée dans le calendrier Julien ou de Jules-César, est trop longue de $11'$ 10 ou $12''$ qui font un jour en 75 ans, ou 4 jours en 300 ans. Ainsi, l'année Julienne est vague comme l'année Égyptienne, quoique moins considérablement et dans un sens opposé, et l'année devait commencer successivement dans toutes les saisons, passer du printems à l'été, à l'automne et à l'hiver. Le Concile de Nicée avait attaché la célébration de la Pâque au dimanche qui suivrait le quatorzième jour de la lune du premier mois, c'est-à-dire qui coïnciderait avec l'équinoxe ou le suivrait ; il avait fixé l'équinoxe au 21 mars.

En 1582, l'équinoxe avait avancé de 10 jours ; il tombait au 11 mars, parce que le commencement de l'année avait retardé d'autant dans l'intervalle. Le Pape Grégoire XIII voulut remédier à ce déplacement et le prévenir pour toujours. Il supprima les 10 jours d'anticipation, et le lendemain du 4 octobre on compta le 15 ; il ordonna de plus qu'à l'avenir on supprimerait la bissextile de trois années centenaires sur quatre. Tels sont les deux articles les plus importans de la réformation Grégorienne.

Grégoire ou plutôt ses mathématiciens supposaient la longueur de l'année de $365^j\ 5^h$

49′ 16″ 23‴ $\frac{1}{4}$, c'est-à-dire trop longue de 26″ seulement. Tout allait assez bien jusques-là; mais la même raison qui avait porté Grégoire à cette réforme, le porta à gâter son ouvrage, en le compliquant ainsi que nous verrons bientôt.

22. Le calendrier Julien était, malgré ses défauts, le plus commode qu'on pût imaginer pour les usages astronomiques pour lesquels il importe fort peu que le commencement de l'année soit absolument fixe. Rien de plus simple que l'intercalation d'un jour tous les quatre ans.

La réforme Grégorienne offre une intercalation assez simple encore, celle d'un jour tous les quatre ans pour les années qui ne sont pas centenaires; et pareillement celle d'un jour tous les quatre siècles pour les années centenaires dont trois sur quatre sont communes.

Nous passerons sous silence d'autres intercalations plus ou moins exactes, mais trop peu commodes, et dont les astronomes n'ont jamais eu l'occasion de se servir. Chez les anciens Romains, les intercalations étaient abandonnées aux soins des pontifes, qui les plaçaient sans autre règle que leur caprice ou leur intérêt. Il en était résulté un désordre épouvantable, auquel Jules-César, en qualité de grand-pontife, apporta remède, en donnant à l'année une forme plus régulière; il fit coïncider son année civile avec l'année astronomique. Sosigene, mathématicien d'Égypte, lui donna l'année solaire de 365 jours $\frac{1}{4}$. Hipparque avait plus anciennement fait voir qu'elle était réellement plus courte d'un trois-centième. Sosigene doutait peut-être de l'exactitude de cette correction, peut-être la trouvait-il trop peu importante pour les usages ordinaires.

23. Pour remédier au désordre, on ajouta 90 jours à l'an 47 avant notre ère. Cette année, au lieu d'être de 355, fut de 445; on l'appela l'*année de confusion*.

Les mois romains étaient *Januarius*, *Februarius*, *Martius*, *Aprilis*, *Maius*, *Junius*, *Quintilis* et depuis *Julius*, *Sextilis* qui fut ensuite *Augustus*, *September*, *October*, *November* et *December*. La plupart de ces noms montraient que l'origine de l'année était au mois de Mars. Ces noms traduits dans les langues modernes, sont restés dans notre calendrier.

24. Les mois égyptiens étaient

Thoth......	Θὼθ......	1
Phaophi....	Φαωφὶ....	31
Athyr......	Ἀθὺρ....,	61
Chœak.....	Χοιὰκ.....	91
Tybi.......	Τυβὶ......	121
Mechir.....	Μεχὶρ.....	151
Phamenoth..	Φαμενὼθ...	181
Pharmuthi..	Φαρμουθὶ...	211
Pachon.....	Παχὼν....	241
Payni......	Παϋνὶ.....	271
Epiphi.....	Ἐπιφὶ.....	301
Mesori.....	Μεσορὶ....	331
Cinq jours épagomènes..		361
(bracketed:) Jours de l'année correspondant au premier de chaque mois.		

C'est à ces mois que Ptolémée réduit la date des phénomènes qu'il a occasion de calculer. Il compte ses années de l'ère de Nabonassar.

Le premier jour de la première année du règne de Nabonassar, c'est-à-dire le premier de Thoth de la première année de Nabonassar, est rapporté par les chronologistes au 26 février de l'an 3967 de la période Julienne dont nous parlerons bientôt, ou de l'an 747 avant notre ère, suivant les mêmes chronologistes, ou 746 selon la manière des astronomes qui comptent o l'année qui a précédé l'an 1 de notre ère.

25. Quatre années égyptiennes ont un jour de moins que quatre années Juliennes; ainsi le commencement des années de Nabonassar doit rétrograder d'un jour tous les quatre ans.

Les années de Nabonassar dans la table suivante vont de 4 en 4, aussi bien que les années Juliennes, à la réserve de l'année Julienne 520 qui suit immédiatement 523, par la raison que l'année 227 de Nabonassar, ayant commencé le premier janvier 520 qui était bissextile, l'année 228 a dû commencer 365 jours plus tard, c'est-à-dire le 31 décembre de l'année 520. M. Ideler a donné une table de ce genre, un peu moins étendue; mais il a formé cette table pour les chronologistes qui comptent une année de plus que les astronomes avant J. C. A cela près, nos deux tables s'accordent en tout.

Pour une année intermédiaire entre celles de notre table, telle que seraient 561, 562 et 563, nous conserverions le jour du mois 9 octobre; mais nous aurions 187, 186, 185 successivement pour l'année.

Si nous cherchons par nos tables, pour l'époque de Nabonassar, le lieu moyen de la lune et du soleil, nous trouverons pour la distance angulaire de la lune au soleil,

$$☾ - ☉ = 2^s\, 11°30'33''$$

suivant Ptolémée = 2.10.37

la différence n'est que de 53.33

Au moyen de cette table, on pourra calculer par nos tables, tous les phénomènes rapportés par les anciens à l'ère de Nabonassar. En effet, quand on sait à quel jour de l'année Julienne répond le premier de Thoth de l'année de Nabonassar, en ajoutant de suite 12 fois 30 jours, on aura le premier de chaque mois égyptien. Ainsi l'an 260 de Nabonassar, le premier de Thoth répondant au 23 décembre de l'année — 488.

Le premier de Phaophi répond au 53 décembre ou 22 janvier...... — 487.

Le premier d'Athyr au 52 janvier ou 21 février — 487.

Le premier de Chœak au 51 février ou 23 mars.

Le premier de Tybi au 53 mars ou 22 avril.

Le premier de Mechir au 52 avril ou 22 mai.

Le premier de Phamenoth au 52 mai ou 21 juin.

Le premier de Pharmuthi au 51 juin ou 21 juillet.

Le premier de Pachon au 51 juillet ou 20 août.

Le premier de Payni, au 50 août ou 19 septembre.

Le premier d'Epiphi au 49 septembre ou 19 octobre.

Le premier de Mesori au 49 d'octobre ou 18 novembre.

Le premier des épagomènes au 48 novembre ou 18 décembre.

Ajoutez 5, et vous aurez le 23 décembre 487 pour le commencement de l'an 261.

CORRESPONDANCE des années de Nabonassar et des années Juliennes.

Nab.	Années juliennes.	Nab.	Années juliennes.	Nab.	Années juliennes.	Nab.	Années juliennes.	Nab.	Années juliennes.	Nab.	Années juliennes.
1	26 févr. —746	192	9 janv. —555	392	20 nov. —356	592	1 oct. —156	792	12 août. +44	992	23 juin. +244
2	26 —745	196	8 551	396	19 352	596	30 sept. 152	796	11 48	996	22 248
3	26 —744	200	7 547	400	18 348	600	29 148	800	10 52	1000	21 252
4	25 —743	204	6 543	404	17 344	604	28 144	804	9 56	1004	20 256
8	24 —739	208	5 —539	408	16 —340	608	27 —140	808	8 + 60	1008	19 +260
12	23 —735	212	4 —535	412	15 —336	612	26 —136	812	7 + 64	1012	18 +264
16	22 731	216	3 531	416	14 332	616	25 132	816	6 68	1016	17 268
20	21 727	220	2 527	420	13 328	620	24 128	820	5 72	1020	16 272
24	20 723	224	1 523	424	12 324	624	23 124	824	4 76	1024	15 276
28	19 —719	228	31 déc. —520	428	11 —320	628	22 —120	828	3 + 80	1028	14 +280
32	18 —715	232	30 —516	432	10 —316	632	21 —116	832	2 + 84	1032	13 +284
36	17 711	236	29 512	436	9 312	636	20 112	836	1 88	1036	12 288
40	16 707	240	28 508	440	8 308	640	19 108	840	31 juill. 92	1040	11 292
44	15 703	244	27 504	444	7 304	644	18 104	844	30 96	1044	10 296
48	14 —699	248	26 —500	448	6 —300	648	17 100	848	29 +100	1048	9 +300
52	13 —695	252	25 —496	452	5 —296	652	16 — 96	852	28 +104	1052	8 +304
56	12 691	256	24 492	456	4 292	656	15 92	856	27 108	1056	7 308
60	11 687	260	23 488	460	3 288	660	14 88	860	26 112	1060	6 312
64	10 683	264	22 484	464	2 284	664	13 84	864	25 116	1064	5 316
68	9 —679	268	21 —480	468	1 —280	668	12 — 80	868	24 +120	1068	4 +320
72	8 —675	272	20 —476	472	31 oct. —276	672	11 — 76	872	23 +124	1072	3 +324
76	7 671	276	19 472	476	30 272	676	10 72	876	22 128	1076	2 328
80	6 667	280	18 468	480	29 268	680	9 68	880	21 132	1080	1 332
84	5 663	284	17 464	484	28 264	684	8 64	884	20 136	1084	31 mai. 336
88	4 —659	288	16 —460	488	27 —260	688	7 — 60	888	19 +140	1088	30 +340
92	3 —655	292	15 —456	492	26 —256	692	6 — 56	892	18 +144	1092	29 +344
96	2 651	296	14 452	496	25 252	696	5 52	896	17 148	1096	28 348
100	1 647	300	13 448	500	24 248	700	4 48	900	16 152	1100	27 352
104	31 janv. —643	304	12 444	504	23 244	704	3 44	904	15 156	1104	26 356
108	30 —639	308	11 —440	508	22 —240	708	2 — 40	908	14 +160	1108	25 +360
112	29 —635	312	10 —436	512	21 —236	712	1 — 36	912	13 +164	1112	24 +364
116	28 631	316	9 432	516	20 232	716	31 août 32	916	12 168	1116	23 368
120	27 627	320	8 428	520	19 228	720	30 28	920	11 172	1120	22 372
124	26 623	324	7 424	524	18 224	724	29 24	924	10 176	1124	21 376
128	25 —619	328	6 —420	528	17 —220	728	28 — 20	928	9 +180	1128	20 380
132	24 —615	332	5 —416	532	16 —216	732	27 — 16	932	8 184	1132	19 +384
136	23 611	336	4 412	536	15 212	736	26 12	936	7 188	1136	18 388
140	22 607	340	3 408	540	14 208	740	25 8	940	6 192	1140	17 392
144	21 603	344	2 404	544	13 204	744	24 — 4	944	5 196	1144	16 396
148	20 —599	348	1 —400	548	12 —200	748	23 0	948	4 +200	1148	15 +400
152	19 —595	352	30 nov. —396	552	11 —196	752	22 + 4	952	3 +204	1152	14 +404
156	18 591	356	29 392	556	10 192	756	21 8	956	2 208	1156	13 408
160	17 587	360	28 388	560	9 188	760	20 12	960	1 212	1160	12 412
164	16 583	364	27 384	564	8 184	764	19 16	964	30 juin. 216	1164	11 416
168	15 —579	368	26 —380	568	7 —180	768	18 + 20	968	29 +220	1168	10 +420
172	14 —575	372	25 —376	572	6 —176	772	17 + 24	972	28 +224	1172	9 +424
176	13 571	376	24 372	576	5 172	776	16 28	976	27 228	1176	8 428
180	12 567	380	23 368	580	4 168	780	15 32	980	26 232	1180	7 432
184	11 563	384	22 364	584	3 164	784	14 36	984	25 236	1184	6 436
188	10 —559	388	21 —360	588	2 —160	788	13 + 40	988	24 +240	1188	5 +440

26. Il n'y a pas long-tems que le commencement de l'année est fixé d'une manière générale, comme il l'est maintenant pour l'Europe, à quelques exceptions près. Les Grecs la commençaient au mois de septembre; les Romains, sous Romulus, au premier mars; sous Numa, au premier janvier. Long-tems en France, elle commença à Pâques, ou à l'*Annonciation* le 25 mars, ce qui était mieux vu.

L'année de Romulus n'avait que dix mois qui formaient 304 jours. Numa y ajouta deux mois, et elle fut de 354 ou 355 suivant Solinus. Il avait placé janvier au commencement et février à la fin; mais l'an 450 avant notre ère, les décemvirs placèrent février entre janvier et mars.

27. Le calendrier imaginé en France en 1792, se rapprochait, à beaucoup d'égards, du calendrier égyptien; les mois étaient invariablement de 30 jours, et se divisaient en trois décades. On ajoutait après le douzième cinq épagomènes dans les années communes, et un jour de plus quand cela devenait nécessaire, pour que l'équinoxe d'automne tombât dans l'une des vingt-quatre heures qui composaient le premier jour de l'année. On avait voulu donner aux mois des noms significatifs.

Les trois premiers étaient *Vendémiaire*, *Brumaire* et *Frimaire*.

Les trois mois d'hiver étaient *Nivose*, *Pluviose* et *Ventose*.

Ceux du printems étaient *Germinal*, *Floréal*, *Prairial*.

Enfin ceux d'été, *Messidor*, *Thermidor* et *Fructidor*.

On a critiqué ces dénominations et la manière dont elles étaient formées de mots tirés de différentes langues; mais elles avaient l'avantage d'offrir des terminaisons uniformes pour une même saison, et qui changeaient d'une saison à l'autre.

28. Chaque mois commençait à fort peu près avec l'entrée du soleil dans un signe nouveau, au lieu que dans le calendrier Julien ou Grégorien, l'entrée du soleil en chaque signe arrive vers le 22e jour du mois.

Une circonstance particulière avait fixé le commencement de l'année à l'entrée du soleil au signe de la Balance, et cette détermination se trouva peu commode et peu en harmonie avec les usages agricoles. Ce commencement eût été plus convenable aux peuples de l'hémisphère austral; dans nos climats septentrionaux, les astronomes commenceraient l'année à l'équinoxe du printems, quand la longitude du soleil est 0 :

Principium capiunt Phœbus et annus idem. Ovid.

Mais pour les usages civils dans notre hémisphère, le commencement qui conviendrait le mieux serait le solstice d'hiver, et dans le fait, le premier janvier n'en est pas bien loin; et puisque la durée de l'année n'est pas d'un nombre exact de jours, que la longitude moyenne du soleil ne peut pas être deux années de suite nulle au premier jour de l'an, qu'il s'en manque de quelques minutes ou quelques degrés, cela devient absolument indifférent, et il vaut mieux s'en tenir à l'usage le plus général.

29. Quelques savans avaient été consultés sur la forme à donner à cette année qu'on voulait établir malgré eux; mais en leur demandant des avis, on posait des bases dont il ne leur était pas permis de s'écarter. On voulait que le commencement de l'année fût déterminé par l'entrée vraie du soleil dans le signe de la Balance, et arrêté chaque fois

par le Corps législatif, d'après une déclaration des astronomes. Les astronomes furent les premiers à réclamer contre cet article de la loi qui, sans nécessité, détruisait la facilité et l'uniformité de l'intercalation ; ils prouvèrent que cet article n'était pas seulement incommode, mais que dans quelques circonstances, rares à la vérité, il devenait impossible à suivre rigoureusement. En effet, supposons que l'équinoxe vrai soit indiqué par les tables, à minuit ou à fort peu près, la lenteur du mouvement fera que la petite erreur des tables empêchera de savoir à quel jour appartient bien sûrement l'équinoxe ; l'observation même n'aurait pas assez de précision pour le déterminer. L'année 144 de la nouvelle ère était dans ce cas, jamais on n'aurait pu savoir quel jour elle avait dû commencer. Supposons qu'on eût perdu la table de nos intercalations qui se succédaient dans un ordre irrégulier, tantôt après quatre ans, tantôt après cinq, il aurait été impossible de la retrouver dans les siècles futurs, à moins que l'année douteuse n'eût offert une observation d'éclipse.

Sur nos réclamations, l'auteur le plus entêté du calendrier voulut bien adopter la réforme de l'intercalation. J'eus avec lui plusieurs conférences ; lorsque nous fûmes convenus des faits, il provoqua une assemblée de géomètres, d'astronomes et autres savans : mon projet fut adopté. Romme voulut le rédiger lui-même ; il s'y trompait toujours, et je lui faisais mes observations ; enfin, quand il ne resta plus que de légères imperfections, j'y donnai mon assentiment, et Romme porta son projet de décret à la Convention. Mais ce jour-là précisément il s'y passa une scène qui le fit mettre *hors de la loi*. Le projet imprimé parut le jour même de la mort de l'auteur.

Nous aurions pu trouver dans le Comité d'instruction publique, un autre rapporteur ; mais celui auquel nous nous adressâmes n'osa proposer aucune réforme, de peur qu'on ne supprimât tout-à-fait ce calendrier, au lieu de le corriger. Et en effet, il était plus sage d'y renoncer, puisqu'il n'était que peu goûté même en France, et qu'il n'y avait aucun espoir de le faire adopter par les autres nations.

30. Je proposais de rétablir l'intercalation Grégorienne, avec une modification très-légère qui la perfectionnait, sans la rendre plus difficile.

Supposons l'année moyenne de $365^j\ 5^h\ 48'\ 48'' = 365^j,24\frac{2}{9}$, les $0^j\,24\frac{2}{9}$ en 9 ans feront $2^j,18$; $10^j,9$ en 45 ans ; 109 en 450 ans, ou 218 jours en 900 ans, et enfin 872 jours en 3600 ans.

En 3600 ans le calendrier Julien mettait 900 intercalations, c'était 28 de trop. Le calendrier Grégorien en a retranché 27 ; il en reste une à retrancher, ce qui se fait commodément, en rendant commune l'année 3600 et ses multiples.

31. Dans le calendrier Julien, la règle est de faire bissextile une année marquée par un multiple de quatre.

Dans le calendrier Grégorien, cette règle est conservée, et l'on y ajoute celle-ci, que les années séculaires ne seront bissextiles que dans le cas où le nombre qui les exprime, quand on efface les deux zéros qui le terminent, est encore divisible par 4.

Enfin, je proposais d'ajouter une troisième règle qui était de supprimer une bissextile tous les 3600 ans, ou, si l'on aimait mieux, tous les 4000 ans ; ce qui était encore plus commode et presque aussi exact.

32.

32. On aurait dû placer l'intercalation à la fin de l'année, en portant à 6 le nombre des jours épagomènes. Jules-César la donna au mois de février qui n'avait que 28 jours; et par des raisons qui semblent aujourd'hui très-futiles, on en fit un second sixième avant les calendes, *bissexto calendas*. Elle a conservé cette place dans le calendrier ecclésiastique, mais dans le calendrier civil, elle est le 29 février, ce qui est encore assez incommode pour les tables astronomiques.

33. Le nombre des jours de la semaine et celui de l'année sont premiers entre eux; il fallait trouver un moyen d'exprimer leur relation, et de connaître le jour de la semaine correspondant au jour de l'année. Et comme jamais deux années de suite ne commencent par le même jour, il fallait, pour rendre le calendrier perpétuel, y désigner les jours de la semaine par des indéterminées, ou par des espèces de signes algébriques susceptibles de toutes les valeurs depuis 1 jusqu'à 7. C'est ce qu'on a fait par les lettres dominicales, c'est-à-dire servant à désigner le *dimanche;* on a donc pris les sept premières lettres de l'alphabet, qu'on a placées à côté des quantièmes du mois, où elles reviennent comme en cercle, en mettant de nouveau A à la suite de G, ce qui forme des périodes continuelles des lettres A, B, C, D, E, F et G. Sept de ces lettres consécutives forment toujours une semaine.

Ces lettres sont arrangées pour une année commune de 365 jours, et quand on sait quelle lettre désigne le dimanche, on sait par là même ce que signifient toutes les autres. Soit, par exemple, C la lettre dominicale ou du dimanche, D signifiera lundi, E mardi, F mercredi, G jeudi, A vendredi, B samedi, C dimanche.

Il reste donc à trouver une règle qui fasse connaître la lettre dominicale pour une année quelconque.

34. Or c'est un fait que l'année première de notre ère commençait par un samedi, que la lettre A indiquait le samedi, et que par conséquent B était la lettre dominicale de l'an 1; le dernier jour de cette année qui n'avait que 365 jours, était donc un samedi; l'an 2 commençait par un dimanche. Mais le premier jour de l'année est toujours marqué d'un A; donc la lettre dominicale qui était B l'an 1, devient A en l'an 2, et rétrograde d'un rang. Elle sera donc G en l'an 3, et F en l'an 4.

Soit donc L le numéro de la lettre dominicale pour une année quelconque, le numéro de l'année suivante $(L-1)$, et après un nombre a d'années, il serait $(L-a)$. Mais il arrivera presque toujours que a sera plus grand que L; pour rendre la soustraction possible, on ajoute un multiple de 7 ou $7n$, et la formule générale est $(7n+L-a)$; or l'an o $L=3$, la formule sera donc $(7n+3-a)$, a étant le nombre d'années depuis l'an o.

Mais sur quatre années il y a une bissextile, et chaque intercalation fait rétrograder la lettre d'une unité; la formule deviendra donc $(7n+3-a-\frac{1}{4}a)$; $\frac{1}{4}a$ est toujours nombre entier, et l'on néglige le reste de la division quand elle en offre un.

35. La règle n'est donc bonne que pour le calendrier Julien, où l'intercalation arrive régulièrement tous les quatre ans.

On pourrait la rendre générale, en commençant par réduire une date Grégorienne quelconque à la date Julienne correspondante. Pour cette réduction, il faut se souvenir qu'en l'an 1582 on a retranché 10 jours, et que le 5 octobre est devenu le 15; ainsi,

depuis 1582, 5 octobre jusqu'en 1700, nous avons compté dix jours de plus que ceux qui ont conservé le calendrier Julien. Nous avons supprimé une intercalation en 1700, alors nous avons compté onze jours de plus : nouvelle suppression en 1800, qui nous fait compter 12 jours de plus que les Russes. Le premier mars 1900, nous compterons 13 jours de plus, et ainsi de suite.

Ainsi, pour la réduction au calendrier Julien, il faut retrancher la correction $\frac{3}{4}(S-16)$, S étant le nombre qui marque le siècle. Il faut de plus retrancher les dix jours omis en 1582 ; la correction entière sera donc

$$c = 10 + \tfrac{3}{4}(S-16) = 10 + (S-16) - \tfrac{1}{4}(S-16);$$

en 1700, $c = 10 + 17 - 16 - \frac{1}{4}(17-16) = 10 + 1 = 11$, en rejetant les fractions ;
en 1800, $c = 10 + 18 - 16 - \frac{1}{4}(18-16) = 10 + 2 = 12$;
en 1900, $c = 10 + 19 - 16 - \frac{1}{4}(19-16) = 10 + 3 = 13$;
en 2000, $c = 10 + (20-16) - \frac{1}{4}(20-16) = 10 + 4 - 1 = 13$;
en 2100, $c = 10 + (21-16) - \frac{1}{4}(21-16) = 10 + 5 - 1 = 14$, etc.

36. On peut porter cette réduction avec un signe contraire, dans la formule qui deviendra

$$7n + 3 - a - \tfrac{1}{4}a + 10 + (S-16) - \tfrac{1}{4}(S-16),$$
$$7n + 13 - a - \tfrac{1}{4}a + (S-16) - \tfrac{1}{4}(S-16),$$
$$7n + 6 - a - \tfrac{1}{4}a + (S-16) - \tfrac{1}{4}(S-16),$$

et alors elle servira pour tous les tems postérieurs à la réformation ; avant la réformation, on s'en tiendra à la formule $7n + 3 - a - \frac{1}{4}a$.

Pour exemple des trois cas qui peuvent se présenter, cherchons la lettre dominicale pour l'an 1582 avant la réformation, pour 1582 après la réformation, et enfin pour une année quelconque après 1582. Soit donc $a = 1582$, $\frac{1}{4}a = 395$.

$$7n + 3 - 1582 - 395 = 7n + 3 - 1977 = 7n - 1974 = 7n - 7.282 = 0;$$

la lettre dominicale sera donc 0 ou 7, c'est-à-dire G.

En 1582, mais après la réformation

$$7n+3-1582-395+10=7n-1977+13=7n-1964=7n-7.280-4=7-4=3;$$

donc la lettre dominicale pour les trois derniers mois était C.

Cette année a donc eu deux lettres dominicales. La première, G, a servi jusqu'au 4 octobre inclusivement ; la seconde, C, a servi depuis le 15 octobre jusqu'au 31 décembre.

En 1808,

$$7n + 6 - 1808 - 452 + (18-16) - \tfrac{1}{4}(18-16),$$
$$7n + 6 - 2260 + 2 - 0 = 7n - 2252 = 7n - 7.321 - 5 = 7 - 5 = 2 = \text{B}.$$

Mais l'année est bissextile, la lettre B ne servira qu'après l'intercalation que notre calcul suppose déjà faite. Avant l'intercalation, la lettre dominicale avait rétrogradé une fois de moins ; elle était donc C ; les deux lettres dominicales de 1808 sont donc C.B.

Au lieu de cette formule générale, Lalande en a donné de particulières pour les différens siècles; elles sont plus difficiles à retenir.

37. Le 28 février qui est le 59ᵉ de l'année, doit avoir la lettre C, puisque $59=7.8+3$; le premier Mars a donc la lettre D. Supposons que C désigne un mardi, D indiquera le mercredi. Mais dans l'année bissextile, en plaçant un 29ᵉ jour, ce 29 sera le mercredi, et le premier mars sera le jeudi; D marquera donc le jeudi, E le vendredi, F le samedi, G le dimanche; au lieu qu'avant l'intercalation, la lettre dominicale était A, puisque par l'hypothèse c'était le mardi; l'intercalation fait donc rétrograder la lettre dominicale d'une place. En mettant le jour intercalaire au 29, il était inutile de donner une lettre dominicale à ce 29, ou bien il suffisait de répéter la lettre C, qui aurait indiqué un jour plus avancé que le C du 28. La manière de compter par la distance aux calendes suivantes, a nécessité un arrangement moins simple; on a donc mis double lettre aux derniers jours du mois, en répétant la lettre du jour précédent.

Février	24 F	S. Mathias	*sexto calendas.*
	25 G. F	S. Mathias	*bissexto calendas.*
	26 A. G	....	*quinto calendas.*
	27 B. A	....	*quarto calendas.*
	28 C. B	....	*tertio calendas.*
	29 C	....	*pridiè calendas.*
Mars...	1 D.		

Saint-Mathias, dont la fête se célébrait ordinairement au 24, passait alors au 25 avec la lettre F.

38. Si les années eussent été toutes de 365 jours, les lettres dominicales dont le numéro diminue de l'unité tous les ans, seraient revenues tous les sept ans à leur signification primitive.

Dans le Calendrier Julien, où les bissextiles reviennent invariablement tous les quatre ans, en multipliant la période 7 des lettres par la période 4 des intercalations, on aurait eu une période composée de 28 ans, qui aurait ramené les lettres dominicales dans le même ordre. Cette période de 28 ans s'appelle *cycle solaire.* Ainsi, dans le Calendrier Julien, quand on avait donné des lettres aux vingt-huit premières années, on revoyait toutes ces lettres revenir dans le même ordre, dans les 28 années suivantes et dans tous les cycles pareils. *Cycle* est un mot grec qui signifie *cercle.*

39. Pour trouver la lettre d'une année quelconque, il fallait diviser le nombre de l'année par 28. Si la division se faisait sans reste, l'année était la 28ᵉ du cycle; s'il y avait un reste n, l'année était la $n^{ième}$ du cycle.

L'année du cycle étant trouvée, on avait la lettre de l'année dans le tableau des 28 premières années. Ce n'est pas encore là ce qu'on a fait. La première année de l'ère avait B pour lettre dominicale,

la 2ᵉ avait A,
la 4ᵉ F.E, parce qu'elle était bissextile,
la 8ᵉ A.G,
la 12ᵉ C.B,
la 16ᵉ E.D,
la 20ᵉ G.F.

C'est à cette vingtième que l'on place la première année du cycle; la 28ᵉ du cycle précédent était donc l'an 19; le cycle était donc censé avoir commencé 9 ans avant l'ère; la première année de l'ère était donc la dixième du cycle; d'où il suit que pour trouver l'année du cycle, il fallait ajouter 9 au nombre de l'année, et diviser par 28.

Ainsi, en 1582, on avait $\frac{1591}{28} = 56 + \frac{23}{28}$; il y avait donc 56 cycles révolus, et l'on était à la 23ᵉ année du 57ᵉ. Mais, depuis la réforme Grégorienne, ce cycle ne sert plus à trouver la lettre dominicale.

40. Dans le calendrier Grégorien, la période entière d'intercalation est de 400 ans, le cycle des lettres dominicales serait de 2800, période trop longue pour être d'aucun usage; il est vrai qu'on pourrait la réduire à 400 ans. En effet, en 4 ans le numéro de la lettre dominicale varie de — 5; en 400 ans il variait autrefois de — 500 ou de — 3 unités; mais en quatre cents ans on a précisément retranché trois intercalaires, supprimé trois rétrogradations de la lettre dominicale. Ainsi ces lettres reviennent dans le même ordre tous les 400 ans.

41. Quand on connaît une année qui commence par un dimanche, la lettre dominicale est A, puisque le premier janvier est marqué de cette lettre. On en déduit avec facilité toutes les années du siècle qui commencent aussi par un dimanche. Ainsi 1786 commençait par un dimanche : en retranchant successivement 28, on trouve que 1758, 1730 et 1702 commençaient par un dimanche ; la lettre dominicale de 1702 était donc A, celle de 1701 était donc B, le premier et le dernier jour de 1701 étaient des samedis; 1700 avait donc fini et commencé par un vendredi, marqué par A : la lettre dominicale était C; elle était D en 1699, E en 1698, F en 1697, G et A en 1696 qui était bissextile; donc A était la lettre dominicale au commencement de 1696.

Nous pouvons ici reprendre la période de 28 ans, qui nous donnera 1668, 1640, 1612, 1584, car 1600 était bissextile ; toutes ces années commençaient donc par un dimanche. 1583 commençait par un samedi, 1582 finissait par un vendredi; il eût commencé de même sans les dix jours supprimés; A eût marqué le vendredi toute l'année, et C le dimanche. Dix jours font une semaine et trois jours; la suppression de ces dix jours change donc de 3 unités le numéro du jour de la semaine; la lettre dominicale qui était C, augmentée de 3 unités, donnera G. Les deux lettres dominicales de cette année seront donc, par extraordinaire, G.C, G avant la suppression, et C après la suppression et le reste de l'année.

1581 aura donc A pour lettre dominicale, 1580 aura donc B à la fin et C au commencement ou C.B; pour retrouver C.B, on retranchera 28 autant de fois qu'on voudra. Ainsi les lettres dominicales C.B auront lieu en 1580, 1552, 1524, 1496, 1468, 1440,

1412, 1384, 1356, 1328, 1300, 1272, 1244, 1216, 1188, 1160, 1132, 1104, 1076, 1048, 1020, 992, 964, 936, 908, 880, 852, 824, 796, 768, 740, 712, 684, 656, 628, 600, 572, 540, 516, 488, 460, 432, 404, 376, 348, 320, 292, 264, 236, 208, 180, 152, 124, 96, 68, 40, 12 : ici finit notre période de 28 pour les lettres CB; 11 aura D, 10 E, 9 F, 8 GA, 7 B, 6 C, 5 D, 4 F.E, 3 G, 2 A et 1.B. Comme nous l'avons vu (40), il n'est pas besoin de remonter plus haut, puisqu'avant l'ère chrétienne il n'y avait pas de dimanche.

Il est aisé maintenant de trouver les lettres dominicales de toutes les années, depuis 1 jusqu'à 1786, par la période de 28 ans, appliquée successivement à toutes les lettres ou couples de lettres.

1786 avait A; donc 1787 avait G, 1788 F.E, 1789 D, 1790 C, 1791 B, 1792 AG, 1793 F, 1794 E, 1795 D, 1796 BC, 1797 A, 1798 G, 1799 F, 1800 E, 1801 D, 1802 C, 1803 B, 1804 AG. Ces mêmes lettres se retrouveront en 1832, 1860, 1888; F en 1889, E en 1890, D en 1891, CB en 1892, A en 1893, G en 1894, F en 1895, ED en 1896, C en 1897, B en 1898, A en 1899, G en 1900, F en 1901, E en 1902, D en 1903, CB en 1904. En continuant ainsi, on aura B.A pour 1916, et par la période de 28 ans, BA en 1944, 1972 et 2000; ensuite, par la période de 400 ans, BA en 2400, 2800, 3200, 3600, etc.

Quand on aura toutes les lettres des années depuis 1600 jusqu'à deux mille, on les verra revenir dans le même ordre invariablement de 400 en 400 ans.

42. Soient n et $n-1$ les deux lettres d'une année bissextile, la bissextile suivante, quatre ans après, aura $n+2$, $n+1$; quatre ans ensuite, $n+4$, $n+3$, puis $n+6$, $n+5$; $n+8.n+7$, ou $n+1$ et n; $n+3.n+2$, $n+5.n+4$, $n+7.n+6$, ou n et $n-1$. Ainsi, au bout de 28 ans, les bissextiles reviennent les mêmes.

Soit n la lettre de l'année qui suit la bissextile, vous aurez pour le cycle de 28 ans, les quantités suivantes :

n, $n-1$, $n-2$, $(n-3.n-4)$; $n-5$, $n-6$, $n-7=n$, $(n-1.n-2)$;
$n-3$, $n-4$, $n-5$, $(n-6.n-7)$; $n-1$, $n-2$, $n-3$, $(n-4.n-5)$;
$n-6$, $n-7$, $n-1$, $(n-2.n-3)$; $n-4$, $n-5$, $n-6$, ($n-7.n-8$ ou $n.n-1$);
$n-2$, $n-3$, $n-4$, $(n-5.n-6)$; $n-7$ ou n, comme 28 ans auparavant.

Il est évident que $n-7$ équivaut à n, $n-6$ à $n+1$, $n-5$ à $n+2$, $n-4$ à $n+3$.

Une bissextile omise ôte la seconde lettre à l'année qui devait être bissextile et qu'on fait commune. Cette lettre passe à l'année suivante, et pour toutes les années qui viennent après, la lettre augmente d'une unité.

43. La lettre d'une année étant donnée, on trouve celle d'une autre année dans le même siècle; ainsi la lettre de 1801 étant $D=4$, on demande celle de 1899. On dira : D est la lettre de 1801, 1829, 1857, 1885; à présent, de 1885 à 1899, il y a quatorze ans, la lettre n deviendra $n-14=n$; mais de 1885 à 1899, il y a 3 bissextiles, n devient $n-3=D-3=4-3=1$; la lettre 1899 est A, celle 1900 sera G, celle de 1901 sera F, qui sera encore celle de 1929, 1957 et 1985; celle de 1999 sera $F-3=6-3$

$= 3 = C$; celles de 2000 seront B.A, qui reviendront en 2028, 2056, 2084, et reviendraient encore en 2112, sans la suppression d'une bissextile; mais, à cause de cette suppression, $n.n-1$ deviennent

$$n+1.n-1+1 = n+1.n = 2+1.2 = 3.2 = C.B.$$

44. De la première à la dernière du siècle, n devient $n-3$ ou $n+4$. De la première d'un siècle à la première du siècle suivant, n devient $n-5$ ou $(n+2)$, si l'année séculaire a été commune, et $n-6$ ou $n+1$ si elle a été bissextile.

Ainsi, de 1801 à 1901, D devient $D-5=4-5=11-5=6=F$;
de 1901 à 2001, F devient $F-6=6-6=13-6=7=G$;
de 2001 à 2101, G devient $G-5=7-5=2=B$;
de 2101 à 2201, B devient $B-5=2-5=9-5=4=D$.

La lettre de la première année du siècle ainsi trouvée, on en déduit celle d'une année quelconque du même siècle, par le problème 43ᵉ.

45. Quand on connaît la lettre dominicale d'une année, on connaît les dimanches de toute l'année. Ainsi, en 2201, la lettre dominicale est $D=4$, le 4 janvier sera dimanche; le dimanche tombera ensuite sur le 11, sur le 18, le 25, le 32 ou le premier février, le 8, le 15, le 22, le 29 ou le premier mars, parce que l'année est commune; le 8 mars, etc. Quand on connaît tous les dimanches de l'année, on peut trouver celui de Pâques qui suit toujours le quatorzième de la lune, qui tombe ou le jour de l'équinoxe ou après l'équinoxe.

46. Nous avons lié la semaine à l'année. On a cherché à lier l'année lunaire à l'année solaire. Les fêtes d'ancienne institution étaient attachées au cours de la lune, mais les saisons sont attachées au cours du soleil. Pour faire que les fêtes revinssent aux mêmes jours de la lune, et cependant demeurassent à fort peu près dans la même saison, à la même époque de l'année solaire, il a fallu chercher des périodes qui pussent concilier ces deux manières de diviser le tems; nous avons parlé de ces périodes au chapitre de la lune. Nous avons dit que la plus célèbre est le cycle de Méton, qui ramène tous les 19 ans les nouvelles et pleines-lunes aux mêmes jours de l'année solaire, et par conséquent aux mêmes points de l'écliptique; il suffisait donc d'avoir un tableau des nouvelles-lunes pendant 19 ans, pour annoncer les phases de la lune pour une année quelconque, quand on saurait quel rang l'année tient dans le cycle de 19 ans. Il est vrai que ces nouvelles-lunes ne pouvaient être le plus souvent que des lunes moyennes, puisque la somme des inégalités du soleil et de la lune, qui peut aller à près de 10° en plus ou en moins, et qui disparaît à fort peu près dans la période entière, peut donner pour une certaine lune, une erreur de près de deux jours en plus ou en moins.

47. On a pris pour première année de ce cycle, celle où la nouvelle lune tombe au premier janvier, et rien ne pouvait être plus convenable. On y fait les mois lunaires de 29 et de 30 alternativement. Douze de ces mois font donc

$$29,5 \times 12 = 30 \times 12 - 6 = 354 \text{ jours}.$$

A ce compte, 19 années feraient.	6726
Ajoutez tous les trois ans un mois intercalaire de 30 jours, et vous aurez de plus 6 fois 30 jours, ou	180
Ce qui fait déjà un total de.	6906
Mettez à la fin de la période un mois de 29 jours	29
Vous aurez en tout.	6935
Mais dans l'espace de 19 ans, il y a au moins quatre bissextiles, quelquefois et même plus souvent cinq; ajoutez un jour aux mois lunaires qui renfermeront le 29 février.	5
Et dans le cas de 5 bissextiles, vous aurez	6940
Dans le cas de 4 seulement, vous n'aurez que.	6939
19 années de $365\frac{1}{4}$ font $6939^j\ 18^h$, ou	$6939^j,75$
Et 19 années de 365,24222	6939,6913
Mais (XXV. 104) nous avons trouvé que le mois lunaire est de $29^j,530588591$.	
Ce nombre, multiplié par 235 mois ou lunaisons, forme	6939,6883
L'erreur du cycle ne serait donc en elle-même que de.	0,0030
si on pouvait avoir égard aux fractions; mais on la fait de.	6940
Ce qui est trop de	+ 0,3117
Et dans le cas de 4 bissextiles seulement.	− 0,6883

L'erreur serait plus forte, mais en sens contraire de la première qui est bien plus fréquente; il s'opère donc une compensation presque exacte.

48. Les auteurs de la période supposaient le mois plus long, c'est-à-dire de $29^j\ 12^h\ 44'\ 3''\ 10'''\ 48''''$; et en effet, de leur tems le mouvement de la lune était plus lent, les conjonctions devaient revenir plus tard. 235 lunaisons faisaient, à leur

compte, $6939^j\ 16^h\ 32'\ 29''\ 18'''$.	6939,68923
ce qui ne diffère presque pas de 19 années solaires de.	6939,69222
et diffère assez peu de 19 années Juliennes de.	6939,75000

Ce cycle allait donc fort bien avec l'année Julienne, on s'en servait pour déterminer la lune pascale; mais l'intercalation Grégorienne vint renverser cet arrangement qui était assez simple et assez exact pour les usages civils.

Pour trouver le nombre d'or, la règle est fort simple; ajoutez 1 an nombre de l'année, divisez la somme par 19, laissez le quotient; le reste, s'il y en a, sera le nombre d'or : s'il n'y en a pas, l'année proposée sera la dernière ou 19e du cycle. Ainsi, soit l'an 1 pour lequel on cherche le nombre d'or; $1 + 1 = 2$, $\frac{2}{19}$ donne 0 pour quotient et 2 pour reste, 2 sera le nombre d'or de l'an 1.

49. Ce cycle ramenait les nouvelles lunes aux mêmes jours du mois; le cycle de 28 ans ramenait les jours du mois aux mêmes jours de la semaine : en les multipliant l'un par l'autre, on formait un cycle composé de 532 ans, qui ramenait les nouvelles lunes aux mêmes jours du mois et de la semaine.

Ce cycle, employé par Denis le petit, s'appelle la *période Dyonisienne*, ou le grand cycle pascal, parce qu'il ramenait Pâques et toutes les fêtes mobiles dans le même ordre.

50. Pour trouver l'année de ce cycle pour une année Julienne quelconque, il faut savoir quelle est l'année où le nombre d'or était = 1, et le cycle solaire = 1 pareillement.

Or nous savons que le cycle solaire de 28 ans était 1 en l'an 20, en 48, 76, etc. de 28 en 28 ans. Il faudrait trouver aussi un nombre d'or = 1 en quelques-unes de ces années : or, comme les auteurs ont fait à ce sujet diverses hypothèses, nous n'entrerons pas dans une discussion aujourd'hui sans objet ; nous nous contenterons de dire que les auteurs de l'Art de vérifier les dates, supposent que l'année de ce cycle était 2 l'an premier de J.-C. ; qu'elle était 532 l'an 531 ; qu'en l'an 532, le cycle pascal était 1, comme le cycle de 19 ans.

51. Outre le cycle de 19 ans, les computistes font encore usage d'un cycle lunaire pareillement de 19 ans, et qui commençait trois ans plus tard, c'est-à-dire l'an 4 du cycle pascal, ou l'an 535 de J.-C.

52. Il y a un autre cycle qu'on appelle des *indictions*, dont on ne connaît ni l'auteur, ni l'origine, ni même bien certainement l'époque. L'indiction est une espèce d'ajournement usité dans l'empire grec. Ce cycle était de 15 ans. L'opinion la plus commune en fixe l'origine au premier janvier 313 ; 21 cycles formeraient 315 ans. L'an 312 finissait un cycle, 312 — 315 = — 3 ; l'origine peut donc se reculer 3 ans avant l'ère chrétienne dont l'an 1 a 4 d'indiction. Nous n'aurions pas parlé de cette période qui n'intéresse en rien les astronomes, si elle n'entrait dans la composition de la période Julienne.

53. Cette période dont l'auteur est Joseph Scaliger, qui la nomma ainsi, les-uns disent en l'honneur de Jules-César Scaliger, son père ; les autres disent, parce qu'elle s'adapte à l'année Julienne. Quoi qu'il en soit, cette période est un multiple de 28, 19 et 15, c'est-à-dire des cycles solaire, lunaire et d'indiction. Le produit de ces trois nombres est 7980, et son auteur l'a proposée comme une mesure universelle en chronologie. Képler, Bouillaud, Mercator en ont fait grand usage, et Petau en a fait une des bases principales de son ouvrage de la *Doctrine des Tems*.

Quand on trouve dans un acte ou dans une date les années de ces trois cycles, on sait par là même à laquelle des 7980 années de la période l'acte se rapporte, et par conséquent l'an de notre ère, car il est impossible qu'on s'y trompe de 7980 ans ; et dans le cours d'une période entière, il ne peut y avoir qu'une seule année qui ait les mêmes nombres pour cycles solaire, lunaire et d'indiction.

54. La période Julienne doit commencer l'année où les trois cycles auront également le nombre 1 ; alors une année quelconque n de la période donnera

$$n = 28x + a = 19y + b = 15z + c,$$

a étant le nombre du cycle solaire, b le nombre du cycle lunaire, et c celui du cycle d'indiction. Cette équation fournit la matière d'un problème : étant donnés les trois nombres

nombres a, b, c, trouver les nombres x, y et z, et par conséquent le nombre n de l'année de la période Julienne. Ce problème a dû être résolu par l'auteur de la période; nous ne connaissons pas la méthode qu'il a suivie. Wallis, Euler, Keill et Lalande ont résolu ce problème de différentes manières. En voici une qui me paraît plus simple.

55. Commençons par vérifier notre équation, en supposant $a=b=c=1$, nous aurons $n-1=28x=19y=15z$. Il faut donc trouver un multiple de 28, de 19 et de 15 tout à la fois; le plus petit sera $28.19.15=7980$; donc $n-1=7980$ et $n=7981$. Ainsi l'an 7981 ou l'an 1 de la période Julienne, nous aurons $a=1$, $b=1$, $c=1$.

56. De $n=28x+a=19y+b=15z+c$, nous tirons

$$28x+a=19y+b, \quad \text{d'où} \quad y=\frac{28x+a-b}{19},$$

$$28x+a=15z+c, \ldots\ldots\ldots \quad z=\frac{28x+a-c}{15},$$

ou

$$z=x+\frac{13x+a-c}{15}=x+A.$$

Cette dernière fraction doit être un entier, et peut recevoir une valeur à volonté. Soit

$$x=\frac{15A-(a-c)}{13}=A+\frac{2A-(a-c)}{13},$$

il faudra que $\frac{2A-(a-c)}{13}$ soit un nombre entier.

Soit $$A=\frac{13B+(a-c)}{2}=6B+\frac{B+(a-c)}{2},$$

il faudra que $\frac{B+(a-c)}{2}$ soit un entier.

Choisissons B tel que $B+(a-c)$ soit un nombre pair, c'est-à-dire que B soit pair si $(a-c)$ est pair, impair s'il est impair; alors

$$x=\frac{15.\frac{13B+(a-c)}{2}-(a-c)}{13}=\frac{15.13B+15(a-c)-2(a-c)}{2.13}=\frac{15B+(a-c)}{2},$$

$$y=\frac{28.\frac{15B+(a-c)}{2}+(a-b)}{19}=\frac{210B+14(a-c)+(a-b)}{19}$$

$$=11B+\frac{B+14(a-c)+(a-b)}{19},$$

$$z=\frac{28.\frac{15B+(a-c)}{2}+(a-c)}{15}=14B+(a-c).$$

Soit $$B = 19C - 14(a-c) - (a-b),$$

x, y, z seront des entiers.

Il faut donc que B soit un multiple de 19 plus grand que $14(a-c)+(a-b)$. Pour cela, soit $m = 14(a-c)+(a-b)$, et prenez le multiple de 19 immédiatement supérieur à m, ce sera 19 C; vous en retrancherez m, il restera B, et vous aurez $z = 14B+(a-c)$; vous aurez pour preuve les valeurs de x et de y.

Exemple. Soit $a = 19$, $b = 9$, $c = 11$,

$a-c =$	8
	14
$14(a-c) =$	112
$a-b =$	10
$m = 14(a-c)+(a-b) =$	122
Divisez m par 19, le quotient sera 6 pour................................	114
	19
Le multiple de 19 immédiatement supérieur à m........................ =	133
Comme $(a-c)$ est pair, ajoutez..	19
Pour avoir un multiple de C qui soit pair ou 19 C..................... =	152
ôtez $m = 14(a-c)+(a-b)$... =	122
Le reste donne.. B =	30
$14B =$	420
$(a-c) =$	8
$z =$	428
$15z$........ =	6420
$c =$	11
Année de la période... $n =$	6431

$15B =$	450	$B =$	30
$a-c =$	8	$14(a-c)+(a-b) =$	122
$15B+(a-c) =$	458	$B+14(a-c)+(a-b) =$	152
moitié =	229	prenez le 19e =	8
multipliez par	28	$11B =$	330
	1832	$y =$	338
	458		3042
$28x =$	6412	$19y =$	6422
$a =$	19	$b =$	9
$n =$	6431	$n =$	6431

57. Ainsi nous avons trois manières de trouver n, qui toutes n'emploient que des nombres petits et faciles à calculer, avantage que je n'ai vu dans aucune autre méthode.

Cherchons maintenant à quelle année du calendrier Julien appartient cette année de la période Julienne : c'est un problème de même genre, mais pour le résoudre plus utilement, cherchons quel rang tient dans la période l'an 1 de l'ère chrétienne.

Or l'an 1, $a=10$, $b=2$, $c=4$, $a-c = 6$

$14(a-c) = 84$

$(a-b) = 8$

$m = 92$

$4.19 = 76$

19

$5.19 = 95$

et comme $(a-c)$ est pair, $19C = 6.19 = 114$

ôtez $m = 92$

$B = 22$

$4B = 88$

$14B = 308$

$a-c = 6$

$z = 314$

$5z = 1570$

$15z = 4710$

$c = 4$

Ainsi l'an 1 est de la période Julienne l'an $= 4714$

$15B =$	330	$B =$	22
$a-c =$	6	$m =$	92
$15B+(a-c) =$	336	$B+m =$	114
$x =$ moitié $=$	168	$\frac{1}{19}(B+m) =$	6
multipliez par.....	28	$11B =$	242
	1344	$y =$	248
	336	$9y =$	2232
$28x =$	4704	$19y =$	4712
$a =$	10	$b =$	2
$n =$	4714	$n =$	4714

Voilà trois manières parfaitement d'accord.

Ainsi en l'an 1, n était.................... 4714 et 4713 en l'an 0.

Par le problème précédent, n était......... 6431

L'intervalle est de........ 1717

L'année 6431 de la période suivait donc de 1717 l'an 1 ; elle était donc l'année 1718.

Et en effet, 1718 est la 19ᵉ du cycle solaire, la 11ᵉ du cycle d'indiction, et elle a 9 pour nombre d'or. Ces trois quantités sont absolument les mêmes pour l'année Julienne et l'année Grégorienne. Pour avoir l'année de la période ajoutez 4713 à l'année donnée.

Cette période n'est aujourd'hui d'aucun usage en Astronomie, mais il est utile de la connaître pour lire les ouvrages où il en est question.

58. Il nous reste à parler des épactes dont l'Église se sert pour calculer les nouvelles lunes moyennes, et déterminer chaque année la fete de Paques et toutes les fêtes mobiles qui suivent Pâques à des distances toujours les mêmes.

Épacte est un mot grec qui signifie nombre additionnel; il a la même racine que le mot épagomène.

L'année de 12 mois lunaires est de..... 354 jours.
L'année solaire commune est de....... 365
la différence est..... 11.

C'est l'âge de la lune moyenne au commencement de la seconde année, en supposant que la nouvelle lune soit arrivée à l'instant précis où l'année commençait : c'est l'épacte de la seconde année. L'épacte de la troisième année serait 22, celle de la 4ᵉ serait 33. Mais nous avons dit qu'à la fin de la troisième année on mettait un mois intercalaire de 30 jours; l'âge de la lune au commencement de la quatrième année sera donc 3 seulement, c'est l'épacte de la 4ᵉ année.

59. Les épactes sont ensuite 14, 25 et 36 ou 6, car à la fin de la sixième année on place un mois intercalaire de 30 jours.

Les épactes suivantes sont 17, 28 et 39 ou 9, à cause du mois intercalaire.

Ensuite viennent les épactes 20, 31 ou 1; 12, 23, 34 ou 4; 15, 26, 37 ou 7; 18 29, 40 ou 10; 21, 32 ou 2; 13, 24, 35 ou 5; 16, 27, 38 ou 8; 19, 30 ou 0.

Telle est l'idée générale qu'on peut se faire des épactes; elles se placent dans le calendrier, dans un ordre direct à côté de chaque année, et dans un ordre rétrograde, à côté des jours du mois. Elles servent comme les lettres dominicales; mais au lieu d'indiquer le jour de la semaine, elles indiquent pendant toute l'année le jour de la nouvelle lune. En effet, si l'épacte de l'année est 11, il restera 19 jours jusqu'à la nouvelle lune. Mais l'épacte étant mise en ordre inverse dans les mois, et 30 appartenant au premier de l'année, si je suis les épactes jusqu'à ce que j'aie rétrogradé de 19, j'arriverai à l'épacte 11 et au jour de la nouvelle lune. Ainsi l'épacte 11 indique la nouvelle lune; cet arrangement est au moins simple et ingénieux.

60. Mais les mois sont alternativement de 29 et 30 jours; pour y avoir égard, on met de deux en deux mois lunaires, deux épactes à un même jour. Ces épactes sont XXV et XXIV; elles sont placées en février, avril, juin, premier août, 29 septembre et 27 novembre.

61. Cet ordre serait suffisant et perpétuel, si le cycle de 19 ans donnait toutes les lunaisons intercalaires de 30 jours; mais nous avons vu (47) que la dernière intercalaire

du cycle n'était que de 29 jours, au lieu de 30; la nouvelle lune avancera donc d'un jour, il faudra ajouter ce jour à toutes les épactes. Pour éviter cette addition, on a fait 30 lignes ou suites d'épactes, où les épactes de la ligne supérieure sont toujours plus fortes d'une unité que celles de la ligne inférieure.

Les épactes d'une même ligne vont toujours en augmentant de 11, excepté celle qui répond au nombre d'or 1, qui a augmenté de 12.

62. Mais il y a deux causes qui forcent à changer de ligne; le cycle est en erreur de $1^h\ 27'\ 32''\ 42'''$ qui font un jour en $312\frac{1}{2}$; on a supposé un jour en 300 ans, à l'ordinaire en nombre rond. Ainsi, tous les 300 ans on sera forcé de prendre une épacte plus forte d'une unité, pour que la nouvelle lune soit indiquée un jour plutôt. Cette équation s'appelle *proemptose*, chute, saut ou coïncidence en avant. D'un autre côté, on retranche trois bissextiles en 400 ans; à chaque bissextile retranchée, la nouvelle lune arrive plus tard d'un jour, ce qui nécessite une équation contraire, qu'on appelle *métemptose*, saut, chute ou coïncidence en arrière.

Quand l'équation lunaire arrive seule, on augmente les épactes d'un jour, en les prenant dans la ligne supérieure.

Quand l'équation solaire arrive seule, on diminue d'un jour en descendant d'une ligne dans la *table étendue des* 30 *suites d'épactes*.

Quand les deux équations arrivent ensemble, elles se compensent, on ne fait aucun changement. (Voyez mes calculs dans l'Astronomie de Lalande, 1559 — 1564.)

63. On a donc trois causes qui forcent à changer le cours naturel des épactes, deux les font augmenter, la troisième les fait diminuer.

L'équation solaire arrive 3 fois en 400 ans; l'équation lunaire arrive de 300 en 300 ans sept fois de suite; la huitième, elle n'arrive qu'au bout de 400 ans, c'est-à-dire huit fois en 2500 ans.

L'équation qui dépend du nombre d'or arrive tous les 19 ans. Pour faire entrer cette dernière dans le calcul, d'une façon moins incommode, on a fait une table de 19 colonnes dont chacune porte en tête un des 19 nombres d'or.

Chaque colonne est de 32 lignes désignées par des lettres qui servent d'argument. Ces lettres sont en ordre rétrograde, P, N, M, H, G, F, E, D, C, B, A, *u*, *t*, *s*, *r*, *q*, *p*, *n*, *m*, *l*, *k*, *i*, *h*, *g*, *f*, e, *d*, *c*, *b*, *a*.

On a omis tout exprès les lettres qui pourraient faire équivoque; o qui pourrait être pris pour zéro, L qui vaut aussi 50, et l qu'on aurait pu confondre avec le chiffre 1.

Ces lignes sont horizontales dans le livre du calendrier; elles sont verticales dans la table I ci-après.

La ligne P fut donnée au sixième siècle, c'est-à-dire qu'elle a servi depuis l'an 500 jusqu'à 600; les épactes de cette ligne répondaient alors assez bien aux nouvelles lunes, ou plutôt les indiquaient environ 16 heures trop tard. On ne voulait pas qu'elles s'accordassent mieux, de peur de se rencontrer, pour la célébration de la Pâque, avec les Juifs qui se règlent sur la lune vraie, ni avec certains hérétiques, nommés *quarto-décimans*, qui se réglaient sur le 14 de la lune vraie; ce qui aurait été *indécent*, *illicite* et *sentant le manichéisme*, dit Clavius, dans son livre du Calendrier, page 59, édition de Rome, 1603, ou *Clavii Opera*, tome V, page 55. On ne voulait pas que la lune de Pâques

précédât la lune vraie, *ce qui serait absurde*, dit encore le même auteur, mais qu'elle la suivît, *ce qui est plus conforme à l'usage de l'Église.*

64. Au bout de 300 ans, l'équation lunaire força de remonter pour chercher une ligne plus forte d'une unité. On donna donc la ligne *a*, 9ᵉ siècle, à l'an 800.

En 1100, pour une raison semblable, on est remonté à la ligne *b*, en 1400 à la ligne *c*. En 1582 on supprima 10 jours; il fallut chercher des épactes plus faibles et descendre des dix lignes, *b*, *a*, P, N, M, H, G, F, E, D. En 1700, on est venu de D à C; en 1800, point de changement, parce que les deux équations concouraient.

En 1900, on ira de C en B pour l'équation solaire.

En 2000, point d'équation, on gardera B, l'année est bissextile.

On continuerait ainsi à l'infini, au moyen des deux tables suivantes qui donnent les années où arrivent les équations lunaires et solaires.

TABLE *Des années où l'on rétrograde d'une ligne pour l'équation lunaire.*	
1400	
	400
1800	
	300
2100	
	300
2400	
	300
2700	
	300
3000	
	300
3300	
	300
3600	
	300
3900	
	400
4300	
	300
4600	
	300
4900	
	300
5200	
	300
5500	
	300
5800	
	300
6100	
	300
6400	
	400
6800	
etc.	
La différence est 7 fois de 300 ans; la 8ᵉ est de 400 ans.	

TABLE *Des années où l'on avance d'une ligne pour l'équation solaire.*	
1700	4500
1800	4600
1900	4700
2100	4900
2200	5000
2300	5100
2500	5300
2600	5400
2700	5500
2900	5700
3000	5800
3100	5900
3300	6100
3400	6200
3500	6300
3700	6500
3800	6600
3900	6700
4100	6900
4200	7009
4300	7100
etc.	
Toutes ces années sont les années centenaires communes.	

65. Un astronome est excusable de trouver aujourd'hui bien compliquée une telle machine, dont l'effet se borne à donner la nouvelle lune à deux jours près. Au moyen d'une table construite sur les mouvemens moyens, en supposant le cercle divisé en décimales, il indiquerait les nouvelles lunes de tous les siècles, soit exactement, soit trop tard du nombre d'heures qu'on voudrait fixer. Au moyen de quelques additions du genre le plus simple, il déterminerait la lune pascale pour une année quelconque. Mais on voulait un moyen qui dispensât des tables astronomiques, qui n'employât que de petits nombres; on ne voulait rien qui parût scientifique; on rendit la chose presque inintelligible, plus longue et moins sûre. Il arrive souvent qu'on fait au calendrier ecclésiastique le reproche de ne pas atteindre parfaitement son but, malgré tout son échafaudage. Le reproche est injuste le plus souvent; les défauts qu'on croit apercevoir dans ce calendrier, ont été vus et laissés tout exprès par les auteurs. Ils voulaient un calendrier qui pût, dans certaines limites, indiquer la fête de Pâques, en satisfaisant aux conditions qu'ils s'étaient imposées; ils y ont réussi autant qu'ils l'ont desiré. Malgré tout le fatras du gros volume in-folio de 700 pages, composé par Clavius, sous le titre de *Romani Calendarii à Gregorio XIII, P. M. restituti Explicatio. Romæ*, 1603, cet ouvrage est curieux et ne se lit pas sans intérêt; il y a près de 30 ans que j'en ai fait un examen très-détaillé. J'ai refait tous les calculs qu'il suppose. J'ai trouvé dans Clavius quelques petites erreurs : en les corrigeant, j'ai trouvé le calendrier plus exact qu'il ne l'a cru lui-même; j'avais rédigé des démonstrations algébriques de toutes les règles qu'il y donne, j'avais quelquefois simplifié ces règles. Aujourd'hui il ne me reste de tout cela que ce que je viens d'exposer, et je ne suis nullement tenté de recommencer le travail pour commenter de nouveau Clavius. Peu de personnes sans doute partageront aujourd'hui l'indignation qu'éprouvait le bon Jésuite, à la seule idée de se rencontrer, dans la célébration de la Pâque, soit avec les Juifs, soit avec les hérétiques quarto-décimans, qui avaient eu la méchanceté de se faire un système beaucoup plus simple : on serait bien plutôt tenté de regretter qu'on n'ait pas choisi le parti de rendre fixe la fête de Pâques, et de renoncer tout-à-fait à l'année lunaire, ainsi que beaucoup de bons esprits l'avaient proposé, et comme l'Église était en droit de le faire, suivant Clavius lui-même, p. 59. Il est certain au moins que rien n'est plus simple que le calendrier Grégorien civil qui est tout solaire, et que rien n'est plus compliqué, sans nécessité bien démontrée, que le calendrier ecclésiastique qui a voulu accorder les deux espèces d'années; mais il faut convenir aussi que le problème, une fois posé comme on le voulait alors, la solution était très-ingénieuse malgré sa complication indispensable. L'auteur de ce système est *Aloysius Lilius* ou Luigi Lilio Giraldi (Voyez *Moreri* au mot *Giraldi*). Ce calendrier, malgré quelques réclamations, fut reçu par tous les États catholiques; les Protestans s'y refusèrent longtems. Les Anglais ne l'admirent qu'à compter du premier janvier 1752. La Russie est aujourd'hui le seul État chrétien qui ait conservé le calendrier Julien, et qui date suivant ce qu'on appelle le vieux style. Quand on veut éviter l'équivoque, on met la double date en forme de fraction $\frac{25}{13}$ février quand la différence est 12, $\frac{18}{7}$ quand elle était 11, etc. (35).

66. Nous terminerons ce chapitre par deux méthodes différentes, pour trouver le jour de Pâques pour une année quelconque.

1°. Divisez par 19 le nombre de l'année proposée, et nommez a le reste.
2°. Divisez le même nombre par 4, et nommez b le reste.
3°. Divisez le même nombre par 7, et nommez c le reste.
4°. Divisez $(19a + M)$ par 30, et nommez d le reste.
5°. Divisez $(2b + 4c + 6d + N)$ par 7, et nommez e le reste.
6°. Dans le calendrier Julien, faites $M = 15$ et $N = 6$ constamment.

Dans le calendrier Grégorien,

		M	N
depuis 1582	jusqu'à 1699	22	3
1700	1799	23	3
1800	1899	23	4
1900	1999	24	5
2000	2099	24	5
2100	2199	24	6
2200	2299	25	0
2300	2399	26	1
2400	2499	25	1.

7°. Vous aurez pour le jour de Pâques, $(22 + d + e)$ mars,
ou $(d + e - 9)$ avril.

Cette règle est générale pour le calendrier Julien; elle ne souffre que deux exceptions pour le calendrier Grégorien.

La première, si le calcul donne 26 avril, mettez 19;
si le calcul donne 25 avril, mettez 18.

On peut réduire ces deux remarques à une seule.

Si le calcul donne un nombre au-dessus du 24 avril, retranchez 7 jours, ou une semaine.

67. M. Gauss n'a point démontré ces formules. La démonstration se déduirait des principes que nous avons posés. Nous nous bornerons à quelques exemples.

Cherchons Pâques pour l'an 1 de notre ère :

$$\tfrac{1}{19} = 0, \text{ et le reste } = 1 = a,$$
$$\tfrac{1}{4} = 0, \quad \text{le reste } = 1 = b,$$
$$\tfrac{1}{7} = 0, \quad \text{le reste } = 1 = c,$$

$$\frac{19a + M}{30} = \frac{19 + 15}{30} = \frac{34}{30} = 1, \text{ le reste } = 4 = d,$$

$$\frac{2b + 4a + 6d + N}{7} = \frac{2 + 4 + 24 + 6}{7} = \frac{36}{7} = 5, \text{ le reste } 1 = e.$$

Pâques $= 22 + 4 + 1 = 27$ mars,
ou 5 avril $- 9 = 36$ mars $- 9 = 27$.

Soit

Soit l'année 1582,

$$\frac{1582}{19}=\frac{19.83+5}{19}, \quad a=5,$$
$$\frac{1582}{4}=\frac{4.395+2}{4}, \quad b=2,$$
$$\frac{1582}{7}=\frac{7.226}{7}, \quad c=0,$$
$$\frac{19a+M}{30}=\frac{95+15}{30}=\frac{110}{30}=\frac{3.30+20}{30}, \quad d=20,$$
$$\frac{2b+4c+6d+N}{7}=\frac{4+120+6}{7}=\frac{130}{7}=\frac{7.18+4}{7}, \quad e=4.$$
$$22+20+4=46 \text{ mars}=15 \text{ avril},$$
$$24-9=15 \text{ avril}.$$

La formule est également sûre pour la première et la dernière année Julienne.

Il nous importe surtout qu'elle le soit pour le calendrier actuel. Prenons pour exemple 1812,

$$\frac{1812}{19}=\frac{19.95+7}{19}, \quad a=7, \qquad 19a=133, \quad M=23, \quad 19a+M=156$$
$$\frac{1812}{4}=\frac{4.453+0}{4}, \quad b=0,$$
$$\frac{1812}{7}=\frac{7.258+6}{7}, \quad c=6,$$
$$\frac{19a+M}{30}=\frac{156}{30}=\frac{30.5+6}{30}, \quad d=6,$$
$$\frac{2b+4c+6d+N}{7}=\frac{24+36+4}{7}=\frac{64}{7}=\frac{7.9+1}{7}, \quad e=1,$$
$$22+6+1=29 \text{ mars}, \quad 6+1-9=-2 \text{ avril}=29 \text{ mars}.$$

Les deux résultats sont également bons, les deux formules sont également sûres. L'opération est simple et facile. Ce peu de lignes de M. Gauss remplacerait le gros volume de Clavius, si l'auteur y avait ajouté la manière de continuer la table des M et des N, qu'il n'a étendue que jusqu'à 2499.

68. Il y a plusieurs autres manières de résoudre le problème.

Pâques est toujours un dimanche; il faut donc connaître la lettre dominicale de l'année, et quand cette année est bissextile, c'est la seconde lettre qu'il faut employer. Pâques est le dimanche qui suit la pleine-lune qui tombe le jour de l'équinoxe ou le suit immédiatement. L'équinoxe est supposé fixe au 21 mars; ainsi Pâques ne peut arriver plutôt que le 22 mars; mais si le 22 est un lundi, Pâques arrivera tout au plutôt le 28 mars. Si la pleine-lune, au lieu de tomber le 21, tombe 29 jours plus tard, c'est-à-dire le 50 mars ou le 19 avril, Pâques sera le 19 avril, si ce 19 est un dimanche; il sera seulement le 25, si le 19 est un lundi.

Ainsi Pâques arrive le plutôt possible le 22 mars, et au plus tard le 25 avril.

Le 22 mars a D pour lettre et 9 pour épacte. Pour que 9 marque le jour de la pleine-lune, il faut que l'épacte soit de 23, afin qu'après avoir rétrogradé de 14 jours, elle tombe sur le 9.

Si donc l'épacte de l'année est 23, on verra par la table II ci-après que l'épacte 9 et la lettre D répondent au 22 mars ; ainsi Pâques arrivera le 22, si D est la lettre dominicale de l'année ; car les deux conditions seront remplies, le 22 sera dimanche et suivra l'équinoxe. Si D n'est pas la lettre de l'année, on cherchera la lettre dans la table II, sur la ligne de l'épacte 23, et au-dessous de cette lettre, on trouvera le jour de Pâques. Si la dominicale est A, Pâques sera le 26, puisque le 26 sera le premier dimanche après la pleine-lune.

Si l'épacte est 22, la table II montre que la pleine-lune tombe au jour marqué 8 et E, c'est-à-dire le 23. Pour que Pâques fût le 23, il faudrait que E fût dominicale : si c'est F, Pâques sera le 24; si c'est D, Pâques sera le 29.

Si l'épacte est 21, la pleine-lune sera le 7 qui est accompagné de la lettre F, c'est-à-dire le 24; Pâques sera donc le 24 si F est dominicale, sinon il sera plus tard, dans la même ligne et sous la lettre dominicale.

Il en est de même de toutes les épactes; le calcul ne peut donner aucun embarras, si l'on a sous les yeux les mois du calendrier Grégorien, et la table II ne coûtera que la peine de l'écrire, l'usage en sera perpétuel.

69. Mais pour s'en servir, il faut connaître l'épacte et la lettre dominicale de l'année proposée. Nous avons donné (36) une formule générale pour trouver la lettre dominicale ; il reste à trouver l'épacte, ce qui suppose que l'on connaisse le nombre d'or. Nous en avons donné le moyen (48) ; quant à l'épacte, il y aurait presque autant de règles que de siècles. Au lieu de ces préceptes variables et impossibles à retenir, j'ai disposé la table I ci-après, où l'on trouve à vue l'épacte qui, dans chaque siècle, répond au nombre d'or donné. Je n'ai marqué les siècles que jusqu'à l'an 8700 ; mais on peut continuer indéfiniment, au moyen des règles posées à l'article (64), et des deux petites tables qui le terminent. Cette table au reste n'est que la table étendue des épactes autrement disposée.

70. Le jour de Pâques trouvé, on en déduit les jours de toutes les fêtes mobiles; le jeudi, 40e jour après Pâques, est l'Ascension.

Le dimanche, 50e jour après Pâques, est la Pentecôte (πεντηκοστη ἡμέρα 50e jour); le dimanche d'après est la Trinité, et le jeudi d'après la Trinité est la Fête-Dieu, 61 jours ou deux mois justes après le samedi-saint qui est la veille de Pâques.

De Pâques, comptez 6 dimanches en rétrogradant, vous aurez le premier dimanche de Carême ou la Quadragésime ; le mercredi qui précède la Quadragésime est le jour des Cendres. Le dimanche avant les Cendses est la Quinquagésime, et le dimanche qui la précède est la Sexagésime, et celui d'avant, la Septuagésime.

71. Le mois lunaire, dans le calendrier Romain, prend son nom du mois dans lequel tombe le dernier jour de la lunaison, suivant ce principe, qui n'est pourtant pas universellement admis :

In quo completur mensi lunatio detur.

Il peut arriver ainsi que deux lunes de suite portent le nom du même mois.

TABLES

Pour trouver en tous tems la fête de Pâques du Calendrier Grégorien.

TABLE Ière. Pour trouver l'Épacte par le Nombre d'or.

Nombre d'or.	1500 avant la réfor.	D 1500 après la réfor. 1600	C 1700 1800 8700	B 1900 2000 2100	A 2200 2400	u 2300 2500	t 2600 2700 2800	s 2900 3000	r 3100 3200 3300	q 3400 3600	p 3500 3700	n 3800 3900 4000	m 4100	l 4200 4300 4400	k 4500 4600	i 4700 4800 4900
1	29	1	*	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17
2	11	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	*	29	28
3	22	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9
4	3	4	3	2	1	*	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20
5	14	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
6	25	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12
7	6	7	6	5	4	3	2	1	*	29	28	27	26	25	24	23
8	17	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
9	28	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
10	9	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	*	29	28	27	26
11	20	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7
12	1	2	1	*	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18
13	12	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	*	29
14	23	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
15	4	5	4	3	2	1	*	29	28	27	26	25	24	23	22	21
16	15	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
17	26	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13
18	7	8	7	6	5	4	3	2	1	*	29	28	27	26	25	24
19	18	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
1	29	1	*	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17

Cherchez la lettre dominicale (36) et le nombre d'or (48); avec le nombre d'or et le siècle, prenez l'épacte dans la table I; avec la lettre dominicale et l'épacte, vous trouverez le jour de Pâques dans la table II.

Le nombre d'or qui est dans la première colonne est l'argument; les autres colonnes renferment les épactes. La première colonne sert depuis 1500 jusqu'à la réformation; la seconde, D, depuis la réformation jusqu'à 1700; les autres, suivant ce qui est marqué en tête, et ainsi jusqu'à l'an 8600; après quoi on revient en C pour 8700, 8800 et 8900; A servira pour 9100, 9200, 9300; *u* en 9400, *t* en 9500, *u* en 9600, *t* en 9700, *s* en 9800, 9900 et 10000. Voyez pour la suite *Clavius*, p. 154 et

SUITE DE LA TABLE Ière. Pour trouver l'Épacte par le Nombre d'or.

Nombre d'or.	h 5000 5200	g 5100 5300	f 5400 5500 5600	e 5700 5800	d 5900 6000 6100	c 6200 6400	b 6300 6500	a 6600 6800	P 6700 6900	N 7000 7100 7200	M 7300 7400	H 7500 7600 7700	G 7800 8000	F 7900 8100	E 8200 8300 8400	D 8500 8600
1	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
2	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12
3	8	7	6	5	4	3	2	1	*	29	28	27	26	25	24	23
4	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4
5	*	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15
6	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	*	29	28	27	26
7	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7
8	3	2	1	*	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18
9	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	*	29
10	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10
11	6	5	4	3	2	1	*	29	28	27	26	25	24	23	22	21
12	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2
13	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13
14	9	8	7	6	5	4	3	2	1	*	29	28	27	26	25	24
15	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
16	1	*	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16
17	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	*	29	28	27
18	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8
19	4	3	2	1	*	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19
1	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

suivantes ; mais il remarque lui-même que cet arrangement n'est exact que jusqu'à l'an 8100. Plus loin, les épactes ne cadrent plus si bien avec les nouvelles lunes ; mais pour corriger ce défaut, il eût falln compliquer encore le calendrier ; on lui a donc laissé volontairement cette imperfection.

La première colonne de la table II présente toutes les épactes, en commençant par 3, la seule qui puisse donner Pâques le 22 mars, et qui en général est celle qui fait arriver Pâques plutôt qu'aucune autre.

La seconde, les lettres dominicales des mois, depuis le 22 mars jusqu'au 19 avril, qui donnent les deux limites de Pâques. Chacune de ces lettres est celle qui fait arriver Pâques le plutôt. Quatorze jours après, la lettre se retrouve la même.

La troisième donne l'épacte du mois qui est à chaque jour à côté de la lettre. Cette épacte indique le 14e de la lune.

Les colonnes suivantes donnent la fête de Pâques dans la ligne qui répond à la fois à l'épacte et à la lettre dominicale, qui sont les deux argumens de la table.

TABLE II. Pour trouver la fête de Pâques.

Épacte.	λ	ε	LETTRE DOMINICALE. D	E	F	G	A	B	C
23	D	9	22 mars.	23 mars.	24 mars.	25 mars.	26 mars.	27 mars.	28 mars.
22	E	8	29	23	24	25	26	27	28
21	F	7	29	30	24	25	26	27	28
20	G	6	29	30	31	25	26	27	28
19	A	5	29	30	31	1 avril.	26	27	28
18	B	4	29	30	31	1	2 avril.	27	28
17	C	3	29	30	31	1	2	3 avril.	28
16	D	2	29	30	31	1	2	3	4 avril.
15	E	1	5 avril.	30	31	1	2	3	4
14	F	*	5	6 avril.	31	1	2	3	4
13	G	29	5	6	7 avril.	1	2	3	4
12	A	28	5	6	7	8	2	3	4
11	B	27	5	6	7	8	9	3	4
10	C	26	5	6	7	8	9	10	4
9	D	24	5	6	7	8	9	10	11
8	E	23	12	6	7	8	9	10	11
7	F	22	12	13	7	8	9	10	11
6	G	21	12	13	14	8	9	10	11
5	A	20	12	13	14	15	9	10	11
4	B	19	12	13	14	15	16	10	11
3	C	18	12	13	14	15	16	17	11
2	D	17	12	13	14	15	16	17	18
1	E	16	19	13	14	15	16	17	18
*	F	15	19	20	14	15	16	17	18
29	G	14	19	20	21	15	16	17	18
28	A	13	19	20	21	22	16	17	18
27	B	12	19	20	21	22	23	17	18
26	C	11	19	20	21	22	23	24	18
25	D	10	19	20	21	22	23	24	25
24	D	10	19 avril.	20 avril.	21 avril.	22 avril.	23 avril.	24 avril.	25 avril.

Exemple du calcul du jour de Pâques pour 1812,

$$7n+6-1812-453+(18-16)-\tfrac{1}{4}(18-16)=7n-2247=7n-7.322-3=4=D$$

$\frac{1812+1}{19}=95.\frac{8}{19}$, le nombre d'or est donc 8. Avec ce nombre la table I, colonne C, 1800, donne l'épacte 17.

Avec l'épacte 17 et la lettre dominicale D, la table II donne le 29 mars pour la fête de Pâques, comme nous l'avons trouvé (67) par la formule de M. Gauss.

FIN DU TROISIÈME ET DERNIER VOLUME.



TABLE DES CHAPITRES.

ERRATA.

Page 14, lignes 6 et 20, fig. 6, *lisez* fig. 5.
23, BP, *lisez* BP′.

54, 6 et 10 en remontant, *lisez* 25′,011.

71, 15, plus du côté de la terre de, *lisez* suivant le diamètre divisé vers la terre, que suivant le diamètre perpendiculaire.

79, 19, EQ cos TV, *ajoutez* fig. 72.

82, 11 en remontant, jours, *lisez* ans.

105 jusqu'à 168, au titre ajoutez une unité au numéro du chapitre.

211, $du = 1°23'27'',9\ h^{\frac{1}{2}}$, *lisez* 37″,9.

213, ligne dernière, cinq, *lisez* quatre.
13, $\frac{0.912281}{h^{\frac{3}{2}}}$, *lisez* $\frac{0.912281}{h^{\frac{3}{2}}}\ t$.

214, 1, six, *lisez* cinq.
4, 9.9602283, *lisez* 9.9601283.

236, 6, $z^{\frac{10}{2}}$, *lisez* $z^{\frac{11}{2}}$.

437, 110′,21, *lisez* 110′,25.

507, 16, ou au diamètre, *lisez* au diamètre.

689, à la fin de l'article 12 ajoutez : Dion Cassius rapporte encore une autre raison de cet arrangement des planètes pour désigner ~~les jours de la semaine~~, il la tire de l'intervalle musical, connu sous le nom de *quarte*, διὰ τεσσάρων; prenez les planètes suivant l'ordre des durées de leurs révolutions, Saturne, Jupiter, Mars, le Soleil, Vénus, Mercure et la Lune; allez de l'une à l'autre en procédant par *quartes*, ou de la première à la quatrième en passant les deux intermédiaires, vous aurez successivement Saturne, le Soleil, la Lune, Mars, Mercure, Jupiter, Vénus et Saturne, etc. Mais cette explication paraît moins naturelle. De toute manière cette période prouve que l'on connaît depuis bien long-tems les sept planètes et les durées au moins relatives de leurs révolutions. Rien de plus facile pour les planètes supérieures; pour Mercure on avait pu remarquer que ses digressions revenaient plus fréquemment que celle de Vénus. Rien de tout cela ne suppose pourtant un ensemble de connaissances astronomiques. Si l'auteur eût connu le véritable système, il eût mis la terre au second jour au lieu d'y mettre le Soleil. Mais il a pu connaître le système Égyptien, qui faisait de Vénus et de Mercure deux satellites du Soleil.

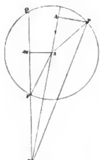
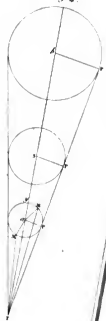
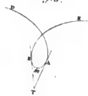
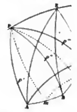
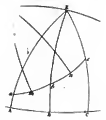
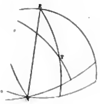
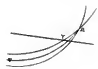










Fig. 7.

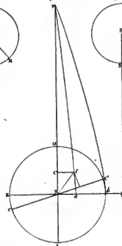


Fig. 8.



Fig. 9.

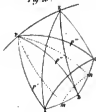


Fig. 10.

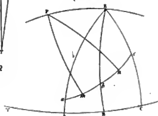


Fig. 14.

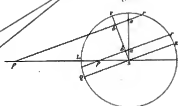


Fig. 13.

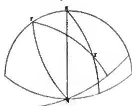


Fig. 15.

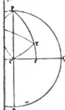


Fig. 18.

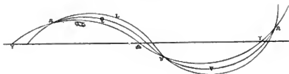


Fig. 19.

Fig. 22.

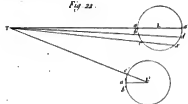


Fig. 23.

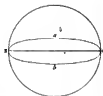


Fig. 26.

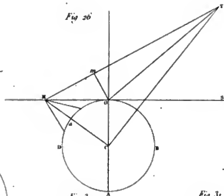


Fig. 27.

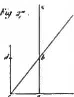


Fig. 31.

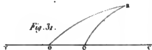


Fig. 30.

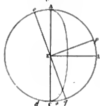


Fig. 32.

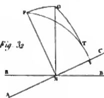


Fig. 33.

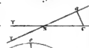


Fig. 36.



Fig. 39.

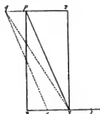

Fig. 40.


Fig. 41.

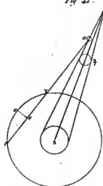

Fig. 42.


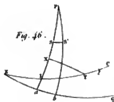
Fig. 46.


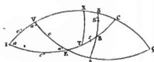
Fig. 47.




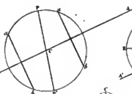
Fig. 51.


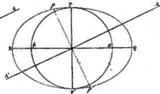
Fig. 52.


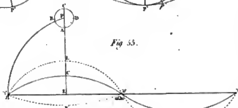
Fig. 55.


Fig. 58.

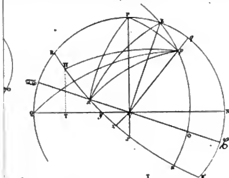


Fig. 59.

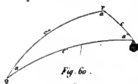


Fig. 60.



Fig. 63.

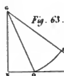


Fig. 65.



Fig. 68.

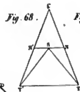


Fig. 69.

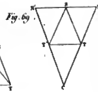


Fig. 64.

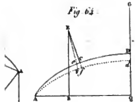


Fig. 66.



Fig. 67.



Fig. 76.

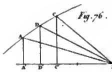


Fig. 74.

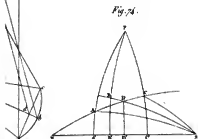


Fig. 75.

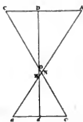


Fig. 77.

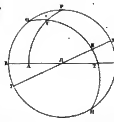
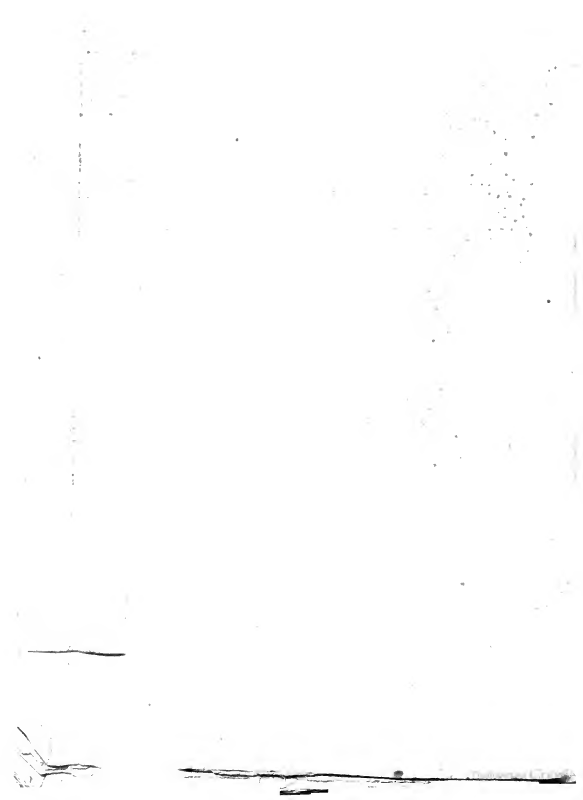
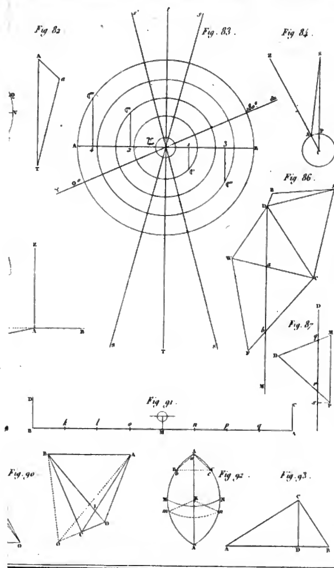


Fig 78.






Fig 82.
Fig. 83.
Fig 84.
Fig 86.
Fig. 87.
Fig 91.
Fig. 90
Fig. 92.
Fig. 93.

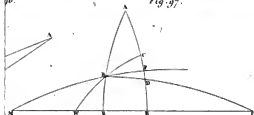
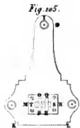
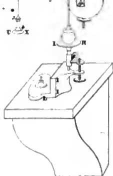
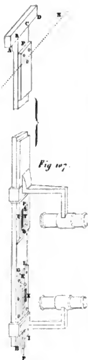

Fig. 97.

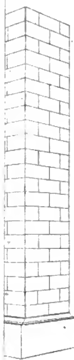

Fig. 98.


Fig. 104.


Fig. 105.


Fig. 106.

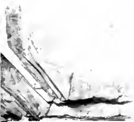

Fig. 107.

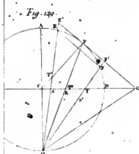


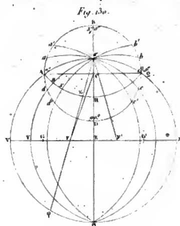
3.eme Vol. Planche X

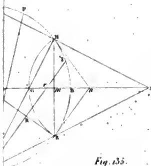


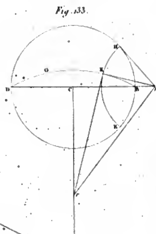


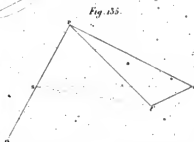



Fig. 129.


Fig. 130.




Fig. 133.


Fig. 135.



